Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Algebraische Geometrie

4. Übungsblatt

05.11.2018

Auf dem ganzen Blatt sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*). Eine *projektive Gerade* in $\mathbb{P}^n(k)$ ist eine Teilmenge der Form $\mathbb{P}(U)$, wobei $U \subseteq k^{n+1}$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum ist und $\mathbb{P}(U)$ die Teilmenge

$$\{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid (x_0, \ldots, x_n) \in U\}$$

bezeichnet. Zeige:

(a) Eine projektive Gerade ist eine projektive Varietät.
(b) In $\mathbb{P}^2(k)$ schneiden sich je zwei projektive Geraden.
(c) Durch je zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{P}^n(k)$ verläuft eine eindeutige projektive Gerade.
(d) Auf jeder Gerade liegen mindestens drei Punkte.

Aufgabe 2 (*4 Punkte*). Eine *projektive lineare Varietät* ist die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems, eine *projektive Hyperfläche* ist die Nullstellenmenge eines einzigen homogenen nichtkonstanten Polynoms, jeweils im projektiven Raum $\mathbb{P}^n(k)$.
Sei $n \geq 2$. Zeige, dass sich eine projektive lineare Varietät von positiver Dimension und eine projektive Hyperfläche immer nichttrivial schneiden.
Was passiert im affinen Raum?

Aufgabe 3 (*4 Punkte*). Sei X eine Prävarietät. Wir betrachten Paare der Form (U, f), wobei, $U \subseteq X$ offen und nichtleer ist und $f \in \Gamma(U)$. Auf diesen Paaren definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$(U, f) \sim (V, g) :\iff \exists W \subseteq U \cap V \text{ offen und nichtleer mit } f|_W = g|_W.$$

Zeige, dass die Menge der Äquivalenzklassen ein Körper ist, der kanonisch zum Funktionenkörper von X isomorph ist.

Aufgabe 4 (*2 Punkte*). Wir benutzen die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{A}^n(k) \longrightarrow \mathbb{P}^n(k), \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1 : \cdots : x_n : 1).$$

Zeige: Sei $n = 2$. Bestimme den Abschluss von $\varphi(V(Y^2 - X^3 + X))$ in $\mathbb{P}^2(k)$. Welche zusätzlichen Punkte liegen im Abschluss?

Aufgabe 5 (*2 Punkte*). (a) Es sei $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ und F seine Homogenisierung. Zeige, dass f genau dann irreduzibel ist, wenn F irreduzibel ist.

(b) Sei $f \in k[T_0, \ldots, T_n]$ von Grad $d \in \mathbb{N}$ und sei $f = \sum_{i=0}^{d} f_i$ die Zerlegung von f in homogene Elemente. Sei weiter $x \in \mathbb{P}^n(k)$. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
  (i) Für jeden Repräsentanten $(x_0, \ldots, x_n)$ von x gilt $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$.
  (ii) Für jedes $i = 0, \ldots, d$ gilt $f_i(x) = 0$.

Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 12. Novermber, 11 Uhr
in die Zettelkästen Nr. 26/27 vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock)
Besprechung in den Übungen am 14. und 16. November