Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

PD Dr. Fabian Januszewski
Michael Fütterer

L-Funktionen vom Grad 2

10. Übungsblatt

10.01.2018

Auf dem ganzen Blatt sei F eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ mit Ganzheitsring $\mathcal{O}$ und $G = \mathrm{GL}_2(F)$.

Aufgabe 1. Es sei V eine irreduzible zulässige Darstellung von G. Zeige, dass V genau dann als Unterquotient einer Darstellung der Form $B(\chi)$ auftritt, wenn $J(V) \neq 0$. (Hierbei ist χ ein Charakter des Torus' T der Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$.)

Aufgabe 2. Zeige, dass $V^\vee \otimes V$ als Darstellung von $G \times G$ irreduzibel ist.
Hinweis: Betrachte die Invarianten unter einer hinreichend kleinen kompakt-offenen Untergruppe und benutze dann die Hecke-Algebra und den Jacobsonschen Dichtheitssatz.

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe betrachten wir die Hecke-Algebra $\mathcal{H}_K \coloneqq e_K \mathcal{H}(G) e_K$, wobei $K = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ sei und $\mathcal{H}(G)$ und e_K wie in der Vorlesung definiert sind. Dann ist $\mathcal{H}_K$ eine assoziative $\mathbb{C}$-Algebra mit 1, die auch die *sphärische Hecke-Algebra* genannt wird.

(a) Benutze die Cartan-Zerlegung, um eine Basis von $\mathcal{H}_K$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum anzugeben.

(b) Zeige, dass $\mathcal{H}_K$ kommutativ ist.
Hinweis: Benutze die Transposition von Matrizen.

(c) Sei V eine irreduzible zulässige Darstellung. Zeige, dass dann V^K höchstens eindimensional ist.