Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2019

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Michael Fütterer
Milan Malčić

Algebraische Geometrie

11. Übungsblatt

01.07.2019

Aufgabe 1 (*6 Punkte*). Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Bestimme für die folgenden abgeschlossenen Unterschemata von $\mathbb{A}_k^2$ jeweils alle abgeschlossenen singulären Punkte:

(a) $V(Y^2 - X^2 - X^3)$;

(b) $V(Y^2 - X^3)$;

(c) $V(Y^2 - X^4)$.

Aufgabe 2 (*4 Punkte*). Sei $f: X \longrightarrow Y$ ein Schemamorphismus. Zeige, dass die alternative Konstruktion von $\Omega^1_{X/Y}$ als $\Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ die gleiche Garbe liefert wie die Konstruktion als Verklebung der quasikohärenten Garben zu Differentialmoduln wie in der Vorlesung.
(Hierbei ist $\Delta: X \longrightarrow X \times_Y X$ die Diagonale, welche lokal eine abgeschlossene Immersion ist, und $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_{X\times_Y X}$ die zugehörige Idealgarbe.)

Aufgabe 3 (*3 Punkte*). Sei S ein Schema und $f: X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von S-Schemata. Konstruiere für jedes $p \geq 0$ einen kanonischen Homomorphismus

$$\mathrm{H}^p(Y, \Omega^1_{Y/S}) \longrightarrow \mathrm{H}^p(X, \Omega^1_{X/S}).$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*). Sei A ein eindimensionaler noetherscher Integritätsbereich und $\tilde{A}$ sein ganzer Abschluss. Wir nehmen an, dass $\tilde{A}$ als A-Modul endlich erzeugt ist.
Der *Führer von A* ist das Ideal

$$\mathfrak{f} = \{a \in \tilde{A} : a\tilde{A} \subseteq A\}.$$

Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ ein abgeschlossener Punkt. Zeige:

$$\operatorname{Spec} A \text{ ist regulär an } \mathfrak{p} \iff \mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{f}).$$

Hinweis: Benutze dafür die Charakterisierung von eindimensionalen regulären Ringen aus der Vorlesung. Außerdem darf benutzt werden, dass die Lokalisierung eines Dedekindrings an einem maximalen Ideal ein diskreter Bewertungsring ist.

Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 8. Juli, 11 Uhr
in die Zettelkästen Nr. 57/58 vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock)
Besprechung in den Übungen am 10. und 12. Juli