Große Übung

9.11.11

Subst. regel: Sei φ ein Koordinatenwechsel, d.h.

$$\left[\begin{array}{l} \varphi : U \to V, \quad U, V \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}, \\ \varphi \text{ bij., stetig part. diffbar} \\ \text{mit } \det D\varphi(x) \neq 0 \quad \text{f.a. } x \in U. \end{array}\right.$$

Liegt dann $f : V \to \mathbb{R}$ in $\mathcal{C}_c(V)$, $(L(V))$,

dann liegt auch $f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|$ in $\mathcal{C}_c(U)$ $(L(U))$

und es gilt

$$\int_V f(y)\, dy = \int_U f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|\, dx.$$

Aufgabe: $\operatorname{vol}(K_R(0)) = \operatorname{vol}(K_1(0)) \cdot R^n$, wo $K_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$

Bew.:
$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x_1, \dots, x_n)^T \longmapsto (Rx_1, \dots, Rx_n)^T = \begin{pmatrix} R & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

lin. Abb mit $\det = R^n \neq 0$, also φ bijektiv, stetig diffbar,

mit $D\varphi = \varphi$ und $\det D\varphi = R^n > 0$ für alle $R > 0$.

Sei $f(x) = \chi_{K_R(0)}(x)$.

Dann ist $f(\varphi(x)) = \chi_{K_R(0)}((Rx_1, \dots, Rx_n)^T) = \chi_{K_1(0)}((x_1, \dots, x_n)^T)$,

denn $\|(Rx_1, \dots, Rx_n)^T\|^2 = R^2(x_1^2 + \dots + x_n^2) = R^2 \cdot \|x\|^2$.

Also gilt $\operatorname{vol}(K_R(0)) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{K_R(0)}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{K_1(0)}(x) \cdot R^n\, dx = R^n \operatorname{vol}(K_1(0))$.

Satz v. Beppo Levi:

Es sei $f_n \nearrow f$ mit einer Folge integrierbarer Funktion f_n.
(d.h. f_n ist pktweise mon. wachsende Folge mit „Grenzfkt" f).

Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} I(f_n) < \infty$ existiere.

(oder: $\sup\limits_n I(f_n) < \infty$)

Dann ist f integrierbar mit

$$I(f) = I\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$$

$$\left(= I\left(\sup_n f_n\right) = \sup_n I(f_n)\right).$$

Aufgabe: Zeigen Sie, die Fkt $f:(0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^{-\frac{1}{2}}$
ist L-intbar auf $[0,1]$ und berechnen sie ihr Integral.

Es sei $f_n(x) = \chi_{[\frac{1}{n},1]}(x)\, x^{-\frac{1}{2}}$. Dann ist $f_n \in C(X)$ und

es gilt $f_n \nearrow f$.

$$\int_{[0,1]} f_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\, x^{1-\frac{1}{2}}\Big|_{\frac{1}{n}}^{1} = 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \text{ also}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{[0,1]} f_n\right) = \lim_{n\to\infty} 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2$$

Nach Beppo Levi ist f integrierbar mit $\int_{[0,1]} f = 2$.

Satz von Lebesgue / von der dominierten Konvergenz

Es sei f_n eine pktweise gegen f konvergente Folge von integrierbaren Funktionen auf X. Es sei $|f_n| \leq F$ für alle n für eine auf X integrierbare Funktion F.

Dann ist f integrierbar und es gilt $I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$.

Anwendung: Es sei $f_n(x) = e^{n(x^2-x)}$, $f: [0,1] \to \mathbb{R}$.

Zeige: $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$.

Bew.: Wollen S.v.d.dom.Konv. anwenden.

Zunächst sind die f_n int.bar, weil sie stetige Fkten auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ sind.

Es gilt
$$\left.\begin{aligned} f_n(1) &= e^{n(1-1)} = e^0 = 1 \\ f_n(0) &= e^{n(0-0)} = e^0 = 1 \end{aligned}\right\} \text{ für alle } n$$

und für $x \in (0,1)$ ist $x^2 - x < 0$, also $0 < f_n(x) < 1$

Also ist $|f_n| \leq 1$ für alle n und $\int_{[0,1]} 1\,dx = \int \chi_{[0,1]} = 1$.

Weiter ist $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0,1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Für f gilt nach S.v.d.dom.Konv.:
$$\int_{[0,1]} f = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Aber $\int_{[0,1]} f = 0$, weil $f = 0$ außer auf der 0-Menge $\{0,1\}$.

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0.$$

Beachte: Wir haben keines der Integrale $\int_0^1 f_n$ berechnet!

Def. der Cartan-Ableitung: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $A^j(U)$ Raum d. alternierenden j-Formen auf U.

Cartan-Ableitung $d: A^j(U) \longrightarrow A^{j+1}(U)$

Sei $\omega = \sum_{|J|=j} \omega_J \, dx_J \in A^j(U)$ bel., d.h. $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ $= \{i_1, \dots, i_j\}$

$\omega_J \in C^\infty(U)$,

$dx_J = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_j}$,

$i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq x_{i_j}$

Dann ist $$d\omega := \sum_{k=1}^n \sum_{|J|=j} \partial_{x_k}(\omega_J) \, dx_k \wedge dx_J .$$

Produktformel der Cartan-Abl.: Sei $\eta \in A^j(U)$, $\omega \in A^\circ(U)$ bel. Dann ist
$$d(\eta \wedge \omega) = d\eta \wedge \omega + (-1)^j \eta \wedge d\omega .$$

Berechne: • $d(x_1^2 + x_2^2) = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k}(x_1^2 + x_2^2) \, dx_k = 2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2$

• $d(x_2 dx_1 + x_1 dx_2) = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k}(x_2) dx_k \wedge dx_1 + \sum_{k=1}^n \partial_{x_k}(x_1) dx_k \wedge dx_2$
$= dx_2 \wedge dx_1 + dx_1 \wedge dx_2 \underset{\text{(altern.)}}{=} 0$

• $d(x_1 x_2 dx_1 + x_1 x_2 dx_2) = \sum_{k=1}^n \partial_k(x_1 x_2) dx_k \wedge (dx_1 + dx_2)$
$= x_2 dx_1 \wedge dx_1 + x_2 dx_1 \wedge dx_2$
$+ x_1 dx_2 \wedge dx_1 + x_1 dx_2 \wedge dx_2$
$\overset{\text{altern.}}{=} (x_1 - x_2) \, dx_1 \wedge dx_2$

• $d(f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = 0$, da $d: A^n(U) \to A^{n+1}(U) = 0$

Poincaré-Lemma: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sternförmig. $\omega \in A^j(U)$ mit $d\omega = 0$. Dann:

Für $j > 0$: Es ex. $\eta \in A^{j-1}(U)$ mit $d\eta = \omega$

Für $j = 0$: ω ist lokal konstant (bzw. konstant, da $\omega \in C^\infty(U)$ stetig + lk const, U zshg.)

$$\varphi: U \longrightarrow V$$

Pullback: ∘ Definierende Eigenschaften $\quad \varphi^*: A^\circ(V) \to A^\circ(U)$

- $d \circ \varphi^* = \varphi^* \circ d$
- $\mathbb{R}$-linear $\quad \varphi^*(\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2) = \lambda_1\varphi^*(\eta_1) + \lambda_2\varphi^*(\eta_2) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \eta_1, \eta_2 \in A^\circ(V)$
- multipl.: $\quad \varphi^*(\eta_1 \wedge \eta_2) = \varphi^*(\eta_1) \wedge \varphi^*(\eta_2) \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in A^\circ(V)$
- $f \in A^\circ(V)$: $\quad \varphi^*(f)(u) = f(\varphi(u))$

$V \subset \mathbb{R}^n$ mit Koord. $x_1, \dots, x_n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ mit Koord. $y_1, \dots, y_m$

$\Rightarrow$ Daraus folgt $\quad \varphi^*(dy_k) = \sum_{l=1}^{n} \underbrace{\partial_{x_l}(\varphi_k(x))}_{(D\varphi(x))_{kl}} dx_l$

Sei $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \leftarrow$ Koord. x, y

$\qquad t \longmapsto (t^2, e^t)$

Berechne $\varphi^*(x)$: $\quad \varphi^*(x)(t) = x(\varphi(t)) = t^2$

$\qquad \varphi^*(y)$: $\quad \varphi^*(y)(t) = y(\varphi(t)) = e^t$

$$\varphi^*(dx) = d\varphi^*(x) = d(t^2) = \frac{d}{dt}(t^2) \cdot dt = 2t \cdot dt$$

$$\varphi^*(dy) = d\varphi^*(y) = d(e^t) = e^t \cdot dt$$

Aufgabe:

Berechne $\varphi^*(dx \wedge dy) = d\varphi^*(x) \wedge d\varphi^*(y) = 2t\,dt \wedge e^t dt = \underbrace{2te^t dt \wedge dt}_{=0}$

Oder: $\varphi^*: A^2(V) \longrightarrow A^2(U)$ für $U = \mathbb{R}$ 1-dim gilt $A^2(\mathbb{R}) = 0$

$\qquad \Rightarrow \varphi^*(dx \wedge dy) = 0.$

Aufgabe: Berechne $\varphi^*(x^2 dx + xy\,dy + \ln y\,dy)$

$= (t^2)^2\, 2t\,dt + t^2 e^t e^t dt + \ln(e^t) e^t dt$

$= (2t^5 + t^2 e^{2t} + te^t) dt$