Elementartopoi

Michael Fütterer

25. November 2010

Einführung

Wir wollen den Begriff „Elementartopos“ erklären. Dieser Begriff stellt eine Alternative zur Mengenlehre als Fundament der Mathematik dar, gleichzeitig ist er allgemeiner als der übliche Mengenbegriff. Ein Topos ist dabei einfach eine Kategorie, die unter bestimmten Gesichtspunkten ähnlich zur Kategorie der Mengen ist, und zwar in dem Sinne, dass in ihr bestimmte Konstruktionen möglich sind, die auch in der Kategorie der Mengen funktionieren. Die Kategorie der Mengen selbst ist natürlich das naheliegendste Beispiel für einen solchen Topos und soll uns bei der Entwicklung des Begriffs auch leiten, aber wir werden auch andere Beispiele für Topoi sehen. Es soll an dieser Stelle betont werden, dass die Definition einer Kategorie ohne Mengenlehre formuliert werden kann. Da die Definition eines Elementartopos' auch keine Mengen benötigt, wird es dadurch möglich, die Mengenlehre durch die Topostheorie zu ersetzen.

In diesem Aufschrieb werden terminale Objekte stets mit 1 bezeichnet. Den eindeutigen Pfeil von einem Objekt X in das Terminalobjekt bezeichnen wir mit $!_X$, manchmal auch nur mit $!$.

Dieser Text orientiert sich über weite Strecken an [MM92].

Pullbacks

Im Folgenden wird das Faserprodukt (Pullback) eine wichtige Rolle spielen, deswegen sollen hier noch einmal einige seiner Eigenschaften aufgeführt werden. Ein Pullback ist der Limes eines Diagramms der Form $\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$: Gegeben zwei Morphismen $f\colon A \longrightarrow X$, $g\colon B \longrightarrow X$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & X, \end{tikzcd}$$

das unter solchen Diagrammen universell ist: zu jedem weiteren solchen Diagramm

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "g_0"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

gibt es genau einen Pfeil $h\colon Q \longrightarrow P$ mit $f_0 = f' \circ h$ und $g_0 = g' \circ h$. In dieser Situation nennen wir f' das *Pullback von f an g* und g' das *Pullback von g an f*. Dabei bleiben Monomorphismen erhalten, d.h. wenn f ein Monomorphismus ist, ist f' auch einer; dies soll hier nicht bewiesen werden.

Beispiel 1: In $\mathcal{Set}$ ist das Faserprodukt zweier Abbildungen $f\colon A \longrightarrow X$, $g\colon B \longrightarrow X$ isomorph zu der Menge

$$\{(a,b) \in A \times B : f(a) = g(b)\}.$$

Wenn insbesondere B eine Teilmenge von X ist und g die Inklusion, so ist das Faserprodukt

$$\{(a,b) \in A \times B : f(a) = b\} = \{(a, f(a)) \in A \times X : f(a) \in B\}$$

isomorph zum Urbild von $B \subseteq X$ unter f in A und das Pullback der Inklusion an f ist die Inklusion des Urbildes $f^{-1}(B) \hookrightarrow A$. Insbesondere ist er wieder eine Inklusion, also ein Monomorphismus.

Es sei darauf hingewiesen, dass in einer Kategorie mit Terminalobjekt 1 Produkt und Equalizer Spezialfälle des Faserprodukts sind. Das Produkt $A \times B$ ist das Faserprodukt von $A \longrightarrow 1 \longleftarrow B$. Für den Equalizer zweier Pfeile $f, g\colon A \rightrightarrows B$ betrachten wir das Produkt $B \times B$. Dieses liefert uns zwei Pfeile

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "{(f,g)}"] \arrow[dr, "g"] & \\ B & B \times B \arrow[l] \arrow[r] & B, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, dashed, "\Delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ B & B \times B \arrow[l] \arrow[r] & B, \end{tikzcd}$$

nämlich $(f,g)\colon A \longrightarrow B \times B$ und die Diagonale $\Delta\colon B \longrightarrow B \times B$. Das Faserprodukt davon ist der Equalizer von f und g:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f \circ e = g \circ e"] \arrow[d, "e"] & B \arrow[d, "\Delta"] \\ A \arrow[r, "{(f,g)}"] & B \times B. \end{tikzcd}$$

Also ist eine Kategorie bereits endlich vollständig, wenn es in ihr ein Terminalobjekt und alle Faserprodukte gibt.

Unterobjekte

Ein Unterobjekt eines Objektes X in unserer Kategorie soll so etwas ähnliches sein wie eine Teilmenge in der Kategorie der Mengen. Für jede Teilmenge haben wir die Inklusion als Monomorphismus in unser Objekt, aber wenn wir als Unterobjekte alle Monomorphismen nach X nehmen würden, hätten wir zu viele. Deswegen benötigen wir noch eine Äquivalenzrelation.

Definition 2: Es sei C eine Kategorie und X ein Objekt darin. Wir nennen zwei Monomorphismen $f\colon A \hookrightarrow X$ und $g\colon B \hookrightarrow X$ äquivalent, wenn es einen Isomorphismus $h\colon A \xrightarrow{\sim} B$ gibt, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, hook, "f"'] & & B \arrow[dl, hook', "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Eine solche Äquivalenzklasse von Monomorphismen nach X nennen wir ein *Unterobjekt* von X. Manchmal sagen wir auch ungenau, A oder f sei ein Unterobjekt von X. Die Klasse aller Unterobjekte von X bezeichnen wir mit $\mathrm{Sub}_C(X)$. Wenn $\mathrm{Sub}_C(X)$ für jedes Objekt X von C eine Menge ist, dann heißt die Kategorie C *well-powered*.

Beispiel 3: Betrachten wir zunächst die vertraute Kategorie $\mathcal{Set}$. Wenn wir zwei Teilmengen $A, B \subseteq X$ haben und i bzw. j die jeweiligen Inklusionen sind, dann sagt die Äquivalenzrelation gerade: i und j sind genau dann äquivalent, wenn es eine Bijektion $h : A \longrightarrow B$ gibt mit $i \circ h = j$, aber da i und j Inklusionen sind, heißt das, für alle $a \in A$ gilt $h(a) = i(h(a)) = j(a) = a$. Also müssen A und B in Wahrheit die gleiche Teilmenge sein und $h = \mathrm{id}_A$. Wir bekommen als Unterobjekte also wirklich die Teilmengen.

Als weiteres Beispiel betrachten wir eine geordnete Menge $(M, \leq)$ als Ordnungskategorie. Weil es dort zwischen zwei Objekten höchstens einen Pfeil gibt, sind alle Pfeile Monomorphismen und $a \xrightarrow{\sim} b$ genau dann, wenn $a = b$ (wegen Reflexivität und Antisymmetrie). Also sind die Unterobjekte eines $x \in M$ alle $y \in M$ mit $y \leq x$.

Diese Kategorien sind also well-powered.

Wenn die Kategorie C well-powered ist, können wir $\mathrm{Sub}_C(-)$ auffassen als eine Abbildung von C nach $\mathcal{Set}$. Wir möchten diese zu einem kontravarianten Funktor machen. Sei dazu $f\colon A \longrightarrow B$ ein Morphismus in C. Wir müssen dann einem Unterobjekt von B eines von A zuordnen. Dazu wählen wir einen Monomorphismus $m\colon U \hookrightarrow B$ und betrachten das Faserprodukt

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, hook, "m'"] \arrow[d] & A \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r, hook, "m"] & B. \end{tikzcd}$$

Da Pullback Monomorphismen erhält, bekommen wir so ein Unterobjekt von A: das Pullback von m an f. Wir setzen also $\mathrm{Sub}_C(f)(m) = m'$. Das ist wohldefiniert und definiert einen kontravarianten Funktor.

Definition 4: Der eben definierte Funktor

$$\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(-)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}et$$

von einer well-powered Kategorie $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{S}et$ heißt *Unterobjektfunktor*.

Da dies ein mengenwertiger Funktor ist, stellt sich die Frage, wann dieser darstellbar ist. Dies wollen wir im nächsten Abschnitt untersuchen.

Unterobjektklassifikatoren

Wir lassen uns wieder von der Kategorie der Mengen leiten. Dort können wir ein Unterobjekt, also eine Teilmenge, auffassen als Äquivalenzklasse von Monomorphismen. Wir haben aber auch eine andere Beschreibung. Sei $\Omega = \{0, 1\}$. Für Mengen $S \subseteq X$ ist die *charakteristische Funktion* von S definiert durch

$$\chi_S\colon X \longrightarrow \Omega, \qquad x \longmapsto \begin{cases} 1, & x \in S, \\ 0, & x \notin S. \end{cases}$$

Aus dieser Funktion können wir die Teilmenge S wieder zurückgewinnen: Sie ist nämlich gerade das Urbild von $\{1\} \subseteq \Omega$ unter χ_S. Anders ausgedrückt: Wir haben ein Pullback

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, hook] & \{1\} \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r, "\chi_S"] & \Omega, \end{tikzcd}$$

und wir bekommen die Inklusion $S \hookrightarrow X$ als Pullback der Inklusion $\{1\} \hookrightarrow \Omega$ an der charakteristischen Funktion χ_S.

Man kann in dieser Situation die Elemente 0 und 1 von Ω als "'wahr"' und "'falsch"' interpretieren; $\{1\}$ ist das Terminalobjekt in der Kategorie der Mengen und der Monomorphismus $\{1\} \hookrightarrow \Omega$ bildet das eine Element im Terminalobjekt auf "'wahr"' ab. Diese Situation kann man nun auf allgemeinere Kategorien übertragen.

Definition 5: Es sei $\mathcal{C}$ eine endlich vollständige Kategorie. Ein *Unterobjektklassifikator* ist ein Monomorphismus

$$\mathsf{true}\colon 1 \hookrightarrow \Omega$$

vom Terminalobjekt in ein Objekt Ω, sodass es für alle Monomorphismen $S \hookrightarrow X$ in $\mathcal{C}$ genau einen Pfeil $\chi\colon X \longrightarrow \Omega$ gibt, durch den

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, hook] & 1 \arrow[d, hook, "\mathsf{true}"] \\ X \arrow[r, dashed, "\chi"] & \Omega, \end{tikzcd}$$

ein Pullback ist. Das Objekt Ω sind die *Wahrheitswerte* in C, χ heißt *charakteristische Funktion* von S.

Beispiele für Unterobjektklassifikatoren sind im letzten Abschnitt zu finden. Der folgende Satz sagt uns, wann ein Unterobjektklassifikator existiert.

Satz 6: *Es sei C eine endlich vollständige, well-powered Kategorie. Dann hat C genau dann einen Unterobjektklassifikator, wenn der Unterobjektfunktor darstellbar ist. Das darstellende Objekt ist in diesem Fall das Wahrheitswerte-Objekt Ω, wir haben also eine natürliche Äquivalenz*

$$\theta\colon \operatorname{Sub}_C(-) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_C(-,\Omega).$$

Beweis: Sei zunächst ein Unterobjektklassifikator $\mathrm{true}\colon 1 \to \Omega$ gegeben. Dieser liefert uns nach Definition für jeden Monomorphismus $m\colon S \hookrightarrow X$ eine charakteristische Funktion $\chi_S \in \operatorname{Hom}_C(X,\Omega)$. Wir definieren θ durch $\theta_X(m) = \chi_S$ und erhalten so eine wohldefinierte Zuordnung $\operatorname{Sub}_C(X) \to \operatorname{Hom}_C(X,\Omega)$. Diese ist surjektiv, denn wenn wir eine charakteristische Funktion $X \to \Omega$ gegeben haben, bekommen wir durch Pullback an true ("'Urbild"') ein Unterobjekt von X. Wenn zwei Unterobjekte dieselbe charakteristische Funktion haben, so sind sie beide isomorph zum Pullback dieser Funktion an true, und dieser Isomorphismus kommutiert mit den Monomorphismen der Unterobjekte, sodass sie in der gleichen Äquivalenzklasse liegen, also die Unterobjekte gleich sind. Also ist die Abbildung auch injektiv. Es bleibt die Natürlichkeit von θ zu zeigen; darauf soll hier verzichtet werden.

Sei nun umgekehrt $\operatorname{Sub}_C(-)$ darstellbar durch Ω, also für jedes Objekt X eine Bijektion

$$\theta_X\colon\ \operatorname{Sub}_C(X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_C(X,\Omega)$$

gegeben, die natürlich in X ist. Setze

$$t_0 = \theta_\Omega^{-1}(\mathrm{id}_\Omega)\colon\ \Omega_0 \longrightarrow \Omega.$$

Sei $m\colon S \hookrightarrow X$ ein Monomorphismus. Wir bekommen dann einen Pfeil $\chi_S = \theta_X(m)\colon X \to \Omega$ als Kandidat für die charakteristische Funktion des zugehörigen Unterobjekts. Da θ_X natürlich ist, kommutiert

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Sub}_C(\Omega) \arrow[r, "\theta_\Omega"] \arrow[d, "\operatorname{Sub}_C(\chi_S)"] & \operatorname{Hom}_C(\Omega,\Omega) \arrow[d, "-\circ\chi_S"] \\ \operatorname{Sub}_C(X) \arrow[r, "\theta_X"] & \operatorname{Hom}_C(X,\Omega). \end{tikzcd}$$

Hier schauen wir uns links oben Ω_0 an, was wir via t_0 als Unterobjekt von Ω auffassen können. Wir gehen nach rechts: dann wird Ω_0 von θ_Ω auf id_Ω abgebildet. Gehen wir weiter nach unten: aus id_Ω erhalten wir χ_S. Nun gehen wir nach links: dann liefert uns θ_X^{-1} unser ursprüngliches Unterobjekt m (bzw. S) zurück. Wegen der Kommutativität des Diagramms gilt also $m = \mathrm{Sub}_C(\chi_S)(\Omega_0)$. Nach Definition des Funktors $\mathrm{Sub}_C(-)$ auf den Morphismen ist also m das Pullback von t_0 an χ_S:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, hook, "m"] & \Omega_0 \arrow[d, hook, "t_0"] \\ X \arrow[r, "\chi_S"] & \Omega. \end{tikzcd}$$

Das obige Diagramm wird also bei gegebenem $m\colon S \hookrightarrow X$ durch χ_S zu einem Pullback, und da θ_X eine Bijektion ist, ist χ_S auch eindeutig bestimmt. Wenn wir noch zeigen, dass Ω_0 ein terminales Objekt in C ist, erfüllt t_0 die Defintion eines Unterobjektklassifikators, und χ_S ist tatsächlich die gesuchte charakteristische Funktion.

Dazu wählen wir $S = X$ und $m = \mathrm{id}_X$ und betrachten zwei Pfeile $\phi_1, \phi_2\colon X \to \Omega_0$. Unser Pullback-Diagramm wird dann zu

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, no head, "\mathrm{id}_X"] & \Omega_0 \arrow[d, hook, "t_0"] \\ X \arrow[r, "t_0 \circ \phi_i"] & \Omega \end{tikzcd}$$

(für $i = 1, 2$). Der untere Pfeil ist allerdings eindeutig bestimmt, denn er ist in beiden Fällen gleich $\theta_X(\mathrm{id}_X)$. Wir erhalten also $t_0 \circ \phi_1 = t_0 \circ \phi_2$, und da t_0 ein Monomorphismus ist, folgt $\phi_1 = \phi_2$. Also ist Ω_0 terminal, und das beendet den Beweis. □

Bemerkung 7: Wir sehen, dass die Wahrheitswerte Ω bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind, wenn sie existieren: denn Ω ist darstellendes Objekt für einen Funktor.

Exponentiale

Wieder schauen wir uns zunächst die Situation in der Kategorie der Mengen an. Für zwei Mengen X, Y bilden alle Abbildungen $X \longrightarrow Y$ wieder eine Menge, also ein Objekt der Kategorie, nämlich $\mathrm{Hom}_{Set}(X, Y)$. Dieses wird üblicherweise als Y^X bezeichnet. Wie können wir das für allgemeinere Kategorien nachbauen?

Nehmen wir uns eine weitere Menge Z her. Es gibt dann eine Bijektion

$$\begin{array}{rlcl} \theta: & \mathrm{Hom}(Z \times X, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Z, Y^X) \\ & f & \longmapsto & [z \longmapsto [x \longmapsto f(z,x)]] \\ & [(z,x) \longmapsto (g(z))(x)] & \longleftarrow\!\!\mid & g. \end{array} \qquad (*)$$

Hierdurch ist das Objekt Y^X bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt: denn wenn wir $Z = 1$ setzen, bekommen wir

$$Y^X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(1, Y^X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(1 \times X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X, Y).$$

Die Bijektion θ ist ferner natürlich in X, Y und Z. Also bedeutet das nichts anderes als: $(-)^X$ ist rechtsadjungiert zu $- \times X\colon \mathcal{Set} \longrightarrow \mathcal{Set}$. Das können wir als Definition benutzen.

Definition 8: Es sei $\mathcal{C}$ eine endlich vollständige Kategorie und X ein Objekt darin. Wenn der Funktor

$$- \times X\colon \quad \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C},\ Y \longmapsto X \times Y$$

einen rechtsadjungierten Funktor hat, so sagen wir, es gibt in $\mathcal{C}$ *Exponentiale* für X. Wir schreiben den rechtsadjungierten Funktor

$$(-)^X\colon \quad \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C},\ Z \longmapsto Z^X.$$

Wenn dies für alle Objekte X in $\mathcal{C}$ funktioniert, sagen wir, dass es in $\mathcal{C}$ *Exponentiale* schlechthin gibt.

Wenn eine Kategorie ein Terminalobjekt, endliche Produkte und Exponentiale hat, dann heißt sie *kartesisch abgeschlossen.*

Wir setzen nun in $(*)$ $Z = Y^X$. Sei $e = \theta^{-1}(\mathrm{id}_{Y^X})$ das der Identität zugeordnete Element. e heißt *Auswertung*. In $\mathcal{Set}$ ist das die Abbildung

$$e\colon \quad Y^X \times X \longrightarrow Y,\ (f, x) \longmapsto f(x).$$

Dies ist gerade die Koeinheit der Adjunktion $(*)$ an der Stelle Y.

Der folgende Satz liefert uns eine große Klasse von Beispielen für Kategorien, in denen es Exponentiale gibt.

Satz 9: *Es sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie. Dann ist die Funktorkategorie $\mathcal{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{Set})$ kartesisch abgeschlossen.*

Beweisskizze: Es seien $P, Q\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{Set}$ zwei Funktoren. Wir schreiben zur besseren Unterscheidung $\mathrm{Nat}(P, Q)$ für die Morphismenmengen in der Funktorkategorie (also die natürlichen Transformationen), während wir die Morphismen in $\mathcal{C}$ zwischen A und B weiterhin als $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ bezeichnen.

Zuerst zeigen wir, dass es in $\mathcal{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{Set})$ endliche Produkte gibt. Wir können das Produkt von P und Q einfach komponentenweise definieren: $(P \times Q)(X) = P(X) \times Q(X)$. Die universelle Eigenschaft des Produkts in $\mathcal{C}$ überträgt sich dann direkt auf die Funktoren, darauf soll hier nicht genauer eingegangen werden.

Nun zeigen wir die Existenz von Exponentialen. Wir nehmen zunächst einmal an, dass wir bereits ein Exponential Q^P haben. Das heißt also, für jeden weiteren Funktor $R\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{Set}$ gilt $\mathrm{Nat}(R \times P, Q) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Nat}(R, Q^P)$. Wenn nun speziell R ein darstellbarer Funktor ist, also $R \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)$ für ein Objekt C aus $\mathcal{C}$ gilt, bekommen wir mit dem Yoneda-Lemma

$$Q^P(C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C), Q^P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C) \times P, Q).$$

Dies nehmen wir zum Anlass, Q^P durch

$$Q^P\colon\ \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{Set}, \quad Q^P(C) = \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C) \times P, Q) \qquad \square$$

zu definieren. Nun bleibt nachzuweisen, dass dieser Funktor die Eigenschaften eines Exponentials erfüllt; darauf soll hier verzichtet werden. Der vollständige Beweis findet sich in [MM92, S. 46/47].

Definition und Eigenschaften von Topoi

Nun können wir endlich definieren, was ein Topos sein soll.

Definition 10: Eine Kategorie C ist ein *Elementartopos*, wenn sie endlich vollständig ist, sie einen Unterobjektklassifikator besitzt und in ihr alle Exponentiale existieren.

Wenn Topoi einen Ersatz für die Mengenlehre liefern sollen, muss es möglich sein, sie zu definieren, ohne auf die Mengenlehre zurückzugreifen. In diesem Fall bedeutet das, dass wir nicht von Mengen wie $\mathrm{Hom}_C(X, Y)$ oder $\mathrm{Sub}_C(X)$ sprechen dürfen, und der Begriff der Bijektion steht auch nicht zur Verfügung. Wir haben aber die folgende äquivalente Definition:

Definition 11: Ein *Elementartopos* ist eine Kategorie C mit

- einem Terminalobjekt 1
- Pullback für alle Diagramme $X \longrightarrow A \longleftarrow Y$
- einem Objekt Ω und einem Monomorphismus $\mathrm{true}\colon 1 \hookrightarrow \Omega$, sodass für jeden Monomorphismus $m\colon S \hookrightarrow X$ genau ein Pfeil $\chi\colon X \longrightarrow \Omega$ existiert, durch den das folgende Diagramm ein Pullback wird:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, hook, "m"] & 1 \arrow[d, hook, "\mathrm{true}"] \\ X \arrow[r, dashed, "\chi"] & \Omega \end{tikzcd}$$

- zu je zwei Objekten X, Y einem Objekt Y^X und einem Pfeil $e\colon Y^X \times X \longrightarrow Y$, sodass es für jedes weitere Objekt Z und jeden Pfeil $h\colon Z \times X \longrightarrow Y$ genau einen Pfeil $f\colon Z \longrightarrow Y^X$ gibt, mit dem das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} Z \times X \arrow[d, "f \times \mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "h"] & \\ Y^X \times X \arrow[r, "e"] & Y. \end{tikzcd}$$

Die beiden ersten Punkte stellen sicher, dass die Kategorie endlich vollständig ist. Der dritte Punkt ist gerade die Definition eines Unterobjektklassifikators – wie wir sehen, kommt sie ohne Mengen aus. Schließlich muss noch die Adjunktion $(*)$ gefordert werden: Dazu wurde die Bijektion der Morphismenmengen ersetzt durch die Existenz der Koeinheit, also der Auswertung e, und ihrer universellen Eigenschaft; dies ist der letzte Punkt.

Wir wollen nun noch einige Eigenschaften von Topoi genauer untersuchen, wobei wir wieder die Analogie zu der Kategorie der Mengen betonen. Wenn wir Mengen betrachten, spielen natürlich ihre Elemente eine wichtige Rolle. In $\mathcal{Set}$ ist ein Element einer Menge M im Prinzip nichts anderes als eine Abbildung $1 \longrightarrow M$, und dies können wir etwas allgemeiner auch in den Elementartopoi definieren. Außerdem haben wir in $\mathcal{Set}$ für jede Menge M die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$, die alle Teilmengen enthält. Für solche Teilmengen haben wir jeweils eine charakteristische Funktion $M \longrightarrow \Omega$, und umgekehrt definiert jede Funktion $M \longrightarrow \Omega$ eine Teilmenge von M, nämlich das Urbild von "'wahr"'. Wir können uns die Potenzmenge also vorstellen als Menge aller Abbildungen von M nach Ω, und das nehmen wir auch als Definition des Potenzobjektes in unseren Topoi.

Definition 12: Es sei C ein Topos und X ein Objekt darin.

- Ein *verallgemeinertes Element* von X (über A) ist ein Morphismus $A \longrightarrow X$. Wenn $A = 1$ ist, sprechen wir von einem *globalen Element* von X.
- Das *Potenzobjekt* von X ist definiert als das Exponential $\mathcal{P}(X) = \Omega^X$.
- Ein *Prädikat* auf X ist ein Morphismus $X \longrightarrow \Omega$.

Wenn wir zwei verallgemeinerte Elemente $x\colon A \longrightarrow X$ und $y\colon A \longrightarrow Y$ über A von zwei Objekten X und Y haben, können wir das geordnete Tupel (x, y) definieren: wir betrachten das Produkt $X \times Y$

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "x"'] \arrow[d, dashed, "{(x,y)}"] \arrow[dr, "y"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "\pi_X"] \arrow[r, "\pi_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

und sehen, dass seine universelle Eigenschaft uns (x, y) als verallgemeinertes Element des Produktes $X \times Y$ über A liefert. Analog können wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ geordnete n-Tupel definieren.

Ein Prädikat auf einem Objekt X können wir uns vorstellen als eine Eigenschaft, die ein (verallgemeinertes) Element von X haben kann oder nicht. In $\mathcal{Set}$ ist ein Prädikat ja gerade eine Abbildung, die den Elementen entweder "'wahr"' oder "'falsch"' zuordnet. Für jedes Objekt X bekommen wir ein ausgezeichnetes Prädikat $\mathrm{true}_X : X \longrightarrow \Omega$ durch die Komposition

$$X \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{\mathrm{true}} \Omega.$$

Wir sagen dann, dass ein verallgemeinertes Element $x\colon A \longrightarrow X$ die Eigenschaft $p\colon X \longrightarrow \Omega$ hat, wenn $p \circ x = \mathrm{true}_A$. Die Eindeutigkeit der charakteristischen Funktion in der Definition des Unterobjektklassifikators zeigt, dass zwei Prädikate auf X genau dann übereinstimmen, wenn sie für dieselben (verallgemeinerten) Elemente von X wahr sind.

Als Beispiel betrachten wir ein Unterobjekt $m\colon S \hookrightarrow X$ unseres Objektes X und ein verallgemeinertes Element $x\colon A \longrightarrow X$ von X. Wann ”‘ist”’ x auch ein Element von S? Wir bekommen in dieser Situation ein Pullback-Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, bend left, "!"] \arrow[dr, dashed, "?"] \arrow[ddr, bend right, "x"'] & & \\
& S \arrow[r, "!"] \arrow[d, hook, "m"] & 1 \arrow[d, hook, "\text{true}"] \\
& X \arrow[r, "\chi_S"] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

Dass wir durch x auch ein verallgemeinertes Element von S bekommen, bedeutet nun nichts anderes, als dass x über S faktorisiert, also der Pfeil mit dem Fragezeichen existiert, und dass passiert wegen der universellen Eigenschaft des Faserprodukts genau dann, wenn

$$\chi_S \circ x = \text{true}_A.$$

Für Unterobjekte unseres Objekts X haben wir nun verschiedene Beschreibungsmöglichkeiten: Wegen $X \xrightarrow{\sim} X \times 1$ haben wir Isomorphismen

$$\text{Sub}_C(X) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_C(X, \Omega) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_C(X \times 1, \Omega) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_C(1, \Omega^X) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_C(1, \mathcal{P}(X)).$$

Wir können ein Unterobjekt also wahlweise als (Äquivalenzklasse eines) Monomorphismus $m\colon S \hookrightarrow X$ oder als charakteristische Funktion $\chi_S\colon X \longrightarrow \Omega$ oder auch als globales Element $s\colon 1 \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ des Potenzobjektes auffassen. Man sagt dann, s ist der *Name* von m (oder S).

Wir definieren nun für ein beliebiges Objekt X unseres Topos' ein weiteres Prädikat, das *Element-Prädikat* $\in_X$. Dazu betrachten wir erneut die Adjunktion $(*)$

$$\text{Hom}(Z \times X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(Z, Y^X)$$

und setzen $Y = \Omega$ und $Z = \mathcal{P}(X)$, damit erhalten wir

$$\text{Hom}(\mathcal{P}(X) \times X, \Omega) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(X)).$$

Wir definieren dann $\in_X$ als den Morphismus auf der linken Seite, der zu $\text{id}_{\mathcal{P}(X)}$ gehört – das ist einfach die Koeinheit der oberen Adjunktion in einer etwas spezielleren Situation. Was sagt uns nun ihre universelle Eigenschaft? Aus dem letzten Punkt in Definition 11 bekommen wir: für jeden Pfeil $f\colon B \times X \longrightarrow \Omega$ in C gibt es genau ein $g\colon B \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, sodass

$$\begin{tikzcd}
B \times X \arrow[d, "g \times \text{id}_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathcal{P}(X) \times X \arrow[r, "\in_X"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Wir wollen nun ein Unterobjekt von X betrachten, es sei durch seine charakteristische Funktion $\chi\colon X \longrightarrow \Omega$ gegeben. Mit $B = 1$ und $f = \chi$ bekommen wir dann genau ein $s\colon 1 \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, sodass

$$\begin{tikzcd}
1 \times X \arrow[d, "s \times \mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "\chi"] & \\
\mathcal{P}(X) \times X \arrow[r, "\in_X"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Wir nehmen uns nun ein verallgemeinertes Element $x\colon A \longrightarrow X$ von X über A her und bauen es in unser Diagramm so ein:

$$\begin{tikzcd}
1 \times X \arrow[d, "s \times \mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "\chi"] & 1 \times A \arrow[l, "\mathrm{id}_1 \times x"'] \arrow[d, "\mathrm{true}_{1\times A}"] \\
\mathcal{P}(X) \times X \arrow[r, "\in_X"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

Daran können wir ablesen, dass $\in_X \circ\, s \times x = \mathrm{true}_{1\times A}$ genau dann gilt, wenn $\chi \circ x = \mathrm{true}_A$, also wenn x in dem Unterobjekt mit charakteristischer Funktion χ und Namen s liegt. Das rechtfertigt den Namen "‘Element-Prädikat"’.

Schließlich wollen wir noch das Prädikat der *Gleichheit auf* X für ein Objekt X unseres Topos' definieren; dieses ist ein Prädikat auf dem Produkt $X \times X$. Dazu betrachten wir die Diagonale $\Delta_X : X \longrightarrow X \times X$. Das ist ein Monomorphismus (das zeigt die universelle Eigenschaft des Produkts), und wir können die zugehörige charakteristische Funktion δ_X betrachten:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "!"] \arrow[d, hook, "\Delta_X"] & 1 \arrow[d, hook, "\mathrm{true}"] \\
X \times X \arrow[r, dashed, "\delta_X"] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

Wir nehmen uns nun zwei verallgemeinerte Elemente $x, y\colon A \longrightarrow X$. Das Tupel (x, y) ist dann ein verallgemeinertes Element von $X \times X$, das wir in unser Diagramm einzeichnen können:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, bend left, "!"] \arrow[dr, dashed, "?"] \arrow[ddr, bend right, "{(x,y)}"'] & & \\
& X \arrow[r, "!"] \arrow[d, hook, "\Delta_X"] & 1 \arrow[d, hook, "\mathrm{true}"] \\
& X \times X \arrow[r, "\delta_X"] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

Die Pullback-Eigenschaft sagt dann: es gilt $\delta_X \circ (x, y) = \mathrm{true}_A$ genau dann, wenn der Pfeil mit dem Fragezeichen existiert. Die definierenden Diagramme für Δ_X und (x, y) können wir kombinieren in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] \arrow[d, dashed, "{(x,y)}"] & \\
X & X \times X \arrow[l] \arrow[r] & X \\
& X \arrow[ul, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] \arrow[u, dashed, "\Delta_X"'] &
\end{tikzcd}$$

in dem die gestrichelten Pfeile jeweils eindeutig sind. Hier sehen wir: Wenn der Pfeil mit Fragezeichen existiert, muss er also sowohl gleich x als auch gleich y sein, also muss $x = y$ gelten; umgekehrt existiert der Pfeil offensichtlich, wenn $x = y$ ist. Wir haben also

$$\delta_X \circ (x, y) = \mathrm{true}_A \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y,$$

und δ_X ist so etwas wie ein Kronecker-Delta für X.

Die Bijektion $\mathrm{Hom}(X \times X, \Omega) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X, \mathcal{P}(X))$ liefert uns einen zu δ_X gehörenden Pfeil

$$\{\cdot\}_X : X \longrightarrow \mathcal{P}(X).$$

Diesen nennen wir den *Singleton-Pfeil* für X. Die universelle Eigenschaft von $\in_X$ sagt $\in_X \circ (\{\cdot\}_X \times \mathrm{id}_X) = \delta_X$. Wenn wir auf beiden Seiten zuerst (x, y) ausführen, bekommen wir

$$\in_X \circ (\{\cdot\}_X \circ x, y) = \delta_X \circ (x, y),$$

also gilt $\in_X \circ (\{\cdot\}_X \circ x, y) = \mathrm{true}_A$ genau dann, wenn $x = y$. Also ist $\{\cdot\}_X \circ x$ ein Unterobjekt von X, dessen einziges Element (verallgemeinert, über A) x ist.

Viele Aussagen, die uns von den Mengen her vertraut sind, gelten auch in Elementartopoi. Zum Abschluss haben wir noch einen netten Satz über unsere Topoi, der ein Beispiel für eine solche Aussage ist.

Satz 13: *In einem Topos ist ein Pfeil, der ein Monomorphismus und ein Epimorphismus ist, bereits ein Isomorphismus.*

Beweis: Sei $m \colon S \hookrightarrow X$ ein Monomorphismus. Wir betrachten das zugehörige Pullback-Diagramm mit dem Unterobjektklassifikator:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "!_S"] \arrow[d, hook, "m"] & 1 \arrow[d, hook, "\mathrm{true}"] \\
X \arrow[r, "\chi"] \arrow[ur, dashed, "!_X"] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

Vorsicht: dieses Diagramm kommutiert nur ohne den gestrichelten Pfeil! Da 1 terminal ist, gilt aber $!_X \circ m = !_S$ und damit $\mathrm{true}_X \circ m = \mathrm{true} \circ !_X \circ m = \mathrm{true} \circ !_S = \chi \circ m$ (die letzte Gleichheit gilt, da das Viereck kommutiert). Die universelle Eigenschaft des Faserprodukts sagt in dieser Situation gerade, dass m der Equalizer von true_X und χ ist. Wenn nun m auch ein Epimorphismus ist, folgt $\mathrm{true}_X = \chi$, und m ist der Equalizer zweier gleicher Pfeile. Dann muss er aber ein Isomorphismus sein, denn auch X mit dem Pfeil id_X ist ein Equalizer. □

Beispiele für Topoi

Zum Abschluss soll eine kleine Liste von Kategorien aufgeführt werden, die alle Elementartopoi sind. Weitere Beispiele finden sich in [MM92], Kap. I §1.

(a) $\mathcal{S}et$: die Kategorie der Mengen

(b) $\mathcal{S}et^n$ für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$: das seien alle n-Tupel von Mengen als Objekte und n-Tupel von Abbildungen als Morphismen zwischen diesen

(c) M-$\mathcal{S}et$ für ein festes Monoid M: die Objekte hier seien Mengen mit einer Operation von M und die Morphismen Abbildungen zwischen diesen, die mit der Aktion verträglich sind; das soll heißen, dass für $f\colon A \longrightarrow B$, alle $a \in A$ und $m \in M$ gilt $f(m \cdot a) = m \cdot f(a)$

(d) $\mathcal{S}et^{\mathbb{N}}$: die Objekte hier sind Folgen

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \cdots$$

von Mengen mit Abbildungen zwischen diesen und die Morphismen zwischen zwei solchen Folgen $(X_n, f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n, g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind Familien von Abbildungen $(\phi_n\colon X_n \longrightarrow Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\phi_1"] & X_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\phi_2"] & X_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\phi_3"] & \cdots \\
Y_1 \arrow[r, "g_1"] & Y_2 \arrow[r, "g_2"] & Y_3 \arrow[r, "g_3"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

(e) $\mathcal{F}in\mathcal{S}et$: die Kategorie der endlichen Mengen

Wir wollen uns überlegen, warum hier jeweils ein Elementartopos vorliegt. Es ist klar, dass die letzte Kategorie ein Topos ist, wenn die erste einer ist, also lassen wir diese bei unseren Überlegungen außen vor. Für die übrigen Kategorien stellen wir fest, dass sie Spezialfälle einer Funktorkategorie $\mathcal{F}unc(C^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}et)$ für die folgenden Wahlen von C sind:

(a) Kategorie mit nur einem Objekt und einem Pfeil, der Identität

(b) Kategorie mit genau n Objekten und nur den jeweiligen Identitäten als Pfeilen

(c) Kategorie mit nur einem Objekt und einem Pfeil für jedes Monoidelement; die Komposition der Pfeile sei durch die Verknüpfung im Monoid gegeben

(d) Die geordnete Menge $(\mathbb{N}, \geq)$ als Ordnungskategorie

Wie wir bereits gesehen haben, gibt es in $\mathcal{Set}$ beliebige Faserprodukte. Dies können wir auf eine beliebige Funktorkategorie $\mathcal{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{Set})$ übertragen, indem wir das Faserprodukt zweier Funktoren "'punktweise"' definieren: für Funktoren F, G, Z von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ nach $\mathcal{Set}$ und natürliche Transformationen $\alpha\colon F \longrightarrow Z$, $\beta\colon G \longrightarrow Z$ definieren wir das Faserprodukt P als den Funktor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{Set}$, der ein Objekt C auf das Faserprodukt der Pfeile $\alpha_C : F(C) \longrightarrow Z(C)$ und $\beta_C : G(C) \longrightarrow Z(C)$ in $\mathcal{Set}$ abbildet.

Wir haben jeweils die folgenden Terminalobjekte in unseren Kategorien:

(a) Eine einpunktige Menge $\{*\}$

(b) Das n-Tupel von einpunktigen Mengen $(\{*\}, \ldots, \{*\})$

(c) Die einpunktige Menge $\{*\}$ mit der einzig möglichen Operation von M darauf

(d) Die Folge $\{*\} \longrightarrow \{*\} \longrightarrow \{*\} \longrightarrow \cdots$ mit den einzig möglichen Abbildungen dazwischen

Unsere Kategorien sind also alle endlich vollständig. Die Existenz von Exponentialen sichert uns Satz 9. Interessant wird es noch einmal bei den Unterobjektklassifikatoren. Hier haben wir:

(a) In $\mathcal{Set}$ gibt es zwei mögliche Wahrheitswerte 0 und 1 und man kann

$$\mathrm{true}\colon * \longrightarrow \Omega = \{0, 1\},\ * \longmapsto 1$$

wählen.

(b) In $\mathcal{Set}^n$ haben wir 2^n mögliche Wahrheitswerte: $\Omega = (\{0,1\}, \ldots, \{0,1\})$ und

$$\mathrm{true}\colon 1 \longrightarrow \Omega,\ (*, \ldots, *) \longmapsto (1, \ldots, 1)$$

(c) Ein Unterobjekt von einem Objekt X in M-$\mathcal{Set}$ ist eine Teilmenge $S \subseteq X$, die unter der Operation abgeschlossen ist: für alle $m \in M$, $s \in S$ muss $m \cdot s \in S$ gelten. Da M aber nur ein Monoid ist, muss das Komplement $X \setminus S$ nicht unbedingt auch abgeschlossen unter der Operation sein, also brauchen wir mehr als zwei Wahrheitswerte. Wir können eine Funktion χ_S definieren durch $\chi_S(x) = \{l \in M \mid l \cdot x \in S\}$ für $x \in X$. Die Menge $L = \chi_S(x)$ ist ein *Linksideal* von M, das heißt eine Teilmenge, die $M \cdot L \subseteq L$ erfüllt. Wir definieren nun Ω als die Menge aller Linksideale von M mit der Operation $m \cdot L = \{k \in M \mid k \cdot m \in L\}$ für $m \in M$ und $L \in \Omega$. Damit ist χ_S eine Abbildung von X nach Ω, und S ist das Urbild des Linksideals M. Wenn wir nun also

$$\mathrm{true}\colon \{*\} \longrightarrow \Omega,\ * \longmapsto M$$

definieren, haben wir einen Unterobjektklassifikator gefunden.

(d) In $\mathcal{S}et^{\mathbb{N}}$ ist ein Unterobjekt von (X_n, f_n) eine Folge (S_n, g_n) von Teilmengen $S_n \subseteq X_n$ und Abbildungen $g_n = f_n|_{S_n}$ (jeweils für $n \in \mathbb{N}$). Wir setzen hier $\Omega = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \tau)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei τ durch $\tau(1) = 1$, $\tau(n) = n - 1$ für $n > 1$ und $\tau(\infty) = \infty$ definiert sein soll. Für unser Unterobjekt definieren wir

$$\chi_k : X_k \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\},\ x \longmapsto \min\{n \in \mathbb{N} \mid f_{k+n-1}(f_{k+n-2}(\dots f_k(x)\dots)) \in S_{k+n-1}\}$$

und bekommen so einen Morphismus $\chi\colon (X_n, f_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \Omega$ (hierbei soll $\min\varnothing = \infty$ gelten). Man kann sich überlegen, dass dies einen Unterobjektklassifikator für $\mathcal{S}et^{\mathbb{N}}$ definiert.

Literatur

[MM92] Saunders MacLane und Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic. A First Introduction to Topos Theory.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1992.