Große Übung 2.11.2011

Bemerkungen zu

1. Nullmengen
2. Konv.radius für Potenzreihen

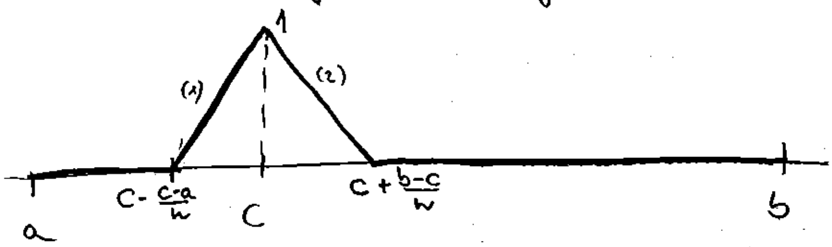
1. 0-Mengen

Ein einzelner Pkt ist 0-Menge in $[a,b]$ (auch in $\mathbb{R}$).

Bew.: Zeige, dass $vol(\{c\}) = 0$ für $c \in [a,b]$ beliebig.
Konstruiere Folge von stetigen Hütchenfkten mit kompaktem Träger

mit $h_n \downarrow \chi_{\{c\}}$,

also $\chi_{\{c\}} \in C^{\downarrow}([a,b])$)



$$h_n(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ für } x \in [a, c-\frac{c-a}{n}],\ [c+\frac{c-b}{n}, b] \\ \frac{n}{c-a}x + t_n & , \text{ für } x \in (c-\frac{c-a}{n}, c) \quad , \quad t_n = 1-\frac{nc}{c-a} \\ \frac{n}{c-b}x + s_n & , \text{ für } x \in (c, c+\frac{b-c}{n}) \quad , \quad s_n = 1-\frac{nc}{c-b} \\ 1 & , \text{ für } x = c \end{cases}$$

(1): Steigung $m_n = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-0}{c-(c-\frac{c-a}{n})} = \frac{n}{c-a}$; y-Achsenabschnitt $m_n c + t_n = 1 \Leftrightarrow t_n = 1 - m_n c = 1 - \frac{nc}{c-a}$

[(2): Steigung $\tilde{m}_n = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-1}{c+\frac{b-c}{n}-c} = \frac{n}{c-b}$; y-A.-Abschn. $m_n c + s_n = 1 \Leftrightarrow s_n = 1 - \tilde{m}_n c = 1 - \frac{nc}{c-b}$]

$$\int_a^b h_n = \int_{c-\frac{c-a}{n}}^{c} \left(\frac{n}{c-a}x + t_n\right)dx + \int_c^{c+\frac{b-c}{n}} \left(\frac{n}{c-b}x + s_n\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(c - (c-\frac{c-a}{n})\right)\cdot 1 + \frac{1}{2}\left(c+\frac{b-c}{n} - c\right)\cdot 1$$

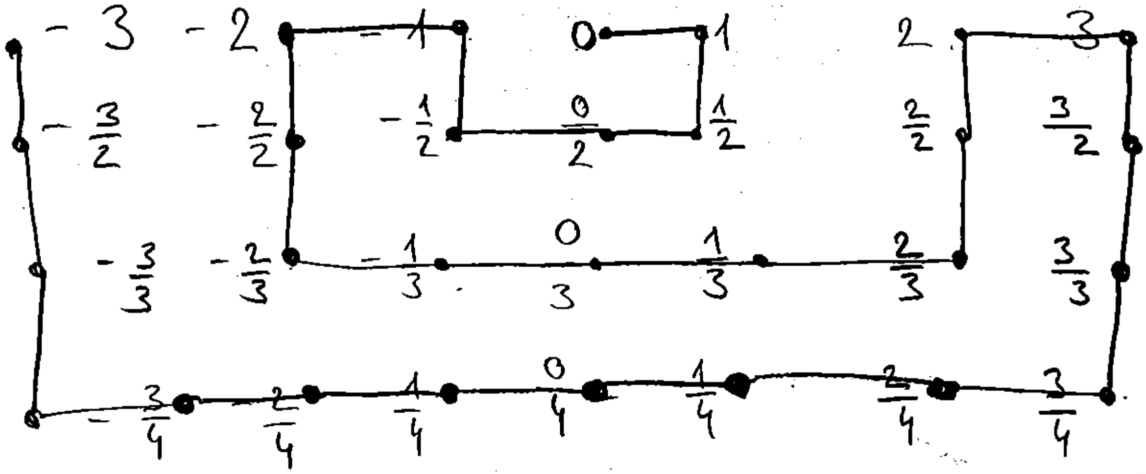
$$= \frac{c-a+b-c}{2n} = \frac{b-a}{2n}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n = 0$, also nach Beppo Levi $\lim_{n\to\infty} h_n = \chi_{\{c\}}$ integrierbar mit $\int_a^b \chi_{\{c\}} = \lim_{n\to\infty}\int_a^b h_n = 0$.

Satz (Vorlesung): Eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge.

Folgerung: $\mathbb{Q}$ ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}$.

Bew: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, d.h. es ex. eine Bijektion $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.



Dabei überspringt man die nichtteilerfremden Brüche

Aber: $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Bew: Ang., es gäbe eine Abzählung $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

Dazu konstruiere rekursiv Intervallschachtelung $(I_n)_n$ so, dass

(*) $x_n \notin I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$I_1 := [x_1 + 1, x_1 + 2]$; I_{n+1} wird aus I_n konstruiert:

Teile I_n in drei gleichlange Intervalle und wähle I_{n+1} als den Abschluss eines dieser drei, das x_{n+1} nicht enthält.

Es sei $s \in \mathbb{R}$ mit $s \in I_n$ f.a. n. Es ist $s = x_k$ für pass. k,

also $x_k = s \in I_k$ ↯

<u>Folgerung:</u> Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$$

ist <u>meßbar</u>.

<u>Bew.:</u> Es sei $\chi_{[-n,n]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die char. Fkt von $[-n,n]$

und $f_n = 0 \cdot \chi_{[-n,n]} \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ fast überall, aber

offensichtlich ist $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

Außerdem ist f integrierbar, da $|f| \leq 0$ fast überall,
mit $\int f = 0$.

<u>Also:</u> Auch Fkten, die in keinem Pkt stetig sind, können integrierbar sein im Lebesgueschen Sinne!

<u>Subst. regel:</u> $\varphi : U \longrightarrow V$ $\quad U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt

φ bij, stetig differbar mit $\det D\varphi(x) \neq 0$ f.a. $x \in U$.

Dann liegt für $f : V \to \mathbb{R}$, $f \in C_c(V)$ auch

$f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| \in C_c(U)$ und es gilt

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|\,dx$$

<u>Beh.:</u> Subst. regel gilt auch für $f \in L(V)$ mit

$\varphi^!(f) := f(\varphi(x))|\det \varphi(x)| \in L(U)$.

<u>Bew.:</u>

$$C^+(V) \xrightarrow{\varphi^!} C^+(U)$$
$$C^-(V) \xrightarrow{\varphi^!} C^-(U)$$

Denn sei $g_n \in C^*(V)$ mit $g_n \nearrow g \in C^+(V)$,

dann ist $\varphi^!(g_n) \in C_c(U)$, also $\varphi^!(g) = \lim_{n \to \infty} \varphi^!(g_n) \in C^+(U)$,

weil $|\det Df(x)|$ <u>beschränkt</u>!

[Ebenso für $h_n \searrow h \in C^-(V)$.]

Insbes. $\lim_{n \to \infty} \int_V g_n(y)\,dy = \int_V g(y)\,dy = I_V^+(g)$

$\|$

$$\lim_{n \to \infty} \int_U g_n(\varphi(x))\,|\det D\varphi(x)|\,dx = \int_U \varphi^!(g)(x)\,dx = I_U^+(\varphi^!(g))$$

Nun sei $f \in L(V)$ bel., d. h. für jedes $\varepsilon > 0$ ex. $h \in C^-(V)$, $g \in C^+(V)$ mit $h \leq f \leq g$ und

$I_V^+(g) - I_V^-(h) < \varepsilon$.

Es gilt dann auch $\varphi^!(h) \leq \varphi^!(f) \leq \varphi^!(g)$ (klar)

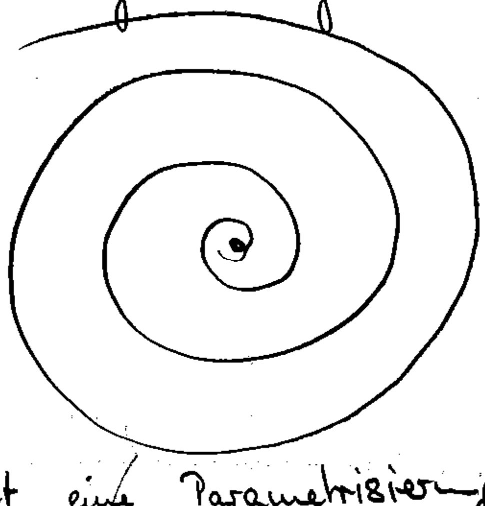
und $\varepsilon > I_V^+(g) - I_V^-(h) = I_U^+(\varphi^!(g)) - I_U^-(\varphi^!(h))$

also ist $\varphi^!(f) \in L(U)$ und da $\varepsilon > 0$ bel.,

gilt $I_U(\varphi^!(f)) = I_V(f)$.

<u>Anwendung:</u> „Schwierige 0-Mengen" als solche zu identifizieren,

z. B.



Spiralmenge S

Man wählt eine Parametrisierung der Spiralmenge $[0,\infty) \to \mathbb{R}^2$
$\varphi : S \xrightarrow{\sim} [0,\infty)$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_S(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{\chi_{[0,\infty)}(\varphi)(y)\,|\det \varphi(y)|}_{\text{Träger ist 0-Menge}}\,dy = 0$$

2. Zum Konvergenzradius von Potenzreihen

(speziell für $z \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$; allg. hom. Pol. in n Var. analog)

Def. (Vorl./Skript): Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,

Konv. radius $R = \sup \{ \rho \mid \exists C > 0 \ \forall n : |a_n \rho^n| < C \}$

Satz: Für alle z mit $|z| < \rho < R$ konv. die Pot.reihe $\sum a_n z^n$ absolut lk glm.

[Bew. über geom. Reihe als Majorante.]

Anschauliche Bed. d. Konv.rad.

Zusatz: Für alle $|z| > R$ divergiert die Reihe.

Bew: Ist $|z| = \rho > R$, dann gilt für ein $C > 0$ und unendlich viele n, [z.B. $n \in I$, $\# I = \infty$]

$$|a_n| \rho^n > C ,$$

Also: $$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \rho^n = \underbrace{\sum_{n \in I} \underbrace{|a_n| \rho^n}_{> C}}_{\text{hat } \sum C \text{ als div. Minorante.}} + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus I} |a_n| \rho^n$$

Lemma: (Praktische Berechnung d. Konv.rad.)

Falls $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = Q$ existiert ($Q = \infty$ zugelassen),

dann ist $R = \frac{1}{Q}$ der Konv. rad. der Pot.reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Bew.: Benutze das Quot.krit. für Reihen: Ex. $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = q$,

dann $\begin{cases} \text{konv. } \sum c_n \text{ abs., falls } q < 1 \\ \text{diverg. } \sum c_n \text{, falls } q > 1. \end{cases}$

Hier: $c_n = a_n z^n$. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = |z| \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert,

dann ist $\sum a_n z^n$ • abs. konv. für $|z| \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |z| \cdot Q < 1$

$\iff |z| < \frac{1}{Q}$

• div. für $|z| > \frac{1}{Q}$

Also ist $R = \frac{1}{Q}$ der Konv.rad.

[Bew. d. Quot.krit. für Reihen: Es sei Q' mit $Q < Q' < 1$ bel. gewählt.
Dann ex. $N \in \mathbb{N}$ mit $\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| \le Q'$ für $k \geq N$.

$\Rightarrow \forall n \geq N: \quad |c_n| \le Q' |c_{n-1}| \le \dots \le Q'^{\,n-N} |c_N|$

$\Rightarrow \sum |c_n|$ hat die konv. Maj. $|a_N| Q'^{-N} \cdot \underbrace{\sum Q'^n}_{\text{geom. Reihe}}$]

Bem.: Wissen also $\sum a_n z^n \begin{cases} \text{konv. für } |z| < R \\ \text{div. für } |z| > R \end{cases}$

Aber für $|z| = R$ sind allg. Aussagen nicht möglich.

z.B.: a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, c) $\sum \frac{z^n}{n^2}$

Bestimme Konvradien: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow R_{a)} = 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

$\Rightarrow R_{b)} = 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1$

$\Rightarrow R_{c)} = 1$

Und für $|z| = 1$ gilt:

a) $\sum z^n$ divergiert für alle $|z| = 1$

b) $\sum \frac{z^n}{n}$ div. für $z = 1$, konv. für $z = -1$

c) $\sum \frac{z^n}{n^2}$ konv. für alle $|z| = 1$, weil $\sum \frac{1}{n^2}$ konv.