Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

PD Dr. Fabian Januszewski
Michael Fütterer

L-Funktionen vom Grad 2

3. Übungsblatt

08.11.2017

Aufgabe 1. Es sei V eine glatte affine Varietät über einem Zahlkörper k. In der Vorlesung wurde der topologische Raum $V_{\mathbb{A}}$ eingeführt. Hier soll eine alternative Konstruktion vorgestellt werden.

Sei dazu zunächst allgemeiner R ein kommutativer Ring und $V = \operatorname{Sp}_R A$ eine glatte affine Varietät über R (d. h. $A = \mathcal{O}_V$). Wir versehen R und A mit der diskreten Topologie. Weiter sei S eine beliebige topologische R-Algebra.

(a) Wir versehen die Menge
$$V(S) = \operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathcal{Alg}}(A, S)$$
mit der kompakt-offenen Topologie.[1] Andererseits: Wenn wir V in einen affinen Raum $\mathbb{A}^n$ einbetten, bekommen wir eine Einbettung $V(S) \subseteq \mathbb{A}^n(S) \cong S^n$ und könnten dann $V(S)$ auch mit der Teilraumtopologie von S^n versehen. Zeige, dass beide Konstruktionen die gleiche Topologie auf $V(S)$ liefern.

(b) Zeige: Ist $R = \varinjlim_i R_i$ als Ring und $S = \varinjlim_i S_i$ als topologische Ring R-Algebra (wobei S_i jeweils eine topologische R_i-Algebra sei), so ist $V(S) = \varinjlim_i V(S_i)$ als topologischer Raum (bezüglich der kompakt-offenen und der Limestopologie).

(c) Folgere, dass der hier definierte topologische Raum $V(k_{\mathbb{A}})$ mit dem Raum $V_{\mathbb{A}}$ aus der Vorlesung übereinstimmt.

Aufgabe 2. Es sei G eine lineare algebraische Gruppe über einem Zahlkörper k. Wir schreiben $\mathcal{O}$ für den Ganzheitsring von k und $\hat{\mathcal{O}} := \prod_v \mathcal{O}_v$ für das Produkt aller nichtarchimedischen Komplettierungen von $\mathcal{O}$ (d. h. v durchläuft hier alle endlichen Stellen von k).

(a) Sei S eine endliche Menge von Stellen von k. Wenn $G(k)$ dicht in $\prod_{v \in S} G(k_v)$ ist, sagt man, dass G *schwache Approximation bezüglich* S hat.

Zeige, dass jede lineare algebraische Gruppe schwache Approximation bezüglich jeder endlichen Stellenmenge S hat.[2]

(b) Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
  (i) G hat starke Approximation, d. h. $G(k)$ ist dicht in $G_{\mathbb{A}^{(\infty)}}$.
  (ii) $G(k)G(k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ ist dicht in $G_{\mathbb{A}}$.
  (iii) $G(\mathcal{O})$ ist dicht in $G(\hat{\mathcal{O}})$.

(c) Zeige, dass die multiplikative Gruppe $\mathrm{G_m}$ keine starke Approximation hat.

[1] Zur Erinnerung: Das ist die Topologie, die erzeugt wird von den Mengen
$$\{f \in \operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathcal{Alg}}(A, S) : f(K) \subseteq U\}$$
für $K \subseteq A$ kompakt und $U \subseteq S$ offen.

[2] In Wahrheit brauchen wir noch nicht einmal eine Gruppe, die Aussage gilt für jede affine Varietät.