Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2018

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Algebraische Gruppen

3. Übungsblatt

02.05.2018

Wie immer sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*)**.** Sei G eine affine algebraische Gruppe und V eine affine Varietät, auf der G algebraisch operiert, d. h.

$$G \times V \longrightarrow V, \quad (g, v) \longmapsto gv$$

ist ein Morphismus von affinen Varietäten.
Zeige, dass es einen endlich-dimensionalen k-Vektorraum W, einen Morphismus $G \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$ und eine abgeschlossene G-äquivariante Einbettung $V \hookrightarrow W$ gibt.
Hinweis: Hierzu brauchst du die Aussage aus Bemerkung 2. Vergewissere dich, dass diese stimmt!

Aufgabe 2 (*4 Punkte*)**.** Sei G eine affine algebraische Gruppe über k. Zeige:

(a) $\mathcal{A}_G$ ist die Vereinigung aller endlichdimensionalen G-invarianten k-Untervektorräume von $\mathcal{A}_G$.
(b) Jeder solche Unterraum liegt in einer als k-Algebra endlich erzeugten Hopf-Unteralgebra.
(c) Es gilt $G = \varprojlim G'$, wobei der Limes über alle algebraischen Quotienten G' von G läuft.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)**.** Bestimme die Endomorphismen der algebraischen Gruppen $\mathbb{G}_\mathrm{a}$ und $\mathbb{G}_\mathrm{m}$.

Besprechung am 09.05.2018 in der Übung.