Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2019

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Michael Fütterer
Milan Malčić

Algebraische Geometrie

7. Übungsblatt

03.06.2019

Aufgabe 1 (*2+2+2=6 Punkte*). Die Konstruktion des Spektrums liefert einen volltreuen Funktor Spec von der Kategorie der kommutativen Ringe in die Kategorie der Schemata. Im Gegensatz dazu ist die Konstruktion Proj *nicht* funktoriell von der Kategorie der graduierten Ringe in die Kategorie der Schemata.

(a) Warum nicht?

(b) Welche Bedingung muss man an Morphismen graduierter Ringe stellen, damit Proj ein Funktor wird?

(c) Ist der resultierende Funktor volltreu?

Aufgabe 2 (*2+2+2=6 Punkte*). Sei B ein graduierter Ring und I ein homogenes Ideal. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $V_+(I) = \emptyset$.

(ii) Ist $\{f_j \mid j \in J\}$ ein Erzeugendensystem von I (wobei J eine Indexmenge ist und die $f_j \in I$ homogen sind), dann gilt $\bigcup_{j\in J} D_+(f_j) = \operatorname{Proj} B$.

(iii) $B_+ \subseteq \operatorname{rad}(I)$.

Aufgabe 3 (*2+3=5 Punkte*). Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata und Y lokal noethersch.

(a) Sei f quasiprojektiv. Wir setzen

$$r = \sup_{y\in Y} \dim X_y$$

(wobei X_y die Faser von f an y bezeichnet). Zeige, dass dann $\mathrm{R}^p f_*\mathcal{F} = 0$ für alle $p > r$ und alle quasikohärenten Garben $\mathcal{F}$ auf X gilt.

(b) Zeige, dass die Aussage aus (a) falsch ist, wenn f nicht quasi-projektiv ist.
Hinweis: Betrachte $f\colon \mathbb{A}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{A}^2$ und $p = 1$.

Aufgabe 4 (*2 Punkte*). Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ ein affiner Morphismus von Schemata. Zeige, dass dann f_* ein exakter Funktor auf quasikohärenten Moduln ist.
Anmerkung: In der Vorlesung wurde ohne Beweis erwähnt, dass direkte Bilder quasikohärenter Moduln wieder quasikohärent sind, wenn der Morphismus affin ist. Das soll hier nicht gezeigt werden!

Abgabe in Zweiergruppen bis Dienstag, 11. Juni, 11 Uhr
in die Zettelkästen Nr. 57/58 vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock)
Besprechung in den Übungen am 12. und 14. Juni