Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

L-Funktionen und ε-Konstanten II

10. Übungsblatt

21.06.2017

Auf dem ganzen Blatt sei $L/\mathbb{Q}_p$ eine endliche Erweiterung und V eine L-lineare de Rham-Darstellung von $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p}$.

Aufgabe 1 (*1+4+3+3+5=16 Punkte*). (a) Mache dir klar, dass die Definition der linearisierten Aktion der Weilgruppe $\mathrm{W}_{\mathbb{Q}_p}$ auf $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(-)$ mit Tensorprodukten kompatibel ist.

(b) Zeige: Ist $F/\mathbb{Q}_p$ endlich, so dass $V|_{\mathrm{G}_F}$ semistabil ist, so gilt für jede endliche Erweiterung F'/F:

$$\mathrm{D}_{\mathrm{st},F'}(V) \cong F'_0 \underset{F_0}{\otimes} \mathrm{D}_{\mathrm{st},F}(V).$$

Folgere daraus, dass $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) \cong \mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}} \otimes_{F_0} \mathrm{D}_{\mathrm{st},F}(V)$.

(c) Sei $\eta\colon \mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow L^\times$ ein de Rham-Charakter von endlicher Ordnung. Zeige, dass dann $\mathrm{W}_{\mathbb{Q}_p}$ auf $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(\eta)$ durch den Charakter η operiert. Nimm dazu eine Basis $b \otimes v$ von $\mathrm{D}_{\mathrm{st},F}(\eta)$ (wobei F so sei, dass $\eta|_{\mathrm{G}_F}$ trivial ist) und zeige, dass dann b schon in F_0 liegt. Betrachte dann die Aktion von $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p}$ auf dieser Basis.

(d) Zeige, dass ein endlich verzweigter Charakter von $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p}$ als Produkt eines Charakters von endlicher Ordnung und einem unverzweigten Charakter geschrieben werden kann. Insbesondere kann jeder de Rham-Charakter $\eta\colon \mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow L^\times$ geschrieben werden als ein Produkt $\eta = \chi\eta_{\mathrm{nr}}\kappa^j$, wobei $\chi\colon \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^m})/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow L^\times$ mit einem $m \geq 0$ ein Dirichlet-Charakter ist, η_{nr} ein unverzweigter Charakter ist, $j \in \mathbb{Z}$ und κ der zyklotomische Charakter.

(e) Benutze die in der Vorlesung (§VII.1) genannten Eigenschaften von ε-Faktoren (sowie Aufgabe 3 (c) vom 9. Übungsblatt), um zu zeigen: Ist η wie in Teil (d) und ψ ein Charakter von $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ wie in der Vorlesung, so gilt

$$\varepsilon(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(\eta), \psi) = \eta_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Frob}_p)^m p^{-jm} \mathrm{G}(\chi, \psi),$$

wobei die Gaußsumme durch

$$\mathrm{G}(\chi, \psi) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^m})/\mathbb{Q}_p)} \chi(\sigma)^{-1} \sigma(\psi(p^{-m}))$$

definiert ist.

Aufgabe 2 (*4 Punkte*). Zeige die in der Vorlesung behauptete Aussage $\mathrm{D}^0_{\mathrm{dR}}(V) \cong \mathrm{t}(V^*(1))^*$.

Abgabe in der Übung am 28. Juni oder vorher in mein Postfach neben Zimmer 3/417.
Besprechung in der Übung am 28. Juni.