Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2019

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Michael Fütterer
Milan Malčić

Algebraische Geometrie

3. Übungsblatt

06.05.2019

Aufgabe 1 (*2+3=5 Punkte*). Sei X ein Schema und $\mathcal{B}$ eine $\mathcal{O}_X$-Algebra.

(a) Konstruiere ein Schema $\mathcal{S}pec\,\mathcal{B}$ zusammen mit einem Morphismus $\mathcal{S}pec\,\mathcal{B} \longrightarrow X$ durch Verkleben der $\operatorname{Spec}\mathcal{B}(U)$ für $U \subseteq X$ offen und affin. Mache dir klar, dass wir einen Funktor

$$\mathcal{S}pec\colon \mathcal{O}_X\text{-Alg} \longrightarrow X\text{-Sch}$$

bekommen.

(b) Zeige, dass für jedes X-Schema $f\colon Y \longrightarrow X$ gilt

$$\operatorname{Hom}_{X\text{-Sch}}(Y, \mathcal{S}pec\,\mathcal{B}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X\text{-Alg}}(\mathcal{B}, f_*\mathcal{O}_Y).$$

Aufgabe 2 (*4 Punkte*). Sei X ein lokal noethersches Schema und $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Zeige: Ist $x \in X$ so, dass $\mathcal{F}_x$ ein freier $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul ist, dann gibt es eine Umgebung U von x, sodass $\mathcal{F}|_U$ ein freier $\mathcal{O}_U$-Modul ist. Insbesondere ist $\mathcal{F}$ genau dann lokal frei, wenn alle Halme frei sind.

Aufgabe 3 (*1+3=4 Punkte*). Sei X ein Schema und $U \subseteq X$ ein offenes Unterschema. Sei $\mathcal{F}$ die Garbifizierung der Prägarbe auf X

$$V \longmapsto \begin{cases} \mathcal{O}_U(V), & \text{falls } V \subseteq U, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige:

(a) $\mathcal{F}$ ist ein $\mathcal{O}_X$-Modul.

(b) $\mathcal{F}$ ist im Allgemeinen nicht quasikohärent. Betrachte dazu $\mathcal{F}|_V$ für $V \subseteq X$ offen, affin und nicht in U enthalten und nehme an, dass X ganz ist.

Aufgabe 4 (*3 Punkte*). Sei X ein ganzes noethersches Schema mit Funktionenkörper K und sei $\mathcal{F}$ die konstante Garbe mit Wert K auf X. Zeige, dass $\mathcal{F}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul ist, aber im Allgemeinen nicht kohärent ist.

Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 13. Mai, 11 Uhr
Besprechung in den Übungen am 15. und 17. Mai