Übungsblatt 4, Nachtrag zu Lösungen

Zur Aufgabe 1

Wir haben gesehen, daß für zwei geschlossene n-dimensionale Mannigfaltigkeiten M und N gilt

$$H^k(M\#N) \cong H^k(M) \oplus H^k(N) \text{ für } k \neq 0, n$$

Dabei haben wir den Ringisomorphismus κ^* getauft. Seien die Mannigfaltigkeiten nach dem Entfernen der Scheiben mit $M' := M \backslash \mathring{D}^4, N' := N \backslash \mathring{D}^4$ und die jeweiligen Inklusionen mit$j_{1,2} : M', N' \hookrightarrow M, N$ und $i_{1,2} : M', N' \hookrightarrow M\#N$ bezeichnet.

$$\begin{tikzcd}
H^k(M) \oplus H^k(N) \arrow[rr, "j^* = (j_1^*, j_2^*)", "\cong"'] \arrow[drr, "\kappa^*"'] & & H^k(M') \oplus H^k(N') \\
& & H^k(M\#N) \arrow[u, "i^* = (i_1^*, i_2^*)"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

Aus der Ringstruktur ist klar, daß sämtliche Produkte von der Form $(\alpha, 0) \cup (0, \beta)$ verschwinden. Für die Schnittzahlen brauchen wir noch das folgende Resultat: seien $\alpha, \beta \in H^*(M)$ dann gilt

$$< \kappa^*(\alpha) \cup \kappa^*(\beta), [M\#N] >=< \alpha \cup \beta, [M] >$$

und analog für Elemente aus $H^*(N)$. Es genügt die Aussage für $H^*(M)$ zu zeigen. Dazu werden wir κ^* mit der Abbildung q^* identifizieren, wobei die letztere von der Quotientenabbildung $q : M\#N \to M$ induziert ist, welche alles außerhalb von $\mathring{M}'$ auf einen Punkt kollabiert. Wir haben ein kommutatives Dreieck

$$\begin{tikzcd}
M\#N \arrow[r, "q"] & M \\
M' \arrow[u, "j_1"] \arrow[ur, "\tilde{q}"'] &
\end{tikzcd}$$

wobei $\tilde{q} : M' \to M$ den Rand $\partial M' = S^{n-1}$ auf einen Punkt kollabiert. Da diese S^{n-1} in M zusammenziehbar ist, sind i_1 und $\tilde{q}$ homotop, d.h. $i_1^* = \tilde{q}^*$.

Wir wenden Kohomologie auf das obere Diagramm an

$$\begin{tikzcd} H^k(M\#N) \arrow[d, "j_1"'] & & H^k(M) \arrow[ll, "q^*"'] \arrow[dll, "i_1^*"] \\ H^k(M') & & \end{tikzcd}$$

Schreiben wir das etwas um

$$\begin{tikzcd} H^k(M) \arrow[rr, "q^*"] \arrow[drr, "{j^*(\cdot,0) = (j_1^*,0)}"'] & & H^k(M\#N) \arrow[d, "{i^* = (i_1^*, i_2^*)}"] \\ & & H^k(M') \oplus H^k(N') \end{tikzcd}$$

Für $\alpha \in H^k(M)$ gilt nach Definition von κ^* und mit dem letzten Diagramm $\kappa^*(\alpha, 0) = i^{*-1}j^*(\alpha, 0) = q^*(\alpha, 0)$, was zu beweisen war.

Mit $\alpha, \beta \in H^*(M)$ haben wir schließlich für die Schnittzahlen

$$< \kappa^*(\alpha) \cup \kappa^*(\beta), [M\#N] >=$$
$$< q^*(\alpha) \cup q^*(\beta), [M\#N] >=$$
$$< \alpha \cup \beta, q_*[M\#N] > .$$

Da q aber Grad 1 hat (Warum ?), ist der letzte Ausdruck die alte Schnittzahl von α und β in M.

Das Problem mit κ^* war, daß sie nicht durch eine stetige Abbildung zwischen Räumen induziert ist und man keine Dualität wie für q^* im Kroneckerprodukt hat. Natürlich hätte man den anfänglichen Ringisomorphismus auch über solche Quotientenabbildungen definieren können. Probiert's doch!

Zur Aufgabe 2

Seien M^m und N^n geschlossene orientierte Mannigfaltigkeiten. Wir wollen zeigen, daß $\sigma(M \times N) = \sigma(M) \cdot \sigma(N)$ gilt. Was wir noch nicht bewiesen haben ist, daß die Signatur der Bilinearform auf dem Teilraum

$$V := \bigoplus_{i<m/2} H^i(M) \otimes H^{(m+n)/2}(N) \oplus H^{(m+n)/2}(M) \otimes H^i(N)$$

verschwindet. O.E. ist $m+n \equiv 0(4)$, sonst ist entweder $m \neq 4k$ oder $n \neq 4l$ und die ganze Behauptung ist trivial. Dazu wählen wir uns zunächst für ein festes i in der oberen Summe eine geeignete Basis $\{a_i \otimes b_j \pm \tilde{a}_k \otimes \tilde{b}_l\}$. Dabei wählen wir - und das habe ich in der Übungsgruppe nicht berücksichtigt - die $\tilde{a_k}, \tilde{b_l}$ in dem Sinne dual zu den a_i, b_j, daß gilt

$$< a_i \cup \tilde{a_{i'}}, [M] >= \delta_{ii'} \qquad \text{und analog für die } b_j.$$

Betrachten wir nun ein Produkt zweier solcher Basiselemente

$$(a_i \otimes b_j \pm \tilde{a}_k \otimes \tilde{b}_l) \cup (a_{i'} \otimes b_{j'} \pm \tilde{a}_{k'} \otimes \tilde{b}_{l'}) =$$

$$\pm a_i \cup a_{i'} \otimes b_j \cup b_{j'} \pm \tilde{a}_k \cup \tilde{a}_{k'} \otimes \tilde{b}_l \cup \tilde{b}_{l'} \pm a_i \cup \tilde{a}_{k'} \otimes b_j \cup \tilde{b}_{l'} \pm \tilde{a}_k \cup a_{i'} \otimes \tilde{b}_l \cup b_{j'}$$

Wie wir bereits festgestellt haben, verschwinden die ersten Summanden aus Gradgründen (z.B. $\deg(b_j \cup b_{j'}) > n$). Da Basiselemente mit Schlange dual zu denjenigen ohne Schlange gewählt worden sind, gilt

$$a_i \cup \tilde{a}_{k'} = \delta_{ik'}, \quad b_j \cup \tilde{b}_{l'} = \delta_{jl'}, \qquad \text{etc.}$$

Alle Indizes müssen mit den gestrichenen übereinstimmen, was bedeutet daß Cupprodukte unterschiedlicher Basiselemente verschwinden. Betrachten wir zwei gleiche Elemente - endlich brauche ich die Indizes nicht mitzutippen - , so finden wir analog heraus

$$(a \otimes b \pm \tilde{a} \otimes \tilde{b}) \cup (a \otimes b \pm \tilde{a} \otimes \tilde{b}) =$$

$$a \otimes b \cup \tilde{a} \otimes \tilde{b} \pm \tilde{a} \otimes \tilde{b} \cup a \otimes b =$$

$$\pm 2a \otimes b \cup \tilde{a} \otimes \tilde{b}$$

wobei wir ausgenutzt haben, daß $\deg(a \otimes b)$ gerade ist. Insgesamt folgt also, daß wir in der Schnittmatrix für jeden positiven Eintrag auch einen negativen auf der Diagonalen bekommen, bzw. daß die Signatur der Schnittform auf dem Teilraum V null ist.