Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

PD Dr. Fabian Januszewski
Michael Fütterer

L-Funktionen vom Grad 2

6. Übungsblatt

29.11.2017

Auf dem ganzen Blatt sei F eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$.

Aufgabe 1. Eine Darstellung heißt *unzerlegbar*, wenn sie nicht direkte Summe von irreduziblen Darstellungen kleinerer Dimension ist. Offenbar ist jede irreduzible Darstellung unzerlegbar. Finde eine Darstellung von $F^\times = \mathrm{GL}_1(F)$, die nicht irreduzibel, aber unzerlegbar ist.

Aufgabe 2. Zeige die fehlende Implikation aus Prop. 1.2:
Sei V eine Darstellung von $\mathrm{GL}_2(F)$, $K \subseteq \mathrm{GL}_2(F)$ eine kompakte Untergruppe und $v \in V$. Wenn $\dim_{\mathbb{C}}\langle Kv\rangle < \infty$ und die Aktion von K auf $\langle Kv\rangle$ stetig ist, dann ist v ein K-endlicher Vektor.

Aufgabe 3. (a) Sei G eine topologische Gruppe, sodass das Neutralelement eine Umgebungsbasis aus offenen kompakten Untergruppen hat. Sei $\pi\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ein stetiger Homomorphismus. Zeige, dass der Kern von π eine offene Untergruppe enthält.

(b) Sei π eine endlichdimensionale irreduzible glatte Darstellung von $\mathrm{GL}_2(F)$. Zeige, dass π eindimensional ist.

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe betrachten wir die Gruppe $G = \mathrm{GL}_2(K)$ für einen beliebigen Körper K. Weiter sei B die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen und $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in G$. Zeige, dass G als disjunkte Vereinigung

$$G = B \coprod BwB$$

geschrieben werden kann. Dies ist die sogenannte *Bruhat-Zerlegung*.

Besprechung am 6.12.2017 in der Übung.