Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

L-Funktionen und ε-Konstanten II

12. Übungsblatt

05.07.2017

Aufgabe 1 (*3+3+3+4=13 Punkte*). Es sei K ein Körper. Wir betrachten die Kategorie $(\mathcal{V}ec(K), \mathrm{is})$, deren Objekte endlichdimensionale K-Vektorräume und deren Morphismen die Isomorphismen seien. Dann gibt es den in der Vorlesung eingeführten Funktor

$$\mathrm{d}_K : (\mathcal{V}ec(K), \mathrm{is}) \longrightarrow \mathcal{C}_K .$$

Früher in der Vorlesung haben wir die Determinante eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V als $\bigwedge^{\dim V} V$ definiert, wofür wir jetzt zur Unterscheidung mit dem eben genannten Funktor $\mathrm{d}'_K V$ schreiben. Wir untersuchen den Zusammenhang zwischen d_K und d'_K.

(a) Zeige: $\mathrm{K}_0(K) \cong \mathbb{Z}$ und $\mathrm{K}_1(K) \cong K^\times$.

(b) Es sei $(\mathcal{V}ec^1(K), \mathrm{is})$ die Kategorie der eindimensionalen K-Vektorräume mit Isomorphismen als Morphismen. Dann definiert d'_K einen Funktor

$$\mathrm{d}'_K : (\mathcal{V}ec(K), \mathrm{is}) \longrightarrow (\mathcal{V}ec^1(K), \mathrm{is}).$$

Welche der in Satz 1 (a)–(c) in der Vorlesung genannte Eigenschaften gelten für diesen? Welche sind verletzt?

(c) Um die verletzten Eigenschaften zu reparieren, sei $\mathcal{C}'_K$ die Kategorie, deren Objekte Paare (V, n) aus einem eindimensionalen K-Vektorraum V und einer Zahl $n \in \mathbb{Z}$ sind, und deren Morphismen durch

$$\mathrm{Hom}((V,n),(W,m)) := \begin{cases} \mathrm{Isom}(V,W), & n = m, \\ \varnothing, & n \neq m \end{cases}$$

gegeben sind. Definiere dann eine Variante

$$\mathrm{d}'_K : (\mathcal{V}ec(K), \mathrm{is}) \longrightarrow \mathcal{C}'_K$$

des Funktors d'_K, der alle in Satz 1 (a)–(c) genannten Eigenschaften erfüllt.

(d) Finde eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{C}_K \longrightarrow \mathcal{C}'_K$, so dass das Diagramm von Funktoren

$$\begin{tikzcd} & (\mathcal{V}ec(K), \mathrm{is}) \arrow[dl, "\mathrm{d}_K"'] \arrow[dr, "\mathrm{d}'_K"] & \\ \mathcal{C}_K \arrow[rr] & & \mathcal{C}'_K \end{tikzcd}$$

kommutiert (bis auf kanonische Isomorphie).

Aufgabe 2 (*2+2=4 Punkte*)**.** Es sei K ein Körper und $n \geq 2$. Weiter seien K-Vektorräume $V_1, \dots, V_n$ der gleichen endlichen Dimension mit Isomorphismen

$$V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} V_n \xrightarrow{\varphi_n} V_1$$

gegeben. Wenn wir darauf den Determinantenfunktor d_K anwenden und anschließend multiplizieren, bekommen wir einen Morphismus

$$\mathrm{d}_K(\varphi_1) \cdots \mathrm{d}_K(\varphi_n) \colon \mathrm{d}_K(V_1) \cdots \mathrm{d}_K(V_n) \longrightarrow \mathrm{d}_K(V_2) \cdots \mathrm{d}_K(V_n)\, \mathrm{d}_K(V_1),$$

den wir als Element in $\mathrm{K}_1(K) = K^\times$ auffassen können. Wir schreiben

$$\det(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in K^\times$$

für dieses Element. Zeige:

(a) $\det(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = (-1)^{n+1} \det(\varphi_n \circ \cdots \circ \varphi_1, V_1)$,

(b) $\det(\varphi_i, \dots \varphi_n, \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}) = \det(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ für $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Aufgabe 3 (*2 Punkte*)**.** Es sei R ein beliebiger Ring und $n \in \mathbb{N}$. Zeige

$$\mathrm{K}_1(R) \cong \mathrm{K}_1(\mathrm{M}_n(R)).$$