Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

PD Dr. Fabian Januszewski
Michael Fütterer

L-Funktionen vom Grad 2

5. Übungsblatt

22.11.2017

Aufgabe 1. Es sei K eine kompakte topologische Gruppe.

(a) Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\rho\colon K \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ eine Darstellung. Zeige, dass es ein Skalarprodukt auf V gibt, bezüglich dessen ρ unitär ist. (Die Aussage gilt auch für unendlichdimensionale Hilberträume, ist dann aber etwas schwieriger zu zeigen.)

(b) Seien $\rho_i\colon K \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V_i)$ für $i = 1, 2$ Darstellungen auf Hilberträumen V_i, und sei ρ_2 unitär. Zeige: Wenn es Matrixkoeffizienten f_1 von ρ_1 und f_2 von ρ_2 gibt, die in $L^2(K)$ nicht orthogonal sind, dann gibt es einen nichttrivialen Homomorphismus $(V_1, \rho_1) \longrightarrow (V_2, \rho_2)$.

Aufgabe 2. Wir benutzen ohne Beweis die folgende Aussage aus der Funktionalanalysis:

> **Satz von Stone-Weierstraß:** *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist die Menge der Polynomfunktionen $X \longrightarrow \mathbb{C}$ dicht in dem Vektorraum $C(X, \mathbb{C})$ der stetigen Funktionen $X \longrightarrow \mathbb{C}$ bezüglich der Supremumsnorm, und $C(X, \mathbb{C})$ ist wiederum dicht in $L^p(X, \mathbb{C})$ für alle $1 \le p < \infty$.*

Mithilfe dieser Aussage wollen wir den **Satz von Peter-Weyl** zeigen. Dazu fixieren wir $n \in \mathbb{N}$ und eine kompakte Untergruppe $K \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

(a) Für $r \in \mathbb{N}$ sei P_r der $\mathbb{C}$-Vektorraum der Polynome von Grad $\le r$ in n^2 Variablen. Wir betrachten solche Polynome als Funktionen auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und definieren eine Aktion von K auf P_r durch

$$gf(x) := f(xg) \quad \text{für } g \in K, f \in P_r, x \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Benutze diese Darstellungen und Aufgabe 1 (a), um zu zeigen, dass jedes Polynom in n^2 Variablen mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ als Matrixkoeffizient einer endlich-dimensionalen Darstellung vorkommt.

(b) Sei $K \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine kompakte Untergruppe. Zeige mithilfe des Satzes von Stone-Weierstraß, dass die Matrixkoeffizienten aller endlichdimensionalen unitären Darstellungen von K dicht in $C(K, \mathbb{C})$ und $L^p(K, \mathbb{C})$ für alle $1 \le p < \infty$ liegen.

(c) Benutze Aufgabe 1 (b), um zu zeigen, dass jede nichttriviale unitäre Darstellung von K eine nichttriviale endlichdimensionale Unterdarstellung hat.

(d) Folgere, dass jede irreduzible unitäre Darstellung von K endlichdimensional ist.

Aufgabe 3. Diese Aufgabe zeigt die *Iwasawa-Zerlegung*.

(a) Sei $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $A \subseteq G$ die Untergruppe der Diagonalmatrizen mit positiven Einträgen, $N \subseteq G$ die Untergruppe der Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $K = \mathrm{O}_2$. Zeige, dass dann

$$G = ANK$$

gilt und dies sogar ein direktes Produkt ist.

(b) Sei nun $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, A die Untergruppe aller Diagonalmatrizen, N wie vorher und $K = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Zeige, dass dann ebenfalls

$$G = ANK$$

gilt (allerdings diesmal nicht als direktes Produkt).