Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

L-Funktionen und ε-Konstanten II

8. Übungsblatt

07.06.2017

Aufgabe 1 (*2+2+1=5 Punkte*). Eine $\mathbb{F}_p$-Algebra A heißt *perfekt*, wenn der Frobenius $x \longmapsto x^p$ auf A ein Automorphismus ist. Für jede beliebige $\mathbb{F}_p$-Algebra A definieren wir ähnlich wie in der Vorlesung

$$\mathrm{R}(A) \coloneqq \varprojlim_{x \longmapsto x^p} A.$$

(a) Zeige, dass dies einen Funktor R von der Kategorie aller $\mathbb{F}_p$-Algebren in die Kategorie der perfekten $\mathbb{F}_p$-Algebren definiert.

(b) Finde für jede $\mathbb{F}_p$-Algebra A eine kanonische Abbildung $\mathrm{R}(A) \longrightarrow A$ und zeige, dass diese ein Isomorphismus ist, wenn A selbst schon perfekt ist.

(c) Zeige, dass R rechtsadjungiert zum Vergissfunktor von perfekten $\mathbb{F}_p$-Algebren in alle $\mathbb{F}_p$-Algebren ist.

Aufgabe 2 (*3+1=4 Punkte*). Sei G eine topologische Gruppe, B ein topologischer G-Ring, $F \subseteq B^G$ ein abgeschlossener Teilkörper und B sei (F, G)-regulär. Zeige die Aussagen aus Satz 6:

(b) Für $V \in \mathcal{R}ep_F^B(G)$ ist auch $V^* \in \mathcal{R}ep_F^B(G)$ und es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{D}_B(V^*) \cong \mathrm{Hom}_E(\mathrm{D}_B(V), E).$$

(c) $\mathrm{D}_B(F) \cong E$.

(Aussage (a) des Satzes wurde bereits in Aufgabe 2 (b) auf dem 2. Übungsblatt gezeigt.)

Aufgabe 3 (*1+1+2+4=8 Punkte*). Es sei $K/\mathbb{Q}_p$ eine endliche Erweiterung. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass gewisse Ringe $(\mathbb{Q}_p, \mathrm{G}_K)$-regulär sind; wir schreiben dafür einfach kurz „regulär".

(a) Zeige, dass B_{dR} regulär ist.

(b) Zeige, dass $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ nicht regulär ist.

Im weiteren darf die folgende Verallgemeinerung einer Aussage aus der Vorlesung ohne Beweis verwendet werden: Sei $\eta\colon \mathrm{G}_K \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ ein stetiger Homomorphismus, sei $\mathbb{Q}_p(\eta)$ der eindimensionale $\mathbb{Q}_p$-Vektorraum mit G_K-Aktion gegeben durch η und sei $\mathbb{C}_p(\eta) \coloneqq \mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\eta)$. Dann gilt

$$\mathbb{C}_p(\eta)^{\mathrm{G}_K} = \begin{cases} K, & \text{wenn } \eta(I_K) \text{ endlich,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Zeige, dass B_{HT} (nicht-kanonisch) zum Laurentpolynomring $\mathbb{C}_p[T, T^{-1}]$ isomorph ist. Wie sieht die Galoisaktion in dieser Darstellung aus?

(d) Zeige, dass B_{HT} regulär ist.
Hinweis: Die erste Bedingung für die Regularität sieht man relativ direkt. Für den zweiten Teil finde einen Charakter η wie oben und benutze die erwähnte Aussage und die Tatsache, dass die Einheitengruppe des Laurentpolynomrings $\mathbb{C}_p \cdot T^{\mathbb{Z}}$ ist.

Abgabe in der Übung am 14. Juni oder vorher in mein Postfach neben Zimmer 3/417.
Besprechung in der Übung am 14. Juni.