Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2019

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Michael Fütterer
Milan Malčić

Algebraische Geometrie

9. Übungsblatt

17.06.2019

Aufgabe 1 (*4 Punkte*). Sei K ein Körper.

(a) Sei L/K eine Körpererweiterung. Wann ist $\operatorname{Spec} L \longrightarrow \operatorname{Spec} K$ glatt?

(b) Bestimme alle Schemata, die glatt von relativer Dimension 0 über K sind.

Aufgabe 2 (*6 Punkte*). In dieser Aufgabe sollen einige Behauptungen des Beispiels 8 der Vorlesung verifiziert werden. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper von Charakteristik ungleich 2 und sei $Q = V_+(X_0^2 + \ldots + X_{r-1}^2) \subseteq \mathbb{P}_k^n$ mit $1 < r \leq n+1$. Zeige:

(a) Für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in Q$ gilt $n-1 \leq \dim T_x Q \leq n$.

(b) Es gibt einen abgeschlossenen Punkt mit $\dim T_x Q = n-1$.

(c) Sei $V = \{x \in Q \text{ abgeschlossener Punkt} \mid \dim T_x Q = n\}$. Falls $r = n+1$, so ist $V = \emptyset$. Sonst gibt es einen linearen Unterraum $L \subseteq \mathbb{P}_k^n$ der Dimension $n-r$, sodass $V = \{x \in L \mid x \text{ abgeschlossener Punkt}\}$.

Aufgabe 3 (*6 Punkte*). Sei $p \in k[X]$ ein normiertes Polynom von Grad $n \geq 3$ über einem Körper k der Charakteristik 0 und seien $r_1, \ldots, r_n$ die Nullstellen von p in einem algebraischen Abschluss von k (nicht notwendig verschieden, also mit Vielfachheit gezählt). Die *Diskriminante* von p ist definiert als

$$\operatorname{disc} p = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (r_i - r_j)^2.$$

Für ein solches Polynom betrachten wir die Verschwindungsmenge $V \subseteq \mathbb{P}_k^2$ der Homogenisierung von $Y^{n-1} - p \in k[X, Y]$. Zeige, dass V genau dann glatt über k von relativer Dimension 1 ist, wenn die Diskriminante von p nicht verschwindet.

Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 24. Juni, 11 Uhr
in die Zettelkästen Nr. 57/58 vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock)
Besprechung in den Übungen am 26. und 28. Juni