Eine Partition der Eins von $\mathbb{R}$ (Bsp.)

[Eine Partition der Eins eines Raums (Mfk.) X ist eine Familie $(f_i)_{i \in I}$ von $C^\infty(X, [0,1])$ - Funktion derart, dass für alle $x \in X$ gilt: • $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$

• Es gibt eine Umgebung von x, auf der nur endlich viele der f_i von null verschieden sind.

(Oft möchte man eine P.d.Eins zu einer Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, d.h. Träger$(f_i) \subset U_i$.)]

<u>Bsp.:</u> Überdecke $\mathbb{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (i-1, i+1)$ durch offene Intervalle.

Konstruiere nun Partition der Eins, die dieser Überdeckung zugeordnet ist.

Erinnere [Übung vor Weihnachten]: $r(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

$r \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$.

$\Rightarrow$ $s(x) = r(1+x)\, r(1-x)$, $s \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ mit:

$$s(x) \begin{cases} \in (0,1) & \text{für } x \in (-1,1) \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad s(x-i) \begin{cases} \in (0,1) & \text{für } x \in (i-1, i+1) \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Definiere $f_i(x) := \dfrac{s(x-i)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} s(x-k)}$, $i \in \mathbb{Z}$, $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$, Träger$(f_i) = (i-1, i+1)$

Sei $x \in \mathbb{Z}$. Dann $f_i(x) = 0$, außer für $x = i$: $f_i(i) = \dfrac{s(0)}{\sum s(i-k)} = \dfrac{s(0)}{s(0)} = 1$

Sei $x \notin \mathbb{Z}$. Dann $f_i(x) \neq 0$ nur für die zwei $i \in (x-1, x+1)$, $i = \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil$

Formal: $\sum_i f_i(x) = \dfrac{\sum_i s(x-i)}{\sum_k s(x-k)} = 1$, in jedem Pkt sind höchstens zwei Summanden $\neq 0$.

Potenzreihen

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$. Frage: Für welche $x \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist diese Bildung sinnvoll?

Konvergenzradius R (formale Def.) (Seite 75):

$$R = \sup \{ \rho \mid \exists\, C_\rho > 0 \text{ mit } \max_{|y|=\rho} (|a_n y^n|) \le C_\rho \text{ für alle } n \}.$$

Es gilt: $R \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

Für $|x| \le \rho < R$ konvergiert $P(x)$ absolut und gleichmäßig,

für $|x| > R$ divergiert $P(x)$.

Für $|x| = R$ können im allg. keine Aussagen gemacht werden.

$R = 0$ heißt: P konvergiert nirgends außer in $x = 0$ (dort trivial: $P(0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + 0 = a_0$)

$R = \infty$ heißt: P konvergiert in jedem Pkt $x \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

Kriterien fürs Auffinden des Konvergenzradius:

Aus Majoranten-Kriterium: (i) Man kann $\sum |a_n x^n|$ gliedweise abschätzen durch Potenzreihe, deren Konvergenzradius man kennt,

z.B.: Wir wissen für $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist $R = \infty$.

Dann folgt das auch für die Reihen $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ und $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(ii) Man schätzt $\sum |a_n x^n|$ durch eine geometrische Reihe ab

Bsp.: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Sei $x > 0$ bel., aber fest. Dann ex. $N \in \mathbb{N}$ so, dass $x < N$ (Archimed. Axiom).

Dann folgt: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} + \frac{x^N}{N!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^k}{(N+1)\cdot\ldots\cdot(N+k)}}_{<\left(\frac{x}{N}\right)^k}$

$$< \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!}}_{\text{endl. Summe}} + \frac{x^N}{N!} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{N}\right)^k}_{\text{geom. Reihe zu } q=\frac{x}{N}<1,\text{ also konv.}}$$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konv.

Da $x>0$ bel. war, konv. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ für jedes $x\in\mathbb{R}$ absolut.

Die einfachsten Potenzreihen: Polynome

$$Q(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l \quad \text{mit } a_l = 0 \text{ für } l>k.$$

Konvergenzradius $R=\infty$.

Bsp: $(x-a)^n$ in Potenzreihe um 0 entwickeln.

$$(x-a)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-a)^{n-j} x^j = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \quad \text{mit}$$

$$c_j = \binom{n}{j}(-a)^{n-j} \text{ für } j=0,\ldots,n; \quad c_j = 0 \text{ für } j>n.$$

Bemerkung zur Taylorreihe

Die Taylorreihe für sich wurde in der Vorlesung nicht speziell
einer unendl. oft diffbaren Fkt
behandelt, dafür aber Potenzreihen analytischer Funktionen (4.15), und für analyt. Funktionen ist das gerade dasselbe.

Satz 4.37: Ist $R > 0$ für Potenzreihe $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l$, dann ist $f(x)$ für $|x| < R$ unendlich oft differenzierbar und die Potenzreihe gliedweise diff.bar:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \frac{d}{dx} x^l = \sum_{l=0}^{\infty} l a_l x^{l-1}$$

Insbesondere: $f'(0) = \sum_{l=0}^{\infty} l \cdot a_l x^{l-1} = 0 + 1 \cdot a_1 + \sum_{l \geq 2} l \cdot a_l 0^{l-1} = a_1$

Das kann man iterieren: $f''(x) = \sum_{l=0}^{\infty} l(l-1) a_l x^{l-1}$

$$\Rightarrow f''(0) = 0 + 0 + 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 0 = 2 a_2$$

bzw.: $f^{(k)}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} l(l-1) \cdots (l-k+1) a_l x^{l-k}$

$$\Rightarrow f^{(k)}(0) \underset{\wedge}{=} k! \, a_k$$

nur Exp. $l-k=0$ liefert Beitrag

Oder anders gesagt: $\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ (!)

Für eine C^∞-Fkt ist die Taylorreihe (in 0) definiert als $T_f(x) \hat{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Eine Funktion heißt analytisch, wenn sie (lokal) durch ihre Taylorreihe dargestellt wird. [Nicht jede C^∞-Fkt ist analytisch, z.B. ist $r(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, Seite 1!
$r^{(k)}(0) = 0$ für alle k, also $T_r(x) \equiv 0$, aber $r \not\equiv 0$!]

Spricht W. in Abschnitt 5.4 von Taylor-Koeff., so meint er die $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, also die Koeff. der Taylor-Reihe.

Bsp. für analyt. Funktionen: Alle, deren Potenzreihen-Darst. wir schon kennen, insbes.: exp, sin, cos, Polynome

Aufgabe: Welche der folgenden Funktionen sind L-int.bar auf $\mathbb{R}$?

$$f_1(x) = \cos(x^2)$$

$$f_2(x) = \max\begin{cases}\cos(x^2)\\ 0\end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases}\dfrac{\sin(x^2)}{2x^2}, & |x| \geq \sqrt{\pi}\\ 0, & |x| < \sqrt{\pi}\end{cases}$$

Da L-int.bare Fkten einen Verband bilden, ist f_j L-int.bar gdw $|f_j|$ L-int.bar.

(1) Betrachte $\int_0^{\sqrt{\pi}} |f_1|(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} |\cos(x^2)|\,dx =: a_1 > 0$.

Sei $g_n(x) := |f_1|(x) \cdot \chi_{[-\sqrt{n\pi}, \sqrt{n\pi}]}(x)$. Dann gilt: $g_n \nearrow |f_1|$,

die g_n sind im Halbverband der stetigen Fkten auf Quadern, deren Daniel-Int. mit dem L-Int. (per Def.) übereinstimmt:

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx = 2\sqrt{n}\, a_1 \longrightarrow \infty \quad (n \to \infty).$$

$|f_1|$ gehört zum Abschluß dieses Halbverbands und hat Daniell-Int.

$$\int_{\mathbb{R}} |f_1| = \int_{\mathbb{R}} \lim g_n = \infty.$$

Also ist $|f_1|$ nicht L-intbar, also auch f_1 selbst nicht.

Analog:

(2) $f_2 = |f_2|$, $\int_0^{\sqrt{\pi}} f_2(x)\,dx = a_2 > 0$.

Sei $g_n(x) = f_2(x) \cdot \chi_{[-\sqrt{n\pi}, \sqrt{n\pi}]}(x)$, dann gilt $g_n \nearrow f_2$,

$\int_{\mathbb{R}} g_n = 2\sqrt{n}\, a_2 \longrightarrow \infty \quad (n \to \infty)$.

Wie oben: f_2 nicht L-int.bar.

(3) $|f_3|(x) = \begin{cases} \frac{|\sin(x^2)|}{2x^2} & , |x| \geq \sqrt{\pi} \\ 0 & |x| < \sqrt{\pi} \end{cases}$

Sei $g_n(x) = |f_3|(x) \cdot \chi_{[-\sqrt{n\pi}, +\sqrt{n\pi}]}$

Dann gilt $g_n \nearrow |f_3|$,

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx = 2 \cdot \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{n\pi}} \frac{|\sin(x^2)|}{2x^2}\,dx \leq \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{n\pi}} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{n\pi}}$$

$\int g_n \leq \int g_{n+1}$, also $\int g_n$ mon wachs. Folge $\Big|$ $= \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{\pi}}}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ endlich.

Dann folgt mit dem <u>Satz von Beppo Levi</u>, dass auch $|f_3|$ L-integrierbar ist mit $\int_{\mathbb{R}} |f_3|(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx$.

Ein paar Übungen, die zu machen vor der Klausur nicht schadet:

1. (a) Was ist eine Hilbertraumbasis?
   (b) Welche Basen des $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ sind auch Hilbertraumbasen des $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$?

2. Berechne Fourier-Koeff. von $f(x) = \sin^2(2\pi x)$

3. Berechne $\int_\gamma (y\,dx + x\,dy)$ für die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (\cos t, \cos t)$

4. Bestimme Fouriertransformierte von
$$f(x) = e^{-2\pi a|x|} e^{2\pi i b x} \quad \text{und} \quad g(x) = e^{-2\pi a|x|} e^{-2\pi i b x}$$
für $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

5. Formuliere ein hinreichendes (wenns geht: nicht triviales ...) Kriterium für die Gültigkeit der Vertauschung
$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x,y)\,dy = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy$$
[Auch: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f(x_n,y)\,dy \overset{???}{=} \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f(x_n,y)\,dy$]

6. Zeige:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,dx = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,dx$$
[Das kann man auf verschiedene Weisen sehen!]

7 Wie zeigte man noch mal: Es ex. Konst. $c>0$ so, dass für $x \geq r > 0$ gilt

$$e^{-ax^2+b\cancel{x}+d} \leq e^{-cx} \quad ?$$

(dabei $a>0$, b, d fest)

9 (a) Gib 2 harmonische homogene Polynome vom Grad 5 in 3 Variablen an. [Wieviele linear unabhängige kann man höchstens finden?]

(b) Wieso gilt für ein homog. Pol. P vom Grad l: $P(a\cdot x) = a^l P(x)$ für $a \in \mathbb{R}$?

10 Zeige für die homogenen Polynome l-ten Grades $\mathcal{P}_l = \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^n)$ noch einmal: Ist $r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $f \in \mathcal{P}_l$, $g \in \mathcal{P}_{l+2}$, so gilt

$$\langle r^2 f, g \rangle = \langle f, \Delta g \rangle$$

[Dabei ist allg. $\langle f, g \rangle := f(\partial)\, g(x)$ für $f, g \in \mathcal{P}_l$]

Zeige auch: $\langle\ ,\ \rangle$ ist symmetrisch und positiv definit.

8 Auch wenn $\dim \mathcal{P}_l = \binom{n+l-1}{l}$ unanschaulich scheint: Berechne „zu Fuß" (nicht durch die Formel): Für $\underline{n=5}$

$\dim \mathcal{P}_0$, $\dim \mathcal{P}_1$, $\dim \mathcal{P}_2$

Gib jeweils eine Basis an!