Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Algebraische Geometrie

2. Übungsblatt

22.10.2018

Auf dem ganzen Blatt sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*)**.** Bestimme die irreduziblen Komponenten der folgenden Varietäten:
(a) $V(X^2 - YZ, XZ - X) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$;
(b) $V(Y^2 - X^4, X^2 - 2X^3 - X^2Y + 2XY + Y^2 - Y) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$.

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)**.** Sei X eine affine algebraische Menge mit Koordinatenring A und $f, g \in \Gamma(X)$. Zeige:
(a) $D(fg) = D(f) \cap D(g)$;
(b) $D(f^n) = D(f)$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
(c) $D(f) = \emptyset$ genau dann, wenn f nilpotent ist;
(d) $D(f)$ ist genau dann dicht, wenn für jedes nicht nilpotente $g \in A$ auch fg nicht nilpotent ist.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)**.** Sei $\mathfrak{a} \subseteq k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal und $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine Teilmenge. Zeige Satz 10 der Vorlesung:
(a) $I(V(\mathfrak{a})) = \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$;
(b) $V(I(Z)) = \overline{Z}$.

Aufgabe 4 (*4 Punkte*)**.** Sei $\mathrm{char}\, k = p > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Frobeniusabbildung

$$\varphi\colon \mathbb{A}^n(k) \longrightarrow \mathbb{A}^n(k), \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1^p, \ldots, x_n^p)$$

ein bijektiver Morphismus ist, aber kein Isomorphismus ist.

Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 22. Oktober, 11 Uhr
in die Zettelkästen Nr. 26/27 vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock)
Besprechung in den Übungen am 31. Oktober und 2. November