Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

L-Funktionen und ε-Konstanten II

2. Übungsblatt

26.04.2017

Auf dem ganzen Blatt bezeichne K einen Zahlkörper, ℓ eine Primzahl, $\lambda \mid \ell$ eine Stelle von K und $L = K_\lambda$ die zugehörige Komplettierung.

Aufgabe 1 (*1+3+3+1=8 Punkte*). Sei M ein K-Motiv über $\mathbb{Q}$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) M ist kritisch.

(ii) Die Komposition

$$\mathbb{C} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} M_{\mathrm{B}}^{+} \hookrightarrow \mathbb{C} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} M_{\mathrm{B}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} M_{\mathrm{dR}} \twoheadrightarrow \mathbb{C} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathrm{t}_M$$

ist ein Isomorphismus. Hier ist die mittlere Abbildung der Vergleichsisomorphismus g_∞ und die beiden anderen die kanonischen Abbildungen.

(iii) Für alle $j, k, l \in \mathbb{Z}$ gilt: Wenn $j < k$ und $\mathcal{H}^{i,j}(M) \neq 0$, dann $j < 0$ und $k \geq 0$, und wenn $\mathcal{H}^{l,l}(M) \neq 0$, dann operiert die komplexe Konjugation ι auf $\mathcal{H}^{l,l}(M)$ als $+1$ für $l < 0$ und -1 für $l \geq 0$.

Überlege dir, für welche $n \in \mathbb{Z}$ das Motiv $\mathbb{Q}(n)$ kritisch ist.

Aufgabe 2 (*1+3+2=6 Punkte*). Seien V und W λ-adische de Rham-Darstellungen. Zeige die folgenden in der Vorlesung behaupteten Aussagen:

(a) $V \oplus W$ ist de Rham und es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V \oplus W) \cong \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \oplus \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(W).$$

(b) $V \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} W$ ist de Rham und es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V \underset{\mathbb{Q}_\ell}{\otimes} W) \cong \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \underset{\mathbb{Q}_\ell}{\otimes} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(W).$$

(c) Quotienten und Unterdarstellungen von de Rham-Darstellungen sind de Rham.

Mache dir klar, dass die analogen Aussagen für kristalline Darstellungen ebenfalls gelten und genau gleich bewiesen werden können.

Hinweis: Benutze die in der Vorlesung erwähnte Aussage, nach der es für jede λ-adische Darstellung V eine kanonische injektive Abbildung $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \hookrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} V$ gibt!

Aufgabe 3 (*1+2=3 Punkte*). Sei $\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{nr}}$ die maximale unverzweigte Erweiterung von $\mathbb{Q}_\ell$ und $\hat{\mathbb{Q}}_\ell^{\mathrm{nr}}$ ihre Komplettierung. Zeige:

(a) Die absoluten Galoisgruppen von $\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{nr}}$ und $\hat{\mathbb{Q}}_\ell^{\mathrm{nr}}$ sind kanonisch isomorph.

(b) Sei V eine unverzweigte λ-adische Darstellung von $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_\ell}$. Dann ist V kristallin und es gilt

$$\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V) \cong (\hat{\mathbb{Q}}_\ell^{\mathrm{nr}} \underset{\mathbb{Q}_p}{\otimes} V)^{\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{nr}}/\mathbb{Q}_\ell)}.$$

Benutze hierzu die folgenden Fakten:

(1) Sei $\mathrm{I}_\ell \subseteq \mathrm{G}_{\mathbb{Q}_\ell}$ die Trägheitsgruppe. Dann ist $\mathrm{B}_{\mathrm{crys}}^{\mathrm{I}_\ell} = \hat{\mathbb{Q}}_\ell^{\mathrm{nr}}$.

(2) Für jede Erweiterung F von $\mathbb{Q}_\ell$ sei $\mathrm{D}_{\mathrm{crys},F}(V) := (\mathrm{B}_{\mathrm{crys}} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} V)^{\mathrm{G}_F}$. Ist F entweder eine endliche unverzweigte Erweiterung von $\mathbb{Q}_\ell$ oder die Komplettierung einer unverzweigten Erweiterung, so gilt $\mathrm{D}_{\mathrm{crys},F}(V) \cong F \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V)$.

Aufgabe 4 (*1+1=2 Punkte*). (a) Sei $\psi\colon (\mathbb{Z}/f)^\times \longrightarrow K$ ein Dirichlet-Charakter von Führer $f \in \mathbb{Z}$ (mit $K = \mathbb{Q}(\mu_{\varphi(f)})$, wobei φ die Eulersche φ-Funktion ist). Warum gilt dann $[\psi]_{\mathrm{dR}} = K \cdot \tau(\psi)$?

(b) Welche Eigenschaft muss ψ erfüllen, damit $[\psi]$ kritisch ist? Für welche $n \in \mathbb{Z}$ ist $[\psi](n)$ kritisch?

Abgabe in der Übung am 3. Mai oder vorher in mein Postfach neben Zimmer 3/417.
Besprechung in der Übung am 3. Mai.