Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2019

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Michael Fütterer
Milan Malčić

Algebraische Geometrie

4. Übungsblatt

13.05.2019

Aufgabe 1 (*4 Punkte*). Sei X ein Schema und $\mathcal{F}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul von endlichem Typ. Sei $x \in X$ und $U \subseteq X$ eine offene Umgebung von x. Zeige: Sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{F}(U)$ so, dass ihre Bilder in $\mathcal{F}(x)$ ein Erzeugendensystem bilden, dann gibt es eine affine offene Umgebung $V \subseteq U$ von x, sodass gilt:
(1) $a_1|_V, \ldots, a_n|_V$ erzeugen $\mathcal{F}(V)$ als $\mathcal{O}_X(V)$-Modul, und
(2) für alle $y \in V$ sind die Bilder von $a_1, \ldots, a_n$ in $\mathcal{F}(y)$ ein Erzeugendensystem.
Zur Erinnerung: $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)$.

Aufgabe 2 (*1+2+2=5 Punkte*). Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum und $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ seien $\mathcal{O}_X$-Moduln von endlichem Typ. Zeige:
(a) $\operatorname{supp} \mathcal{F} = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \neq 0\}$;
(b) $\operatorname{supp}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) = \operatorname{supp} \mathcal{F} \cap \operatorname{supp} \mathcal{G}$;
(c) Ist $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ ein Morphismus lokal geringter Räume, so ist

$$\operatorname{supp} f^*\mathcal{F} = f^{-1}(\operatorname{supp} \mathcal{F}).$$

Hinweis: Hier kann die Aussage aus Aufgabe 1 benutzt werden.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*). Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Zeige: Sind zwei der drei Moduln in der Sequenz kohärent, so auch der dritte.

Aufgabe 4 (*3 Punkte*). Sei k ein Körper. Wir betrachten k als $k[T]$-Modul via $k[T] \longrightarrow k$, $T \longmapsto 0$. Sei $X = \mathbb{A}^1_k$ und $\mathcal{F}$ die kohärente Garbe, die zu dem Modul k korrespondiert. Bestimme den Rang von $\mathcal{F}$ an jedem Punkt von X.

Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 20. Mai, 11 Uhr
Besprechung in den Übungen am 22. und 24. Mai