Große Übung 21.12.2011

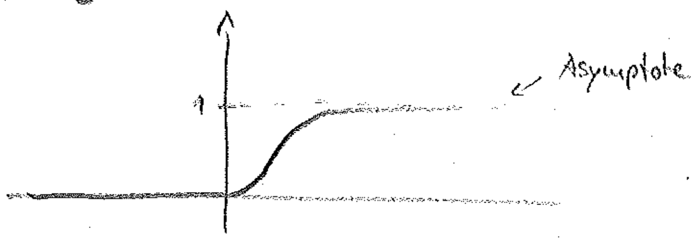
Eine unendlich oft diff.bare Funktion mit kompaktem Träger und...

$(\in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}))$

Vorbereitungen:

1. Die Fkt $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x > 0 \\ 0 & , x \le 0 \end{cases}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist

unendlich oft differenzierbar.



Bew.: Für $x>0$ bzw. $x<0$ ist das klar. Kritisch also einzig $x_0 = 0$.

Für $x>0$: $f^{(n)}(x) = \left(\sum_{\substack{m \ge 0, \\ \text{endl. viele}}} a_m \frac{1}{x^m} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$

[Denn für $m \ge 0$: $g_m(x) = \frac{1}{x^m} e^{-\frac{1}{x^2}} \Rightarrow g'(x) = \left(\frac{-m}{x^{m+1}} + \frac{2}{x^{m+3}} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}$.]

Beh.: Die Fkten $^{(m \ge 0)}$ $g_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^m} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x > 0 \\ 0 & , x \le 0 \end{cases}$ sind stetig in $x=0$ mit $g_m(0) = 0$.

Bew.: $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g_m(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} \underset{\xi = \frac{1}{x}}{=} \lim_{\xi \to \infty} \xi^m e^{-\xi^2} = 0 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x)$ ∎

[Denn für $\underset{(\varepsilon < 1)}{\varepsilon > 0}$ bel. ist $\xi^m e^{-\xi^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon e^{\xi^2} > \xi^m \Leftrightarrow \xi^2 > \ln\left(\frac{\xi^m}{\varepsilon}\right)$
$= m \ln \xi - \ln \varepsilon$.

Es gilt aber $\xi > \ln \xi$ und $\xi^2 > m\xi - \ln \varepsilon \Leftrightarrow \xi^2 - m\xi + \ln \varepsilon > 0$,
was für $\xi >> 0$ erfüllt ist (nach oben geöffnete Parabel)

Also erst recht: $\xi^m > m \ln \xi - \ln \varepsilon$.]

Insbesondere ($m=0$): f ist stetig in $x_0=0$.

Beh.: g_m ($m\geq 0$) ist diffbar in $x_0=0$ mit $g_m'(0)=0$.

Bew.: Setze $g_m'(0)=0$ in Gl. für Ableitung ein:

$$g_m(x)-g_m(0)-g_m'(0)(x-0) = g_m(0) \overset{!}{=} |x-0|\cdot H_0(x) \quad \text{für}$$

$$H_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ stetig in } 0 \text{ mit } \lim_{x\to 0} H_0(x)=0.$$

Es ist
$$g_m(x) = \left\{\begin{matrix} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} & \text{für } x>0 \\ 0 & \text{für } x\leq 0 \end{matrix}\right\} = \begin{cases} |x|\cdot\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{m+1}} & \text{für } x>0 \\ 0 & \text{für } x<0 \end{cases}$$

$$= |x|\cdot g_{m+1}(x) \quad \text{mit } g_{m+1} \text{ stetig in } 0,\ g_{m+1}(0)=0. \quad \blacksquare$$

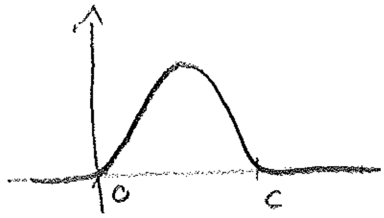
$\Rightarrow$ Jede Ableitung von f ist stetig diffbar.

2. Die Funktion $g(x) = f(x)\cdot f(c-x)$ $(c>0)$ ist unendlich oft diffbar mit Träger$_{=(0,c)}$ $\subseteq [0,c]$ (d.h. g hat kompakten Träger)

Bew.: g ist als Prod. von $\mathcal{C}^\infty$-Fkten wieder $\mathcal{C}^\infty$ (Produktregel!).

$f(x)=0$ für $x\leq 0$ und $f(c-x)=0$ für $c-x\leq 0 \iff c\leq x$

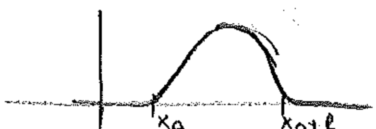
Also $g(x)\neq 0$ nur für $0<x<c$.



Also: $\boxed{g\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})}$

3. Sei $c=1$ (Bsp.) definiere $\tilde g(x) = g\left(\frac{x-x_0}{\ell}\right)$, dann ist $\tilde g$ ∞-oft diffbar

und $\tilde g(x)\neq 0 \iff \frac{x-x_0}{\ell}\in(0,1) \iff \underbrace{x\in(x_0,x_0+\ell)}_{\text{Träger von } \tilde g}$

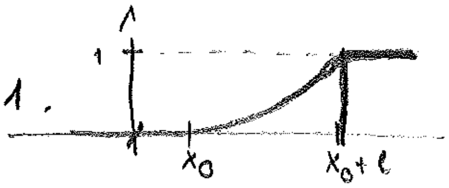


4. Man kann noch weiter spielen:

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} \tilde{g}(t)\,dt = \begin{cases} \int_{x_0}^{x_0+l} \tilde{g}(t)\,dt =: a & \text{für } x \geq x_0+l \\ \int_{x_0}^{x} \tilde{g}(t)\,dt < a & \text{für } x_0 < x < x_0+l \\ 0 & \text{für } x \leq x_0 \end{cases}$$

G ist C^∞ (Hauptsatz)

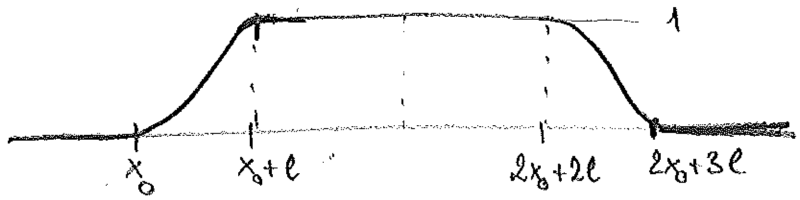
$\Rightarrow \quad \tilde{G}(x) := \dfrac{G(x)}{a}$ ist C^∞ mit $0 \leq \tilde{G}(x) \leq 1$.



5. $$F(x) = \underbrace{\tilde{G}(x)}_{=0 \text{ für } x \leq x_0} \cdot \underbrace{\tilde{G}(3(x_0+l) - x)}_{=0 \text{ für } 3(x_0+l)-x \leq x_0 \Leftrightarrow x \geq 2x_0+3l}$$ ist C^∞, $F(x) \leq 1$,

F hat Träger $(x_0, 2x_0+3l)$

und für $x \in [x_0+l, 2x_0+2l]$ ist $F(x) = 1$



Ins.bes.: (Wieder durch Strecken u. Nullpkt verschieben)

Es gibt eine C^∞-Fkt F_0 mit den Eigenschaften:

- $F_0(x) = 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$
- F_0 hat Werte in $[0,1]$ $\quad (0 \leq F_0(x) \leq 1)$
- F_0 hat Träger in $(-(1+\varepsilon), 1+\varepsilon)$

$$\left[\; F_0(x) = F\left(\frac{x - \overset{\text{Symmetr. um } 0}{\tfrac{3}{2}(x_0+l)}}{\underset{\text{Intervallbreite } 2}{\tfrac{1}{2}(x_0+l)}} \right) = F\left(\frac{2x}{x_0+\varepsilon} - 3 \right) \;\right]$$

mit $l = \varepsilon$