Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2019

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Michael Fütterer
Milan Malčić

Algebraische Geometrie

6. Übungsblatt

28.05.2019

Aufgabe 1 (*2+4=6 Punkte*). Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ ein Schemamorphismus und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul.

(a) Konstruiere für jedes $p \geq 0$ einen kanonischen Homomorphismus

$$\mathrm{H}^p(Y, f_*\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^p(X, \mathcal{F}).$$

(b) Sei X separiert und f affin.[1] Sei außerdem $\mathcal{F}$ nun quasikohärent. Zeige, dass dann der Homomorphismus aus (a) ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2 (*6 Punkte*). Sei X ein noethersches Schema. Zeige: X ist genau dann affin, wenn das assoziierte reduzierte Schema X_{red} affin ist.
Hinweis: Wenn $\mathcal{F}$ eine quasikohärente Garbe auf X ist und $\mathcal{N}$ für das Nilradikal von $\mathcal{O}_X$ steht, betrachte

$$\mathcal{F} \supseteq \mathcal{N}\mathcal{F} \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{N}^n\mathcal{F} \supseteq \cdots$$

und benutze Serres Kriterium. Überlege dir außerdem, dass Aufgabe 1 (b) auf die Abbildung $X_{\mathrm{red}} \longrightarrow X$ angewendet werden kann.

Aufgabe 3 (*2+2=4 Punkte*). Ein *Doppelkomplex* C^{**} ist eine Familie $(C^{pq})_{p,q\in\mathbb{Z}}$ von Objekten einer abelschen Kategorie zusammen mit Morphismen

$$d_{\mathrm{h}}^{pq}\colon C^{pq} \longrightarrow C^{p+1,q}, \quad d_{\mathrm{v}}^{pq}\colon C^{pq} \longrightarrow C^{p,q+1},$$

sodass $(C^{p*}, d_{\mathrm{v}}^{p*})$ und $(C^{*q}, d_{\mathrm{h}}^{*q})$ Kokettenkomplexe sind und außerdem die Relation

$$d_{\mathrm{v}}^{p+1,q} \circ d_{\mathrm{h}}^{pq} + d_{\mathrm{h}}^{p,q+1} \circ d_{\mathrm{v}}^{pq} = 0$$

gilt (jeweils für alle p und q).
Wir nehmen stets an, dass $C^{pq} = 0$, falls $p < 0$ oder $q < 0$ (man sagt dann, dass der Doppelkomplex im ersten Quadranten lebt).

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \\
C^{02} \arrow[r] \arrow[u] & C^{12} \arrow[r] \arrow[u] & C^{22} \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
C^{01} \arrow[r] \arrow[u] & C^{11} \arrow[r] \arrow[u] & C^{21} \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
C^{00} \arrow[r] \arrow[u] & C^{10} \arrow[r] \arrow[u] & C^{20} \arrow[r] \arrow[u] & \dots
\end{tikzcd}$$

[1] Das bedeutet: Y hat eine offene affine Überdeckung $Y = \bigcup_i U_i$, sodass die Urbilder $f^{-1}(U_i)$ für alle i affin sind.

(a) Wir definieren den Totalkomplex $\mathrm{Tot}^*(C^{**}) = (\mathrm{Tot}^n(C^{**}))_n$ als

$$\mathrm{Tot}^n(C^{**}) = \bigoplus_{p+q=n} C^{pq} \quad \text{für } n \geq 0$$

mit Differential $d = d_\mathrm{v} + d_\mathrm{h}$. Zeige, dass dies ein Kokettenkomplex ist.

(b) Für alle $n, r \geq 0$ setzen wir nun

$$F^r\,\mathrm{Tot}^n(C^{**}) = \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ p \geq r}} C^{pq}.$$

Zeige, dass dann $F^r\,\mathrm{Tot}^*(C^{**}) = (F^r\,\mathrm{Tot}^n(C^{**}))_n$ für jedes r ein Unterkomplex von $\mathrm{Tot}^*(C^{**})$ ist und dass

$$\left(F^r\,\mathrm{Tot}^*(C^{**}) \middle/ F^{r+1}\,\mathrm{Tot}^*(C^{**}) \right) = C^{r,*-r}$$

gilt.

Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 3. Juni, 11 Uhr
in die Zettelkästen Nr. 57/58 vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock)
Besprechung in den Übungen am 5. und 7. Juni