Darstellungen der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$

SEMINAR DARSTELLUNGSTHEORIE - SOMMERSEMESTER 2017

Steffen Schmidt

20.06.2017

Einleitung: *In dieser Seminararbeit werden wir uns mit der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(K)$ und ihren Darstellungen beschäftigen. Unser Ziel ist dabei die vollständige Klassifikation irreduzibler $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-Moduln für einen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0.*

Folgende Kernfragen treten auf:

- Welche Eigenschaften besitzt die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$?
- Wie lassen sich irreduzible $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-Moduln vollständig klassifizieren?
- Sind Darstellungen der $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ vollständig reduzibel?

1 Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$

Definition 1.1 *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n. Dann ist die **spezielle lineare Lie-Algebra** gegeben durch*

$$\mathfrak{sl}(V) = \{\varphi \in \mathfrak{gl}(V) \big| tr(\varphi) = 0\}$$

Im Folgenden werden wir uns für die kleinste nichttriviale spezielle lineare Lie-Algebra, die $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$, interessieren.

Es gilt $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) = \langle X \rangle \oplus \langle Y \rangle \oplus \langle H \rangle$ mit der Standardbasis

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Multiplikationstabelle von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ für $char(\mathbb{K}) \neq 2$ vollständig durch folgende Kommutator-Relationen

$$[X, Y] = H, \quad [H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y$$

gegeben. Es werden nun einige grundlegende Eigenschaften der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ aufgelistet, die sich auf beliebige Dimension n verallgemeinern lassen.

Bemerkung 1.2 *(Eigenschaften der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ für $char(\mathbb{K}) \neq 2$)*
(a) $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ ist ein Ideal der allgemeinen Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{K})$
(b) $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ ist eine einfache Lie-Algebra
(c) $[\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})] = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$
(d) $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ ist eine halbeinfache Lie-Algebra

Beweis:
(a) Zunächst folgt aus der Abgeschlossenheit bzgl. der Kommutator-Relationen, dass die $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ eine Lie-Unteralgebra der $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{K})$ ist. Desweiteren ist die Spurabbildung

$$tr : \mathfrak{gl}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

ein Homomorphismus von Lie-Algebren mit $Ker(tr) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Also $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ ein Ideal in $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{K})$.

(b) Zunächst gilt, dass die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ offensichtlich nicht abelsch ist. Wir zeigen nun, dass $\{0\}$ und $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ die einzigen Ideale sind. Sei $\{0\} \neq \mathfrak{J} \subset \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ ein Ideal und $\xi = aX + bY + cH$ ein von Null verschiedenes Element in $\mathfrak{J}$ mit $a, b, c \in \mathbb{K}$. Wir betrachten nun eine Fallunterscheidung. Angenommen $a = b = 0$, dann gilt wegen $\xi \neq 0$: $cH \in \mathfrak{J}$, also $H \in \mathfrak{J}$ und nach Kommutator-Relationen auch X und Y. Sei nun $a = 0$ oder $b = 0$. Dann ist $[X, [X, \xi]] = -4bX$ und $[Y, [Y, \xi]] = -4aY$. $\mathfrak{J}$ enthält also stets X oder Y und nach den Kommutator-Relationen gilt $\mathfrak{J} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$.

(c) *und* (d) folgen aus (b). $\square$

Konvention: Sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null und V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Seien im Folgenden alle Moduln endlich dimensional über $\mathbb{K}$. Wir bezeichnen die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ mit L.

2 Gewichte und maximale Vektoren

Definition 2.1 *Sei L eine Lie-Algebra über dem Körper $\mathbb{K}$. Ein L-**Modul** ist ein Vektorraum V zusammen mit einer $\mathbb{K}$-bilinearen Abbildung $L \times V \longrightarrow V$ mit $(x, v) \mapsto xv$, welche die Bedingung $[x, y]v = xyw - yxv$ für alle $x, y \in L$ und für alle $v \in V$ erfüllt.*

Anmerkung: Sei $\rho : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung der Lie-Algebra L. Dann kann der $\mathbb{K}$-Vektorraum V als L-Modul via

$$xv = \rho(x)(v) \quad ; \quad \forall x \in L, \forall v \in V$$

betrachtet werden. Sei umgekehrt V ein L-Modul, dann definiert obige Gleichung eine Darstellung $\rho : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ von L.

Wir werden sehen, dass das Basiselement H diagonal auf dem L-Modul V wirkt. Diese Feststellung motiviert folgende Definitionen. (Beachte, dass uns hierbei die algebraische Abgeschlossenheit des Körpers $\mathbb{K}$ garantiert, dass bereits alle Eigenwerte in $\mathbb{K}$ liegen was uns eine Zerlegung von V liefert.)

Definition 2.2 *Sei V ein L-Modul und $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir setzen*

$$V_\lambda = \{v \in V \big| Hv = \lambda v\}$$

*mit $V_\lambda = 0$, falls λ kein Eigenwert von H in V. Gilt $V_\lambda \neq 0$, so bezeichnen wir λ als **Gewicht** von H in V und V_λ als **Gewichtsraum** zum Gewicht λ.*

Wir erhalten eine direkte Zerlegung von V in Gewichtsräume bezüglich H, d.h.

$$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$$

mit λ Gewicht von H. Die Wirkung von H auf V ist durch obige Gewichtsraumzerlegung vollständig beschrieben. Der erste Schritt zum Verständnis der Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ ist zu verstehen, wie die Basiselemente X und Y auf den Gewichtsräumen bzgl. H operieren.

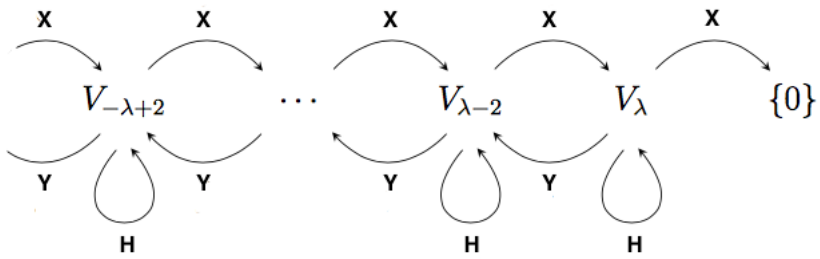
Lemma 2.3 *Sei $v \in V_\lambda$. Dann gilt $Xv \in V_{\lambda+2}$ und $Yv \in V_{\lambda-2}$.*

Beweis:
Es gilt: $H(Xv) = [H, X]v + XHv = 2Xv + \lambda Xv = (\lambda + 2)Xv$. Analog für Y. $\square$.

Definition 2.4 *Sei V_λ ein Gewichtsraum zum Gewicht λ mit $V_\lambda \neq \{0\}$ und $V_{\lambda+2} = \{0\}$. Dann heißt ein von Null verschiedener Vektor in V_λ* ***maximaler Vektor*** *und λ* ***höchstes Gewicht****.*

Die Existenz des maximalen Vektors ist durch $dim(V) < \infty$ und $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ garantiert.

Nach obiger Bemerkung können wir die Wirkung der Basis X, Y, L von L auf den Eigenräumen V_λ durch einen Gewichtsstrang darstellen:



für ein höchstes Gewicht λ.

3 Klassifikation irreduzibler $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-Moduln

Lemma 3.1 *Sei $v_0 \in V_\lambda$ ein maximaler Vektor. Wir setzen $v_k = \frac{Y^k}{k!} v_0$ ($k \in \mathbb{N}$) und $v_{-1} = 0$.*
(1) $Hv_k = (\lambda - 2k)v_k$
(2) $Yv_k = (k+1)v_{k+1}$
(3) $Xv_k = (\lambda - k + 1)v_{k-1}$ für $k \geq 0$

Beweis:
(1) Folgt nach Lemma 2.4 .
(2) Folgt nach Definition.
(3) Wir führen den Beweis durch Induktion über k.
$k = 0$: Klar, denn v_0 ist maximaler Vektor und $v_{-1} = 0$ nach Voraussetzung.
$k \geq 1$: Wir betrachten folgende Termumformungen

$$kXv_k = XYv_{k-1} = [X,Y]v_{k-1} + YXv_{k-1} \overset{\text{IV}}{=} Hv_{k-1} + (\lambda - k + 2)Yv_{k-2}$$
$$\overset{\text{a)}}{=} (\lambda - 2k + 2)v_{k-1} + (\lambda - k + 2)(k-1)v_{k-1} = k(\lambda - k + 1)v_{k-1}$$

Dividieren durch k liefert die Behauptung. □

Folgerung 3.2 *Sei V ein L-Modul. Dann gilt (a) Das Gewicht λ von v_0 ist eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$*
(b) Die Elemente $v_0, ..., v_m$ sind linear unabhängig
(c) $v_i = 0$ für $i > m$

Beweis:
Die Vektoren v_k sind Eigenvektoren von H zu den Eigenwerten $\lambda - 2k$ nach Lemma 3.1 Aussage (1) und insbesondere linear unabhängig falls $\neq 0$. Da nach Voraussetzung $dim(V) < \infty$ existiert ein minimales m, s.d. v_{m+1} linear abhängig von den v_k mit $k \leq m$. Also muss $v_{m+1} = 0$ gelten und damit $v_i = 0$ für $i > m$. Da nun m minimal gewählt ist, gilt nach Lemma 3.1 Aussage (3)

$$0 = Xv_{m+1} = (\lambda - m - 1 + 1)v_m \overset{v_m \neq 0}{\Longrightarrow} \lambda = m$$

□

Folgerung 3.3 *Sei V ein L-Modul. Der Untervektorraum W von V mit Basis $\{v_0, v_1, ..., v_m\}$ ist stabil unter L und ein irreduzibler L-Modul.*

Beweis:
Sei $m \geq 0$ beliebig. Wir wissen, dass die Vektoren $v_0, ..., v_m$ linear unabhängig sind und damit einen Untervektorraum aufspannen.

① Behauptung: Der Untervektorraum $W = \langle v_0, ..., v_m \rangle$ von V ist ein L-Untermodul
Nach Definition reicht es aus, die Abgeschlossenheit bzgl. der Multiplikaktion mit L zu zeigen. Dies folgt bereits nach $1) - 3)$ von Lemma 3.1 und der Existenz eines

$m \in \mathbb{N}$, sodass $v_{m+1} = 0$. Insbesondere gilt wegen $v_0 \in W$, dass $W \neq 0$.

② Behauptung: W ist irreduzibel.
Sei $U \neq \{0\}$ ein irreduzibler L-Untermodul. Dann enthält U mindestens einen Eigenvektor v_k $(0 \leq k \leq m)$. Damit:

$\overset{Lemma\ 3.1,3)}{\Longrightarrow}$ U enthält $v_{k-1}, v_{k-2}, ..., v_0$
$\overset{Lemma\ 3.1,2)}{\Longrightarrow}$ U enthält $v_{k+1}, v_{k+2}, ..., v_m, v_{m+1} = 0, ...$

Also gilt $U = W$. Somit ist W irreduzibel von der Dimension $m + 1$ und durch die Invariante $m \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmt. □

V(m)-Moduln

Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $V(m)$ der Vektorraum der Dimension $m+1$ mit Basis $\{v_0, v_1, ..., v_m\}$. Sei $v_{m+1} = 0 = v_{-1}$. Wir definieren die Endomorphismen X, Y, H auf $V(m)$ via

$$(1)\ Hv_k = (m - 2k)v_k$$
$$(2)\ Yv_k = (k + 1)v_{k+1}$$
$$(3)\ Xv_k = (m - k + 1)v_{k-1}$$

Bemerkung 3.4 *Via den Endomorphismen X, Y und H wird $V(m)$ zu einem L-Modul.*

Satz 3.5 .
(a) $V(m)$ ist ein irreduzibler L-Modul.
(b) Jeder irreduzible L-Modul der Dimension $m + 1$ ist isomorph zu $V(m)$.

Beweis:
(a) Folgt nach Folgerung 3.3 und der Tatsache, dass $V(m)$ von den Bildern von v_0 mit Gewicht $\lambda = m$ erzeugt wird.
(b) Sei V ein irreduzibler L-Modul der Dimension $m + 1$. Da $dim(V) < \infty$ existiert ein maximaler Vektor v_0 mit höchsten Gewicht $m' \in \mathbb{N}$. Nach Folgerung 3.3 ist der L-Untermodul $W \subset V$ von v_0 erzeugt mit Dimension $m' + 1$. Da nun V irreduzibel ist folgt, dass $W = V$ und $m = m'$. Die Isomorphie $V \cong V(m)$ folgt nun nach den Formeln aus Lemma 3.1 . □

3.1 Struktur der endlich dimensionalen L-Moduln

Zusammenfassend erhalten wir nun für die Beschreibung der Struktur endlich dimensionaler L-Moduln folgenden Satz:

Satz 3.6 *Sei $\rho : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ eine irreduzible Darstellung. Dann gilt:*
(1) Jede irreduzible Darstellung (V, ρ) ist isomorph zu einer Darstellung $V(m)$ für $m \in \mathbb{N}_0$.
(2) V ist eine direkte Summe von Gewichtsräumen, d.h. $(V, \rho) = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ mit ganzzahligen $\rho(H)$- Eigenwerten $\lambda \in \{-m, -m+2, ..., m-2, m\}$ mit $dim(V) = m+1$ und $dim(V_\lambda) = 1$, $\forall \lambda$.
(3) V hat (bis auf Skalarmultiplikation $\neq 0$) einen eindeutig maximalen Vektor mit höchsten Gewicht m
(4) Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Dann sind die linearen Abbildungen

$$Y^m : V_m \longrightarrow V_{-m}$$
$$X^m : V_{-m} \longrightarrow V_m$$

Isomorphismen.

Beweis:
(1) Nach Satz 3.5
(2) Folgt aus Lemma 3.1 Aussage (1).
(3) Nach Lemma 3.1 Aussage (1) tritt jedes Gewicht mit Vielfachheit 1 auf und V bestimmt das höchste Gewicht λ=m wegen $m = dim(V) - 1$ eindeutig. Damit ist der maximale Vektor (bis auf Skalarmultiplikation $\neq 0$ der einzig mögliche in V.
(4) Sei $\rho : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V(m))$ eine irreduzible Darstellung mit höchstem Gewicht $m > 0$. Damit ist die Darstellung insbesondere treu, da L einfach ist. Da $\rho(X)$ und $\rho(Y)$ nilpotente Endomorphismen (d.h. es existieren $k', k > 0$: $(\rho(X))^{k'} = 0$ und $(\rho(Y))^k = 0$) können wir die Exponentialreihendarstellung

$$exp(\rho(X)) = 1 + \rho(X) + \frac{\phi(X)^2}{2!} + ... + \frac{\rho(X)^{k'-1}}{(k-1)!}$$
$$exp(\rho(Y)) = 1 + \rho(Y) + \frac{\rho(Y)^2}{2!} + ... + \frac{\rho(Y)^{k-1}}{(k-1)!}$$

betrachten.

Wir betrachten nun zunächst einen allgemeineren Fall:

① <u>Behauptung:</u> Sei D eine nilpotente Derivation von einer Lie-Algebra L, dann gilt

$$exp(D) \in Aut(L)$$

Da D nilpotent existiert ein $k > 0$, sodass $D^k = 0$. Wir erhalten unter Verwendung der Leibnizregel:

$$exp(D(x))exp(D(y)) = (\sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{D^\nu(x)}{\nu!}) \cdot (\sum_{j=0}^{k-1} \frac{D^j(y)}{j!}) = \sum_{n=0}^{2k-2} (\sum_{\nu}^{n} (\frac{D^\nu(x)}{\nu!}) \cdot (\frac{D^{n-\nu}(y)}{n-\nu!}))$$

$$= \sum_{n=0}^{2k-2} \frac{D^n(xy)}{n!} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{D^n(xy)}{n!} = exp(D(xy))$$

Insbesondere ist $exp(D(x))$ invertierbar (konstruiere das Inverse geeignet).

② Behauptung: $exp(x) \cdot y \cdot exp(x)^{-1} = exp(ad_x)(y) = y + [x,y] + \frac{1}{2}[x,[x,y]] + ...$
Sei λ_x die Linksmultiplikation mit x und ρ_{-x} die Rechtsmultiplikation mit x im Ring $End(V)$. Diese kommutieren offensichtlich und sind nilpotent. Wir erhalten:

$$x = exp(\lambda_x + \rho_{-x}) = exp(\lambda_x)exp(\rho_{-x}) = \lambda_{exp(x)} \cdot \rho_{exp(-x)}$$

Wir konstruieren nun einen Automorphismus auf $V(m)$ via

$$\tau = exp(\rho(X))exp(\rho(-Y))exp(\rho(X))$$

Durch Nachrechnen unter Verwendung von ① verifiziert man nun leicht:

$$\tau \circ X = -Y \circ \tau, \quad \tau \circ Y = -X \circ \tau, \quad \tau \circ H = -H \circ \tau$$

Die letzte Identität impliziert nun die Behauptung. □

Folgerung 3.7 *Sei $\rho : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ eine irreduzible Darstellung und $dim(V) = m+1 < \infty$. Dann existiert eine Basis $\{v_0, v_1, ..., v_m\}$ von V, sodass $\rho(X)$, $\rho(Y)$, $\rho(H)$ folgende darstellende Matrizen besitzen*

$$\rho(H) = \begin{pmatrix} m & & & & \\ & m-2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -(m-2) & \\ & & & & -m \end{pmatrix}, \quad \rho(X) = \begin{pmatrix} 0 & m & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 2 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(Y) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & m & 0 \end{pmatrix}$$

□

Folgerung 3.8 *Für jede endlich dimensionale Darstellung (V, ρ) von L ist $\rho(H)$ ein halbeinfacher Endomorphismus .* □

Beispiele:

- **Standarddarstellung**: $(\mathbb{K}^2, id) \cong V(1)$
  Sei $B = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^2$, dann hat H die Eigenwerte 1 und -1 mit korrespondierenden Eigenräumen $\mathbb{K}e_1$ und $\mathbb{K}e_2$ und wir erhalten folgenden Gewichtsstrang:

  $$0 \xleftarrow{Y} \mathbb{K}e_2 \xrightarrow{X} \mathbb{K}e_1 \xrightarrow{X} 0$$

  Die Standarddarstellung ist irreduzibel und aus Dimensionsgründen gilt $(\mathbb{K}^2, id) \cong V(1)$.

- **Adjungierte Darstellung** $ad : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(L)$: $L \cong V(2)$
  Die adjungierte Darstellung ist eine dreidimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ mit Basis $B = \{X, H, Y\}$. Die Eigenwerte von H sind $0, 2$ und -2 mit korrespondierenden Eigenräumen $\mathbb{K}H, \mathbb{K}Y$ und $\mathbb{K}X$ und wir erhalten folgenden Gewichtsstrang:

  $$0 \xleftarrow{Y} \mathbb{K}Y \xrightarrow{X} \mathbb{K}H \xrightarrow{X} \mathbb{K}X \xrightarrow{X} 0$$

  Die adjungierte Darstellung ist irreduzibel und aus Dimensionsgründen gilt obige Isomorphie.

4 Vollständige Reduzibilität endlich dimensionaler Darstellungen

Definition 4.1 *Sei L eine Lie-Algebra. Eine Darstellung $\rho : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ heißt* ***vollständig reduzibel****, wenn es eine Zerlegung*

$$V = W_1 \oplus ... \oplus W_k \qquad (k \in \mathbb{N})$$

in unter ρ invariante irreduzible Unterräume W_i gibt.

Eine direkte Folgerung aus dem Satz von Weyl[1] ist die vollständige Reduzibilität einer endlich dimensionalen Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Wir möchten diese Aussage nun für die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ direkt beweisen.

Satz 4.2 *Sei V ein endlich dimensionaler $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-Modul. Dann ist V vollständig reduzibel.*

Lemma 4.3 *Sei V ein endlich dimensionaler L-Modul. Dann kommutiert*

$$\Omega = \frac{H^2}{2} + XY + YX \quad ^2$$

mit alles Elementen aus L. Insbesondere ist Ω ein L-Modulhomomorphismus.

Beweis:
Sei also $K \in L$. Dann haben wir folgende Identität $\frac{H^2}{2} + XY + YX = \frac{H^2}{2} + H + 2YX$. Einfaches nachrechnen zeigt:

$$\Omega K - K\Omega = \frac{1}{2}H[H,K] - \frac{1}{2}[K,H]H + [H,K] + 2Y[X,K] - 2[K,Y]X = (*)$$

Es reicht nun die Aussage für die Basiselemente von L nachzurechnen. Unter Verwendung der Kommutator-Relationen erhalten wir:

(i) $K = H$: $(*) = 0 - 0 + 0 - 4YX + 4YX = 0$
(ii) $K = X$: $(*) = \frac{1}{2}HX + XH + 2X + 0 - 2HX = 2HX + [X,H] + 2X - 2HX = 0$
(iii) $K = Y$ $(*) = -HY - YH - 2Y + 2YH = -[H,Y] - 2YH - 2Y + 2YH = 0$

Wir haben also $K\Omega(v) = \Omega(Kv)$ für alle $v \in V$ und für $K \in \{X, Y, H\}$. □

Lemma 4.4 *Sei $V(d)$ ein irreduzibler L-Modul. Dann gilt*

$$\Omega(v) = (\frac{d^2}{2} + d) \cdot v \qquad mit\ v \in V(d)$$

[1] (Weyl's Theorem) Sei L eine halbeinfache Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null. Dann ist jede endlich dimensionale Darstellung von L vollständig reduzibel.

[2] Casimir-Operator

Beweis:
Nach dem Lemma von Schur wirkt der Operator Ω als ein Skalar λ_d auf dem irreduziblen Modul $V(d)$. Sei also $v_0 \in V(d)$ der maximale Vektor, dann haben wir mit Lemma 3.1:

$$\Omega(v_0) = (\tfrac{H^2}{2} + H + 2YX)v_0 = \tfrac{H^2}{2}v_0 + Hv_0 + 2YXv_0 = \tfrac{d^2}{2}v_0 + dv_0 + 0 = (\tfrac{d^2}{2} + d)v_0$$

Seien nun $\lambda_1, ..., \lambda_r$ ($r \in \mathbb{N}$) die verschiedenen Eigenwerte von Ω auf dem endlich dimensionalen L-Modul V. Dann haben wir folgende Zerlegung

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker(\Omega - \lambda_i id_V)^{m_i}$$

mit Vielfachheiten m_i. Beachte, dass V eine direkte Summe von L-Moduln ist. Im Folgenden können wir daher annehmen, dass Ω nur einen Eigenwert λ hat.

Lemma 4.5 *Der Eigenwert λ hat die Form $\lambda = \frac{1}{2}d(d+2)$ für eine natürliche Zahl d und jeder irreduzible Untermodul $N \subset V$ ist isomorph zu $V(d)$ Ferner ist für jeden Untermodul $N \subset V$ jeder irreduzible Untermodul $U \subset V/N$ isomorph zu $V(d)$.*

Beweis:
Nach Lemma 3.12 wissen wir, dass Ω auf dem irreduziblen Untermodul $V(d)$ als Multiplikation $\frac{d^2}{2}+d$ operiert. Da nach unser obigen Annahme Ω nur einen Eigenwert auf dem L-Modul V besitzt, muss bereits $\lambda = \frac{d^2}{2} + d$ gelten.
Angenommen $W \cong V(d')$ ist ein weiterer irreduzibler Untermodul von V. Da λ der eindeutige Eigenwert von Ω auf V ist, muss bereits gelten, dass

$$\frac{d^2}{2} + d = \frac{d'^2}{2} + d',$$

also $d = d'$.
Da nun N ein L-Untermodul von V ist, betrachte die Wirkung von Ω auf dem Quotientenraum V/N,

$$\Omega(v + N) = (\frac{H^2}{2} + XY + YX) \cdot (v + N)$$

Wegen $V = Ker(\Omega - \lambda id_V)^m$ für ein $m \geq 0$, haben wir

$$(\Omega - \lambda 1_V)^m(v + N) = 0 \quad , \forall v \in V$$

Damit hat Ω nur einen Eigenwert, nämlich λ, in dem Quotientenraum V/N. Analog zu oben gezeigten ist nun jeder irreduzible Untermodul vom V/N isomorph zu $V(d)$.

Beweis von Satz 3.10:
Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Sei $U \subset V$ ein vollständig reduzibler Untermodul maximaler Dimension. Angenommen $U \subsetneq V$. Dann haben wir

- Es existiert ein $v \in V/U$ mit $Hv = dv$ und $Xv = 0$:
  Offensichtlich ist der Quotientenmodul V/U nicht leer. Damit hat V/U einen irreduziblen Untermodul, welcher isomorph zu $V(d)$ ist. Betrachten wir das höchste Gewicht von H in diesen Untermodul, so muss ein Eigenvektor existieren mit Eigenwert d. Da H diagonal wirkt existiert ein $v \in V/U$, sodass $Hv = dv$. Falls nun $Xv \neq 0$, ist Xv ein Eigenvektor von H zum Eigenwert $d + 2$, was der Maximalität von d widerspricht. Also $Xv = 0$ und v ist der maximale Vektor zum höchsten Gewicht d.
- Der von v erzeugte Untermodul $W \subset V$ ist irreduzibel: Klar!
- $U \oplus W$ ist ein vollständig reduzibler $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-Modul: Klar!

Da nun W irreduzibel ist und $U \cap W = \{0\}$, ist $U \oplus W$ ein echt größerer vollständig reduzibler Untermodul von V, was ein Widerspruch zur Maximalität von U darstellt. Also haben wir $U = V$ und damit ist V als $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-Modul vollständig reduzibel. $\square$

Beachte, dass obiger Satz für den Fall eines Körpers mit positiver Charakteristik falsch ist.

Gegenbeispiel für den Fall positiver Charakteristik:
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $char(\mathbb{K}) = p \geq 3$. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{K}[x, y]$ in zwei Unbestimmten. Dann ist

$$\rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{K}[x, y])$$

eine Darstellung via

$$\rho(X) = x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \rho(Y) = y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \rho(H) = x \cdot \frac{\partial}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial}{\partial y}$$

Betrachten wir allerdings den Unterraum $W = \langle x^p, y^p \rangle \subset \mathbb{K}[x, y]$, dann ist ρ auf W identisch Null, das heißt es existieren keine direkten, invarianten Summen von W in $\mathbb{K}[x, y]$.

5 Anhang

Definition 5.1 *Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und A eine R-Algebra. Eine (R-lineare)* ***Derivation*** *von A ist eine Abbildung $D : A \longrightarrow A$, die folgende Eigenschaften für alle $a_1, a_2 \in A$ erfüllt*

$$D(a_1 \cdot a_2) = D(a_1) \cdot a_2 + a_1 \cdot D(a_2)$$

und es gilt $D(r \cdot a) = r \cdot D(a)$ für alle $a \in A, r \in R$.

Beispiel:
Auf der Lie-Algebra L definiert die Abbildung

$$ad_X : L \longrightarrow L; \quad Y \mapsto [X, Y]$$

einer Derivation von L.

Definition 5.2 *Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Ein Endomorphismus $\varphi : V \longrightarrow V$ heißt* ***halbeinfach****, falls der durch Skalarerweiterung mit einem Zerfällungskörper $\mathbb{K}'$ seines charakteristischen Polynoms entstehende Endomorphismus*

$$\varphi_{\mathbb{K}'} = \mathbb{K}' \otimes_{\mathbb{K}} \varphi : V_{\mathbb{K}'} \longrightarrow V_{\mathbb{K}'}$$

des $\mathbb{K}'$-Vektorraums $V_{\mathbb{K}'} = \mathbb{K}' \otimes_{\mathbb{K}} V$ diagonalisierbar ist.

Bemerkung 5.3 *Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist Halbeinfachheit äquivalent zu Diagonalisierbarkeit.*

Literatur

[J. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer (1972)]

[K. Erdmann,M. J. Wildon, Introduction to Lie Algebras,Springer-Verlag, 2006.]

[R. Weissauer: Lie Algebren, Skriptum]