Übungen zur Mathematik für Physiker — Blatt 6

Prof. Dr. R. Weissauer
Dr. K. Maurischat

Wintersemester 2011/12
Abgabe: 2. Dez. 2011, 11.14 Uhr

Es sei $L^2(\mathbb{N}) := \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 < \infty\}$ die Menge aller quadratsumierbaren Folgen mit Werten in $\mathbb{C}$.

28. Aufgabe: (4 Punkte) Zeigen Sie direkt, ohne die Aussagen der Vorlesung (bzw. Kap. 6.2):

(a) $L^2(\mathbb{N})$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

(b) Die Vorschrift $\langle a, b\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} b_n$ definiert eine positiv definite hermitesche Form auf $L^2(\mathbb{N})$.

(c) $\|a\| := \sqrt{\langle a, a\rangle}$ definiert eine Norm auf $L^2(\mathbb{N})$.

29. Aufgabe: (4 Punkte) Zeigen Sie, ohne den Satz von Fischer-Riesz zu verwenden: $L^2(\mathbb{N})$ ist vollständig bezüglich $\|\cdot\|$.
Anleitung: Es sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $x^k = (x_i^k)_{i\in\mathbb{N}}$, eine Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass (x^k) komponentenweise konvergiert. Sei $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ der Folge dieser Limiten. Zeigen Sie für alle endlichen Summen

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i^k - x_i|^2 \leq \limsup_{l\to\infty}\|x^k - x^l\|^2.$$

Folgern Sie hieraus, dass $x \in L^2(\mathbb{N})$ und $x^k \to x$ in $L^2(\mathbb{N})$.

30. Aufgabe: (4 Punkte) Für $i \in \mathbb{N}$ sei $e^i \in L^2(\mathbb{N})$ definiert durch $e^i_j = \delta_{ij}$.
Es gelten die vorigen Bezeicnungen.

(a) Zeigen Sie für $x \in L^2(\mathbb{N})$ (mit den vorigen Bezeichungen)

$$0 \;\leq\; \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}|\langle e^i, x\rangle|^2 \;=\; \|x - \sum_{i=1}^{n}\langle e^i, x\rangle e^i\|^2.$$

(b) Zeigen Sie $x = \sum_{i=1}^{\infty}\langle e^i, x\rangle e^i$.

(c) Zeigen Sie, $\{e^i\}$ ist eine Hilbertraum-Basis von $L^2(\mathbb{N})$.
Warum ist $\{e^i\}$ keine Basis im Sinne der Linearen Algebra?

31. Aufgabe: (4 Punkte) Für $t \in [0, 1]$ setzt man

$$p(t) \;=\; t^2 - t + \frac{1}{6}$$

und setzt p auf $\mathbb{R}$ periodisch fort durch $p(t + 1) = p(t)$.
Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von p nach der Entwicklung $\exp(2\pi int)$.