Große Übung 30.11.2011

Eine abzählbare HRB ist zwar keine „richtige Basis" (LA), macht aber den (unendl. dim.) Hilbertraum greifbar:

Satz 6.6: $\{v_n\}$ abzb. HRB von $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, dann ist

$$\iota : L^2(\mathbb{Z}_{\mathbb{N}}) \longrightarrow H$$
$$a = (a_n)_n \longmapsto \sum a_n v_n$$

ein isometrischer Isomorphismus von Hilberträumen

$$\|a\|_{L^2(\mathbb{Z}_{\mathbb{N}})} = \|\iota(a)\|_H$$

injektiv, surjektiv, linear

Und den Folgeraum $L^2(\mathbb{Z})$ ($L^2(\mathbb{N})$) „verstehen" wir! (Übungsblatt)

Hindernisse, Fehlerquellen unserer Intuition:

Die betrachteten Skalenräume sind unendlich-dimensional!

Dabei kann es passieren, dass

(i) Eine injektive lin. Abb $V \longrightarrow W$ mit $\dim V = \dim W = \infty$ nicht surjektiv ist.

(ii) Eine surjektive ——— „ ——— nicht injektiv ist.

(iii) Eine lin. Abb. $\varphi_i : V_i \longrightarrow W$, $V_i \subseteq V$ endl. dim, ②

$V = \text{HR}\,\text{span}_i\langle V_i\rangle$, $\varphi_i|_{V_i\cap V_j} = \varphi_j|_{V_i \cap V_j}$, sich nicht

auf ganz V fortsetzen läßt.

[Auf $\text{span}(V_i)$ = VR-Erzeugnis gibt es diese Fortsetzung, aber nicht notw. auf $V = \text{HR}\,\text{span}\langle V_i\rangle$]

Beispiele: $V = W = L^2(\mathbb{N})$, $e^i \in L^2(\mathbb{N})$ mit $e^i_j = \delta_{ij}$,

($\ddot{\text{U}}$-Bl.: e^i bilden HRB). $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

(i) $\varphi : L^2(\mathbb{N}) \longrightarrow L^2(\mathbb{N})$

$e^i \longmapsto e^{i+1}$ (linear. fortgesetzt)

φ ist linear, injektiv, aber nicht surjektiv, weil

$e^1 \notin \varphi(L^2(\mathbb{N}))$

(ii) $\varphi : L^2(\mathbb{N}) \longrightarrow L^2(\mathbb{N})$

$$\left.\begin{array}{l} e^{2i} \longmapsto e^i \\ e^{2i+1} \longmapsto e^i \end{array}\right\} \text{(linear fortgesetzt)}$$ ist nicht injektiv,

aber lin, surj.

(iii) $V_i = \mathbb{C}\cdot e^i$, $L^2(\mathbb{N}) = \text{HR}\,\text{span}\langle e^i_i\rangle$,

$\varphi_i : V_i \longrightarrow L^2(\mathbb{N})$, $\varphi_i(e^i) = i \cdot e^i$.

Die lineare Fortsetzung der φ_i auf $L^2(\mathbb{N})$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^n \overset{\varphi}{\longmapsto} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot e^n,$$

aber $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n e^n$ muß nicht zu $L^2(\mathbb{N})$ gehören, z.B.:

$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \|\sum \frac{1}{n} e^n\| = \sqrt{\sum \frac{1}{n^2}} < \infty$, also $\sum \frac{1}{n} e^n \in L^2(\mathbb{N})$,

aber $\|\sum \frac{1}{n}\cdot n e^n\| = \|\sum e^n\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} 1} = \infty$, also

$$\varphi\left(\sum \tfrac{1}{n} e^n\right) \notin L^2(\mathbb{N}).$$

$\Rightarrow$ Forts. zu. lin. Abb. $\varphi : L^2(\mathbb{N}) \to L^2(\mathbb{N})$ nicht möglich!

Also: Eine Abb., die auf einer HRB geg. ist, läßt sich nicht immer zu einer lin. Abb. auf dem HR fortsetzen!

Fourier - Entwicklung

Betrachtet man die stetigen Flten mit Periode 1 auf $\mathbb{R}$, $f(t+1)=f(t)$ für alle $t\in\mathbb{R}$,

So entsprechen diese Flteng auf dem Einheitskreis $S^1=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$ vermöge $z = e^{2\pi i t}$, also $f(t) = g(e^{2\pi i t})$ $(*)$

Da die Flten $e^{2\pi i n\cdot t}$, $n\in\mathbb{Z}$, eine HRB von $L^2(S^1)$ bilden, liefert $(*)$ für die Entwicklung nach der HRB eine Reihenentwicklung für f, die sog. Fourierentwicklung:

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n t},$$

$$a_n = \int_0^1 f(t)\, e^{-2\pi i n t}\, dt \qquad \text{und}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 = \int_0^1 |f(t)|^2\, dt = \|f\|^2_{L^2([0,1])}$$

Die Fourierreihe konv. punktw. für $f\in C^2(S^1,\mathbb{C})$

1. Bsp.: • $\cos(2\pi t)$ hat Periode 1, wissen:

$$\cos(2\pi t) = \frac{e^{i2\pi t} + e^{-i2\pi t}}{2}$$

⇒ Fourierkoeff. a_n von $\cos(2\pi t)$ sind:

$$a_1 = \frac{1}{2} = a_{-1}, \qquad a_n = 0 \text{ sonst.}$$

Auch nachrechnen:

$$a_n = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(e^{2\pi i t} + e^{-2\pi i t}\right) e^{-2\pi i n t}\,dt$$

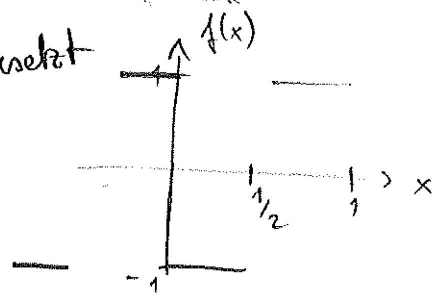
$$= \delta_{n,1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 dt + \delta_{n,-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 dt = \frac{1}{2}\left(\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}\right).$$

• Ebenso: $\sin(2\pi t) = \dfrac{e^{i2\pi t} - e^{-i2\pi t}}{2i}$,

also Fourierkoeff.: $a_1 = \dfrac{1}{2i} = -\dfrac{i}{2}$, $a_{-1} = \dfrac{-1}{2i} = \dfrac{i}{2}$,

$a_n = 0$ sonst.

2. Bsp.: $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$, period. fortgesetzt



$$a_0 = \int_0^1 f(t)\,dt = 0$$

$n \neq 0$: $$a_n = -\int_0^{1/2} e^{-2\pi i n t}\,dt + \int_{1/2}^1 e^{-2\pi i n t}\,dt = \frac{e^{-2\pi i n t}}{2\pi i n}\Big|_0^{1/2} - \frac{e^{-2\pi i n t}}{2\pi i n}\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{2\pi i n}\left[e^{-\pi i n} - 1 - 1 + e^{-\pi i n}\right] = \frac{-2 + 2e^{-\pi i n}}{2\pi i n}$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{-4}{2\pi i n}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

für $n>0$:

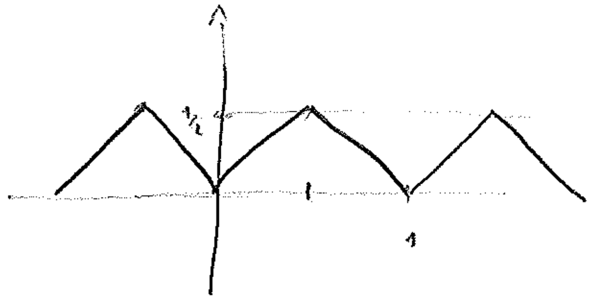
Fourierreihe: $a_n e^{2\pi i n x} + a_{-n} e^{-2\pi i n x} = \frac{e^{i\cdot 2\pi n x} - e^{-i\cdot 2\pi n x}}{2i}\cdot\left(\frac{-4}{\pi n}\right)$

$$= \frac{-4}{\pi n}\cdot \sin(2\pi n x)$$

$\Rightarrow$ Fourierreihe $= \frac{-4}{\pi}\cdot\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2\pi(2m+1)x)}{2m+1}$

3. Bsp.: $f(x) = \begin{cases} t & , t\in[0,\frac{1}{2}] \\ 1-t & , t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$

periodisch fortgesetzt.



$$a_0 = \int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^{1/2} + \left(t-\frac{1}{2}t^2\right)\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{8} - 0 + \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$n\neq 0$:

$$a_n = \int_0^{1/2} \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{e^{-2\pi i n t}}_{v'}\,dt + \int_{1/2}^{1} \underbrace{(1-t)}_{u}\,\underbrace{e^{-2\pi i n t}}_{v'}\,dt$$

part. Int.

$$= \frac{t e^{-2\pi i n t}}{-2\pi i n}\Big|_0^{1/2} - \frac{1}{-2\pi i n}\int_0^{1/2} e^{-2\pi i n t}\,dt + \frac{(1-t)e^{-2\pi i n t}}{-2\pi i n}\Big|_{1/2}^{1}$$

$$+ \frac{1}{-2\pi i n}\int_{1/2}^{1} e^{-2\pi i n t}\,dt$$

$$= \underbrace{\frac{e^{-\pi i n}}{-4\pi i n} - \frac{e^{-\pi i n}}{-4\pi i n}}_{=0} - \frac{1}{(-2\pi i n)^2}\cdot e^{-2\pi i n t}\Big|_0^{1/2} + \frac{1}{(-2\pi i n)^2}\, e^{-2\pi i n t}\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{-4\pi^2 n^2}\left[-e^{-\pi i n} + 1 + 1 - e^{-\pi i n}\right] = \frac{2-2e^{-\pi i n}}{-4\pi^2 n^2} = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{2}{-2\pi^2 n^2}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

<u>Fourierreihe:</u> $n > 0$ ungerade: $\quad a_n e^{2\pi i n x} + a_{-n} e^{-2\pi i n x} = \frac{-2}{\pi^2 n^2} \cdot \frac{e^{i(2\pi n x)} + e^{-i(2\pi n x)}}{2}$

$$= \frac{-2}{\pi^2 n^2} \cdot \cos(2\pi n x)$$

$$\Rightarrow \text{Fourierreihe} = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2\pi(2m+1)x)}{(2m+1)^2}$$

<u>Allgemein:</u> $\exp = \cos + i \sin$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n t} = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \cos(2\pi n t) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \sin(2\pi n t),$$

wo $\quad b_n = a_n + a_{-n}$

$\qquad c_n = i(a_n - a_{-n})$

Fouriertrans. einer Konst. Fkt: $\quad f(t) = c$ für alle $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad a_0 = c, \quad a_n = 0$ sonst.