Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2018

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Algebraische Gruppen

6. Übungsblatt

23.05.2018

Aufgabe 1 (vgl. Übung 8; *6 Punkte*). Sei G eine affine algebraische Gruppe und $\mathcal{D}_G \subseteq \mathrm{End}_k(\mathcal{A}_G)$ wie in der Vorlesung der Unterraum der linksinvarianten Vektorfelder. Zeige:

(a) Wenn wir auf $\mathrm{End}_k(\mathcal{A}_G)$ die Lie-Klammer durch

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$$

definieren, ist $\mathcal{D}_G$ stabil unter $[\cdot,\cdot]$.

(b) Die so definierte Lie-Klammer stimmt der der Lie-Klammer aus Prop. 3 überein.

(c) Ist $p := \operatorname{char} k > 0$, so ist $\mathcal{D}_G$ stabil unter

$$D \longmapsto D^p = \underbrace{D \circ \cdots \circ D}_{p \text{ mal}}.$$

Aufgabe 2 (vgl. Übung 14; *4 Punkte*). Sei G eine diagonalisierbare Gruppe. Zeige, dass es einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Lie}(G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(G), k)$$

gibt.

Aufgabe 3 (*2 Punkte*). Sei G eine affine algebraische Gruppe, sodass $G = [G, G]$. Zeige, dass dann $X^*(G) = 0$.

Aufgabe 4 (*4 Punkte*). Zeige den „Fakt“ nach Kor. 8: Für jede diagonalisierbare Gruppe G ist

$$G \times X^*(G) \longrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m}}, \quad (g, \chi) \longmapsto \chi(g)$$

eine perfekte Paarung abelscher Gruppen. Diese vermittelt eine Bijektion

$$\begin{aligned} \{H \subseteq G \text{ abgeschlossene Untergruppe}\} &\longleftrightarrow \{Y \subseteq X^*(G) \text{ Untergruppe, } p \nmid [X^*(G) : Y]\} \\ H &\longmapsto H^\perp, \\ Y^\perp &\longleftarrow\!\shortmid Y. \end{aligned}$$

Besprechung am 30.05.2018 in der Übung.