große Übung vom 7.12.2011 folgt der

Bitte, noch einmal Einstieg in L^2-Theorie zu ermöglichen.

Als Ganzes im Detail unmöglich in 90 min, aber vielleicht gelingt mir ein (physikalisch) motivierter Überblick.

∘ Hilbertraum: Ein (unendlichdim.) $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-VR H ausgestattet mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ (pos. def. hermit. Form) so, dass H bzgl. der induzierten Norm $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ $(f \in H)$ vollständig ist.

Der Begriff d. HRs entstand als axiomatisches System ($\sim$ 1930, Riesz, Stone, v. Neumann), um den mathematischen Anforderungen der Quantenphysik zu entsprechen!

[Man brauchte z.B. für die Beschreibung von Zuständen quadratische Formen auf unendl. dim. Funktionenräumen, $\langle f, f \rangle$ ist so eine quad. Form. Dann wird eine Observable dargestellt durch einen (selbstadjungierten) Operator $\mathcal{O}$: $\langle g, \mathcal{O}f \rangle = \langle \mathcal{O}g, f \rangle$, mögliche Zustände sind die Eigenvektoren von $\mathcal{O}$, gemessen werden/wird dann der EWa: $\mathcal{O}f = af$.]

„$\mathcal{O}|f\rangle = a|f\rangle$“

- Wichtigstes Beispiel für einen unendl. dim. HR: $L^2(X, \mathbb{C})$.

Sei $C_c(X, \mathbb{C})$ wie gehabt. Definiere $\langle f, g \rangle = \int_X \overline{f(x)} \cdot g(x)\, dx$.

Es gilt für alle $f \in C_c(X, \mathbb{C})$: $\|f\|_{L^2}^2 = \langle f, f \rangle < \infty$.

Aber: Grenzwerte von Folgen in $C_c(X, \mathbb{C})$ müssen nicht wieder in $C_c(X, \mathbb{C})$ liegen!

Vergrößere den Raum zu $\mathcal{L}^2(X, \mathbb{C}) = \{ f : X \to \mathbb{C} \text{ meßbar} \mid \underbrace{|f|^2 \in L(X)}_{\text{d.h. } \|f\|_{L^2}^2 < \infty} \}$.

Auf $\mathcal{L}^2(X, \mathbb{C})$ ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine pos. semidefinite Hermitesche Form.

Es ist $\langle f, f \rangle = 0 \iff$ Träger von f ist 0-Menge in X.
$\iff$: f ist eine Nullfkt

Setze $L^2(X, \mathbb{C}) = \mathcal{L}^2(X, \mathbb{C}) / \text{Vektorraum d. Nullfunktionen}$, dann ist $\|f\|_{L^2} := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ eine Norm!

D.h.: Die Elemente von $L^2(X, \mathbb{C})$ sind Äquiv. kl. quad. int. Funktionen, wobei $f \sim g \iff f - g$ ist Nullfkt.

Satz (Fischer-Riesz): „Für gute X" ist $L^2(X, \mathbb{C})$ bzgl. $\| \cdot \|_{L^2}$ vollst.

Bew.: schwierig, geprägt von Reduktionen auf Spezialfälle, Diagonalfolgen, ...

Satz (Weierstrass): $C_c(X, \mathbb{C})_{/\sim} \subseteq L^2(X, \mathbb{C})$.

Gewonnene Vorteile gegenüber $C_c(X, \mathbb{C})$, (Standardintegral)
- Vollständigkeit
- Vertauschung von Grenzprozessen durch Lebesgue-Integral!
- „Richtige Räume" für Quantentheorie, Fourieranalyse, ...

- Zitate aus der Quanten-Physik:

(1) φ Wellenfunktion eines Teilchens $\rightsquigarrow$ $|\varphi(x)|^2$ Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Ort x.

$$\Rightarrow \int_X |\varphi(x)|^2 \, dx = 1 \quad \text{(Irgendwo muß das Teilchen ja sein!)}$$

Also: $\|\varphi\|^2_{L^2(X)} = 1$, also $\varphi \in L^2(X)$ ist eine natürliche Forderung!

(2) Heisenbergsche Ungleichung [$\rightsquigarrow$ Unschärfe Relation]:

ψ: Wellenfkt, $|\psi(x)|^2$: Wahrsch.-Dichte Ort

$|\hat{\psi}(y)|^2$: Wahrsch.-Dichte Impuls

$$\underbrace{\|x\cdot\psi\|}_{\text{„Ausdehnung von Ortswolke"}} \cdot \underbrace{\|y\cdot\hat{\psi}\|}_{\text{„Ausdehnung von Impulswolke"}} \geq \frac{1}{4\pi}\|\psi\|^2 \quad \text{(nächstes Ü-Blatt!)}$$

$\rightsquigarrow$ Ort u. Impuls können nicht gleichzeitig bel. genau gemessen werden

- Zitate auch aus klass. Physik:

(1) Sei X = Zeitintervall $\rightsquigarrow$ $|f(t)|^2 \cdot \Delta t$: pro Zeiteinheit Δt abgestrahlte Energie

$$\Rightarrow E = \int_X |f(t)|^2 \, dt = \|f\|^2_{L^2}$$

gesamte abgestrahlte Energie im Zeitintervall X.

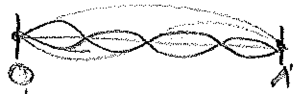
(2) Parseval/Plancherel-Identität:

$$\int |f(t)|^2 \, dt = \int |\hat{f}(\nu)|^2 \, d\nu, \quad \text{(Fouriertransformierte)}$$

dabei wird $|\hat{f}(\nu)|^2 \Delta\nu$ als pro Frequenzintervall $\Delta\nu$ ausgestrahlte Energie begriffen. $\int |f(\nu)|^2 \, d\nu$: Zerlegung in harmon. Schwingungen

$\Rightarrow$ Gesamtenergie $= \sum$ Energie d. harmonischen Komponenten

(3) Tonerzeugung: Eingespannte Saite (a Tonsäule)



Die Amplitude A ist eine 1-periodische Fkt!

$$A(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp(2\pi i n x) \quad \text{Fourierentw.!}$$

$$\overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x)$$

$A(0) = A(1) = 0$; b_n reelle Koeff., da alle harmon. Bestandteile reellen Auslenkungen entsprechen.

Will man den Ton (elektronisch) speichern, so kann man nur endl. viele Fourierkoeff. speichern

$$A(x) \sim A_N(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n \sin(2\pi n x),$$

wobei N so groß gewählt werden sollte, dass das Ohr den Unterschied $A(x) - A_N(x)$ nicht mehr erkennen kann.

[⇝ Alte Kämpfe der Verfechter der analogen Aufnahmetechnik gegen die der digitalen.]

[Ebenso: Bildspeicherung: Frequenzabstufungen ...]

- Fourierentwicklung, $L^2(\mathbb{Z})$-Folgenraum:

  siehe letzte Stunde

- Satz von Stone-Weierstrass:

  ([illegible]): X kompakt; P eine Unteralgebra der Algebra $C(X)$ der stetigen reellen (kompl.) Fkten auf X mit (in der Vorl. A)

  (i) Punkteseparation: zu jeden $x, y \in X$ ex. $f \in P$ mit $f(x) \neq f(y)$

  (ii) in keinem Pkt versch.: zu $x \in X$ ex. $f \in P$ mit $f(x) \neq 0$.

  (iii) Für $f \in P$ ist $\bar{f} \in P$.

  Dann liegt P dicht in $C(X)$.

Bsp.: $\mathcal{P} = \mathcal{P}(X)$ = Algebra der Polynome auf $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. } → s. 5b

Die Polynome auf einer kompakten Teilmenge X des $\mathbb{R}^n$ liegen dicht in $C(X)$.

‖ Also: Jede stetige Fkt auf X läßt sich durch Polynome approximieren.

Folg.: X kompakt. Dann liegen die Polynome dicht in $L^2(X)$.

Denn $\mathcal{P}(X) \underset{\text{dicht}}{\subseteq} C(X) \underset{\text{dicht}}{\subseteq} L^2(X) \Rightarrow \mathcal{P}(X) \underset{\text{dicht}}{\subseteq} L^2(X)$

[Diagonalfolgen-Argument!]

Also: Jede L^2-Fkt läßt sich (bzgl. $\| \ \|_2$) durch Polynome approximieren, wenn $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt.

- Fourier-Transformierte: $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i x y}\, dx$$

Allerdings muß $\hat{f}$ nicht wieder zu $L^1(\mathbb{R})$ gehören → nächstes Ü-Blatt!

Gute Eigenschaften hat die F-Transf. auf den Schwartzfkten, d.h. auf Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
- unendlich oft diffbar
- $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall$ Polynome P:

$$\lim_{|x| \to \infty} |P(x) \cdot f^{(n)}(x)| = 0 \quad (\text{„stark abfallend"})$$

Bsp.: $f(x) = e^{-ax^2 - bx - c}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ $(\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C})$ einer Fkt f auf $\mathbb{R}$ ist das kontinuierliche Analogon einer Fourier-Entwicklung $\hat{g}: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ einer period. Fkt g:

$$\hat{g}: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \quad \hat{g}(k) = \int_0^1 g(t)\, e^{-2\pi i k t}\, dt$$

$$\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{2\pi i x t}\, dt$$

Erläuterungen zum Begriff einer Algebra

Def.: Eine Algebra A ist eine additive Gruppe, die versehen ist mit einer Multiplikation „$\cdot$“

$$„\cdot“ : A \times A \longrightarrow A$$
$$(f, g) \longmapsto f \cdot g$$

[Mit Eins: Es ex. ein Element (sog. 1) in A so, dass für alle $f \in A$ gilt $1 \cdot f = f \cdot 1 = f$.]

[$\mathbb{R}$- / $\mathbb{C}$- Algebra: $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, $\forall f \in A$: $\lambda \cdot f \in A$.]

Bsp.: (a) $A = \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ← oder $\mathbb{C}$, oder $\mathbb{Z}$, ...

Die quad. Matrizen bilden eine additive (sogar VR!) Gruppe, d.h.

$\forall\ M, N \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ist
- $M + N \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- $M + (-M) = 0$, wo
- $0 = (0)_{i,j=1,n} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$

und $(-M)_{ij} = -M_{ij}$, also $-M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Die Multipl. „$\cdot$“ ist die normale Matrizenmultiplikation

$$1 = 1\!\!1_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

$\mathbb{R}$-Alg.: $(\lambda M)_{ij} = \lambda \cdot M_{ij} \rightsquigarrow \lambda \cdot M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$

(b) $C(X)$, $C(X, \mathbb{C})$ $\}$: Stetige Fkten bilden add. Gruppe (sogar VR / $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), wenn man Addition und Multipl. punktweise definiert: $f, g \in C(X) \Rightarrow$
$$\left.\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x)\end{aligned}\right\}\ \text{f.a. } x \in X$$

$f \equiv 1$ ist als konstante Fkt auch stetig und $1 \cdot g = g \cdot 1$ für alle $g \in C(X)$

$\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$: $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x) \Rightarrow \lambda \cdot f \in C(X)$.

Bew. der Auss.: $\mathcal{P}(X)$ Menge der Polynome bilden Unteralgebra von $C(X,\mathbb{C})$ mit (i) – (iii):

Jedes $P \in \mathcal{P}(X)$ hat die Form $P(x) = \sum_{\substack{\text{endl. viele}\\ \alpha}} a_\alpha x^\alpha$,

wo $a_\alpha \in \mathbb{C}$ feste Koeff. und

α ein Multiindex, d.h. α besteht aus $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0$

mit $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

- Sei $P_1(x) = \sum_{\substack{\text{endl}\\ \alpha}} a_\alpha x^\alpha$, $P_2(x) = \sum_{\text{endl} \beta} b_\beta x^\beta$.

  $\Rightarrow (P_1 + P_2)(x) = \underbrace{\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha + \sum_\beta b_\beta x^\beta}_{\text{endl. Summe}}$, also $P_1 + P_2 \in \mathcal{P}(X)$
- $0 = 0 \cdot x^\alpha$ (für bel. α), also $0 \in \mathcal{P}(X)$
- $1 = 1 \cdot x^0$, also $1 \in \mathcal{P}(X)$
- $-P_1(x) = \sum_\alpha (-a_\alpha) x^\alpha$, also $-P_1 \in \mathcal{P}_X$
- $P_1 \cdot P_2(x) = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta x^\alpha \cdot x^\beta = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta x^{\alpha+\beta}$, also $P_1 \cdot P_2 \in C(X,\mathbb{C})$

  $\lambda \cdot P_1(x) = \sum_\alpha \lambda a_\alpha x^\alpha \Rightarrow \lambda \cdot P_1 \in \mathcal{P}(X)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. endl. Summe

$\Rightarrow \mathcal{P}(X)$ ist eine Algebra.

Die „+" und „·" wie in $C(X,\mathbb{C})$ und da offensichtl. $\mathcal{P}(X) \subset C(X,\mathbb{C})$ ist $\mathcal{P}(X)$ U-Alg. von $C(X,\mathbb{C})$.

(i) Sei $x \neq y$, $x, y \in X$. Dann ex. $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $x_i \neq y_i$.

Wähle $P(x) = x_i \in \mathcal{P}(X) \Rightarrow P(x) = x_i \neq y_i = P(y)$

(ii) Es ist $1 \in \mathcal{P}(X)$ und $1(x) = 1 \neq 0$ f.a. $x \in X$.

(iii) Sei $P \in \mathcal{P}(X)$ bel. Dann ist $\overline{P(x)} = \overline{\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha} = \sum_\alpha \overline{a_\alpha x^\alpha} \underset{\uparrow}{=} \sum_\alpha \overline{a_\alpha} x^\alpha$

$X \subseteq \mathbb{R}^n$, also alle $x_i \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow x^\alpha \in \mathbb{R}$

mit $\overline{a_\alpha} \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \overline{P} \in \mathcal{P}(X)$

■