Große Übung 26.10.2011

Die Maxwell-Gleichungen

hier im Vakuum, also Dielektrizitätskonst. $\varepsilon_0 = 1$

Permeabilität $\mu_0 = 1$

und $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} = 1$, also $c = 1$.

[Diese Konstanten stecken in der Metrik; durch Änderung d. Metrik kann man diese mit berücksichtigen.]

Maxwell-Gleichungen (klass. Form)

(i) $\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

(ii) $\operatorname{rot} B = \vec{j} + \frac{\partial E}{\partial t}$

(iii) $\operatorname{div} E = \rho$

(iv) $\operatorname{div} B = 0$

$$\left[\operatorname{rot} v = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}\right]$$

Diese werden gefolgert aus der (I) Ladungserhaltung und der (II) Erhaltung des elektromagn. Feldes.

Plan:
1. Formulierung der Maxwell-Gl., d.h. (I) und (II), in der Sprache des Differentialkalküls
2. Folgerung der klass. Formeln (i) - (iv) aus diesen.
3. Andere Formulierung von 1.

Zu 1.

- **Lorentz-Metrik q_L** (*) auf 4-dim Raum / „Raumzeit"

$$q_L(x,y,z,t) = -x^2 - y^2 - z^2 + t^2$$

(*) Keine Metrik im streng mathem. Sinne!

Bzw. für $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$q_L(x) = x^T S x \quad \text{mit} \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

„quadrat. Form auf $\mathbb{R}^{3,1}$".

$$= \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \cdot x_i^2, \quad \text{wo } \lambda_i = -1 \text{ für } i=1,2,3, \ \lambda_4 = 1$$

- **$*_L$-Operator für Lorentzmetrik:** $\quad I \subseteq \{1,\dots,4\}$

$*_L dx_I = c(I) dx_J$, wo $J = \{1,\dots,4\} \setminus I$ und das VZ $c(I) = \pm 1$ bestimmt ist durch

$$dx_I \wedge * dx_I = \underbrace{\frac{\sqrt{\prod_{i=1}^{4} |\lambda_i|}}{\prod_{i\in I} \lambda_i}}_{= \prod_{i\in I} \lambda_i \ =: V(I)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_4$$

Also: $\boxed{c(I) = V(I)\, \sigma(I\,J)}$

VZ, das entsteht, wenn $dx_I \wedge dx_J$ in die Reihenfolge $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_4$ gebracht wird

Bestimme $V(I)$:

$I = \{i\},\ i \le 3: \quad V(\{i\}) = \lambda_i = -1$

$I = \{4\}: \quad V(\{4\}) = \lambda_4 = 1$

$I = \{i,j\},\ i,j \le 3: \quad V(\{i,j\}) = (-1)(-1) = 1$

$I = \{j,4\}: \quad V(\{j,4\}) = -1 \cdot 1 = -1$

$I = \{1,2,3\}: \quad V(I) = (-1)^3 = -1$

$I = \{i,j,4\}: \quad V(I) = (-1)^2 \cdot 1 = 1$

$I = \{1,2,3,4\}: \quad V(I) = (-1)^3 \cdot 1 = -1$

$I = \emptyset: \quad V(\emptyset) = 1$

Also z. B.: $\quad dx_2 \wedge * dx_2 = c(I)\, \underbrace{dx_2 \wedge dx_1}_{(-1)} \wedge dx_3 \wedge dx_4 \stackrel{!}{=} -dx_1 \wedge \dots \wedge dx_4$

$\Rightarrow c(\{2\}) = 1 \qquad$ etc.

Abkürzung: $dx_{123} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = -dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 = -dx_{213}$ etc.

idealisiert

- Strom- u. Ladungsdichte $J \in A^3(\mathbb{R}^{3,1})$ definiert durch (j_1, j_2, j_3, ϱ)

$$J := -j_1 dx_{234} - j_2 dx_{314} - j_3 dx_{124} + \varrho\, dx_{123}$$

Berechne $*_L J = -j_1 c(\{2,3,4\})\, dx_1 + j_2 c(\{1,3,4\})\, dx_2 - j_3 c(\{1,2,4\})\, dx_3 + \varrho\, c(\{1,2,3\})\, dx_4$

$$= -j_1 (-1)^3 dx_1 + j_2 dx_2 - j_3 (-1) dx_3 + \varrho (-1) dx_4$$

$$= j_1 dx_1 + j_2 dx_2 + j_3 dx_3 - \varrho dx_4$$

Setze $\boxed{j := -*_L J = -j_1 dx_1 - j_2 dx_2 - j_3 dx_3 + \varrho dx_4}$

1. Maxwellgleichung: Ladungserhaltung $\boxed{dJ = 0}$

Berechne $\underline{0 = dJ} = -\partial_1 j_1 dx_{1234} - \partial_2 j_2 dx_{2314} - \partial_3 j_3 dx_{3124} + \partial_4 \varrho\, dx_{4123}$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \left(-\partial_1 j_1 - \partial_2 j_2 - \partial_3 j_3 - \partial_4 \varrho\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_4$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{4} \partial_i j_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0} \qquad \vec{j} = (j_1, j_2, j_3)^T$$

Aus $dJ = 0$ für $J \in A^3(\mathbb{R}^4)$ folgt mit dem Poincaré-Lemma die Existenz einer 2-Form $\omega \in A^2(\mathbb{R}^{3,1})$ mit $\boxed{d\omega = J}$.

Sei $\boxed{\omega = E_1 dx_{23} + E_2 dx_{31} + E_3 dx_{12} - B_1 dx_{14} - B_2 dx_{24} - B_3 dx_{34}}$

- Duale 2-Form zu ω: $\mathcal{F} := *_L \omega$

$$\mathcal{F} = E_1\, dx_{14} + E_2\, dx_{24} + E_3\, dx_{34} + B_1\, dx_{23} + B_2\, dx_{31} + B_3\, dx_{12}$$

$\mathcal{F}$ heißt Faraday 2-Form und wird definiert durch das elektromagn. Feld $(B_1, B_2, B_3, E_1, E_2, E_3)$

2. Maxwell-Gleichung: Erhaltung des el.magn. Felds $\boxed{d\mathcal{F} = 0}$

Zu 2.: Folgere aus $d\mathcal{F} = 0$ und $d\omega = \mathcal{J}$ die Gl. (i) - (iv):

$$\boxed{0 = d\mathcal{F}} = \partial_2 E_1\, dx_{214} + \partial_3 E_1\, dx_{314} + \partial_1 E_2\, dx_{124} + \partial_3 E_2\, dx_{324} + \partial_1 E_3\, dx_{134} + \partial_2 E_3\, dx_{234}$$
$$+ \partial_1 B_1\, dx_{123} + \partial_4 B_1\, dx_{423} + \partial_2 B_2\, dx_{231} + \partial_4 B_2\, dx_{431} + \partial_3 B_3\, dx_{312} + \partial_4 B_3\, dx_{412}$$

$$= (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3)\, dx_{123}$$
$$+ (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 + \partial_4 B_1)\, dx_{234}$$
$$+ (\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3 + \partial_4 B_2)\, dx_{314}$$
$$+ (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 + \partial_4 B_3)\, dx_{124}$$

Koeff. alle $=0$ $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{div} B = 0$ für $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$ und $\left\{ \begin{array}{l} \partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 = -\partial_4 B_1 \\ \partial_3 E_1 - \partial_1 E_3 = -\partial_4 B_2 \\ \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 = -\partial_4 B_3 \end{array} \right\}$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\boxed{\operatorname{div} B = 0}}_{(iv)} \quad \text{und} \quad \boxed{\operatorname{rot} E = -\frac{\partial}{\partial t} B}_{(i)} \quad \text{für } E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{J = d\omega} = \partial_1 E_1 dx_{123} + \partial_4 E_1 dx_{423} + \partial_2 E_2 dx_{231} + \partial_4 E_2 dx_{431} + \partial_3 E_3 dx_{312} + \partial_4 E_3 dx_{412}$$

$$- \partial_2 B_1 dx_{214} - \partial_3 B_1 dx_{314} - \partial_1 B_2 dx_{124} - \partial_3 B_2 dx_{324} - \partial_1 B_3 dx_{134} - \partial_2 B_3 dx_{234}$$

$$= \left(\partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 \right) dx_{123}$$

$$+ \left(\partial_4 E_1 + \partial_3 B_2 - \partial_2 B_3 \right) dx_{234}$$

$$+ \left(\partial_4 E_2 + \partial_1 B_3 - \partial_3 B_1 \right) dx_{314}$$

$$+ \left(\partial_4 E_3 + \partial_2 B_1 - \partial_1 B_2 \right) dx_{124}$$

Koeff.vergl. $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{div} E = \rho$ und $\begin{cases} \partial_4 E_1 + j_1 = \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 \\ \partial_4 E_2 + j_2 = \partial_3 B_1 - \partial_1 B_3 \\ \partial_4 E_3 + j_3 = \partial_1 B_2 - \partial_2 B_1 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\operatorname{div} E = \rho}$ (iii) und $\boxed{\operatorname{rot} B = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} E}$ (ii)

Zu 3: Umformulierung von $dF = 0$ und $dJ = 0$

Poincaré-Lemma für $F \in A^2(\mathbb{R}^{3,1})$ mit $dF = 0$:

Es ex. $A \in A^1(\mathbb{R}^{3,1})$ mit $dA = F$.

$A = \sum_{i=1}^{4} A_i dx_i$ Vektorpotential ist eindeutig bestimmt bis auf eine Form $d\varphi$, $\varphi \in A^0(\mathbb{R}^4) = \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^4)$, der sog. Eichung.

Betrachte den Operator $\delta := *_L \circ d \circ *_L$ und berechne δF:

$$*_L F = B_1 dx_{14} + (-1)^2 B_2 dx_{24} + B_3 dx_{34}$$
$$+ (-1) E_1 dx_{23} + (-1)^3 E_2 dx_{31} + (-1) E_3 dx_{12} = -\omega$$

$$\Rightarrow \delta F = -*_L(d\omega) \overset{dJ=0 \Leftrightarrow d\omega = J}{=} -*_L J = j$$

Maxwell-Gleichungen (Lorentz-invariante Form):

$$\boxed{dF = 0 \quad \text{und} \quad \delta F = j}$$

Invarianz bzgl. der Lorentzgruppe $O(q_L)$.

[Bzw. $\delta d A = j$.]