Große Übung 1. Feb. 2012

Ein paar Übungen, die zu machen vor der Klausur nicht schadet:

(1) (a) Was ist eine Hilbertraumbasis?

(b) Welche Basen des $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) sind auch Hilbertraumbasen des $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)?

(2) Berechne Fourier-Koeff. von $f(x) = \sin^2(2\pi x)$

(3) Berechne $\int_\gamma (y\,dx + x\,dy)$ für die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
$t \longmapsto (\cos t, \cos t)$

(4) Bestimme Fouriertransformierte von
$f(x) = e^{-2\pi a|x|} e^{2\pi i b x}$ und $g(x) = e^{-2\pi a|x|} e^{-2\pi i b x}$
für $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

(5) Formuliere ein hinreichendes (wenns geht: nicht triviales ...) Kriterium für die Gültigkeit der Vertauschung

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x,y)\,dy = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy$$

[Auch: $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f(x_n, y)\,dy \overset{???}{=} \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f(x_n, y)\,dy$] z.B.

(6) Zeige: $$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,dx = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,dx$$

[Das kann man auf verschiedene Weisen sehen!]

(7) Wie zeigte man noch mal: Es ex. Konst. $c>0$ so, dass für $x \geq r > 0$ gilt

$$e^{-ax^2+b\cancel{x}+d} \leq e^{-cx} \quad ?$$

(dabei $a>0$, b, d fest)

(9) (a) Gib 2 harmonische homogene Polynome vom Grad 5 in 3 Variablen an. [Wieviele linear unabhängige kann man höchstens finden?]

(b) Wieso gilt für ein homog. Pol. P vom Grad l: $P(a\cdot x) = a^l P(x)$ für $a \in \mathbb{R}$?

(10) Zeige für die homogenen Polynome l-ten Grades $\mathcal{P}_l = \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^n)$ noch einmal: Ist $r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $f \in \mathcal{P}_l$, $g \in \mathcal{P}_{l+2}$, so gilt

$$\langle r^2 f, g \rangle = \langle f, \Delta g \rangle$$

[Dabei ist allg. $\langle f, g\rangle := f(\partial)\, g(x)$ für $f, g \in \mathcal{P}_l$]

Zeige auch: $\langle\ ,\ \rangle$ ist symmetrisch und positiv definit.

(8) Auch wenn $\dim \mathcal{P}_l = \binom{n+l-1}{l}$ unanschaulich scheint: Berechne „zu Fuß" (nicht durch die Formel): Für $\underline{n=5}$

$\dim \mathcal{P}_0$, $\dim \mathcal{P}_1$, $\dim \mathcal{P}_2$

Gib jeweils eine Basis an!

Zum letzten Üben daheim:

(11) Bestimme $\dim H_l(\mathbb{R}^n)$ für $n = 1, 2$. (Nicht über die Formel in Satz 5.8)

(12) Bestimme die Koeff. der Potenzreihenentw. in 0 von

$$P_n(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n .$$

① Aufgabe:

(a) Was ist eine Hilbertraumbasis?

(b) Wann ist eine Basis des $\mathbb{R}^n$ eine Hilbertraumbasis?

(a) Eine HRB des Hilbertraums H ist eine Folge von Vektoren $v_n \in H$ mit

- $< v_i, v_j > = \delta_{i,j}$ (Orthonormalität) für alle i, j.

- Zu jedem $h \in H$ und jedem $\varepsilon > 0$ ex. eine endliche $\mathbb{C}$- (bzw. $\mathbb{R}$-) Linearkombination $\sum_{\text{endl}} a_j v_j$ der v_j so, dass $\| h - \sum a_j v_j \| < \varepsilon$. (Dichtigkeit)

(b) Da eine Basis $\{v_j\}_{j=1}^n$ des $\mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}^n$ erzeugt, d.h. zu jedem $h \in \mathbb{R}^n$ ex. $a_j \in \mathbb{R}$ so, dass $h = \sum_{j=1}^n a_j v_j$, also $\| h - \sum_{j=1}^n a_j v_j \| = 0$, ist die Dichtigkeit immer erfüllt.
$\{v_j\}_{j=1}^n$ bildet also genau dann auch eine HRB, wenn sie eine Orthonormalbasis ist ($< v_i, v_j > = \delta_{ij}$, $i,j = 1, \dots, n$).

(1)

② **Aufgabe**: Fourier-Koeff. von $f(x) = \sin^2(2\pi x)$.

f ist 1-periodisch $\Rightarrow$ n-ter Fourierkoeff c_n wird def. durch

$$c_n = \int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi i n x}\, dx$$

[Die Fourierreihe ist dann $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}$.

Da hier $f \in C^2([0,1])$, wird f in jedem Pkt durch seine F.-R. dargestellt.]

$$f(x) = \left[\frac{1}{2i}\left(e^{2\pi i x} - e^{-2\pi i x}\right)\right]^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{2\pi i\cdot 2x} - 2 + e^{-2\pi i\cdot 2x}\right) \quad (*)$$

$$\Rightarrow c_n = -\frac{1}{4}\left[\int_0^1 e^{2\pi i(2-n)x}\, dx - 2\int_0^1 e^{-2\pi i n x}\, dx + \int_0^1 e^{-2\pi i(2+n)x}\, dx\right]$$

$$\left[\int_0^1 e^{-2\pi i n x}\, dx = \begin{cases} \int_0^1 dx = 1 & n = 0 \\ \frac{1}{-2\pi i n}\int_0^1 e^{-2\pi i n x}\, dx = \frac{1}{-2\pi i n}\, e^{-2\pi i n x}\Big|_0^1 = 0 & \text{für } n \neq 0 \end{cases}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\delta_{n,2} - 2\cdot\delta_{n,0} + \delta_{n,-2}\right]$$

$$\Rightarrow c_0 = \frac{1}{2},\quad c_2 = c_{-2} = -\frac{1}{4},\quad c_n = 0 \text{ sonst.}$$

Oder direkt aus $(*)$: f ist als period. Fkt 2-mal stetig diffbar, wird also überall durch seine Fourierreihe dargestellt

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}\left(e^{2\pi i\cdot 2x} - 2 + e^{-2\pi i\cdot 2x}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i\cdot n x}$$

Koeff.vergl.: $c_2 = c_{-2} = -\frac{1}{4}$, $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_n = 0$ sonst.

③ Aufgabe:

Berechnen Sie $\int_\gamma (y\,dx + x\,dy)$ für die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longmapsto (\cos t, \cos t)$

Def. des Kurvenint.

$\int_\gamma \eta \overset{\downarrow}{=} \int_{[0,2\pi]} \gamma^*(\eta)$.

Berechnung m. den Regeln f. den Pullback

Zu $\gamma^*(\eta)$: $\left.\begin{array}{l}\gamma^*(x)(t) = \cos t \\ \gamma^*(y)(t) = \cos t\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\gamma^*(dx) = d\gamma^*(x) = d\cos t = -\sin t \, dt$, ebenso

$\gamma^*(dy) = -\sin t \, dt$

$\Rightarrow \gamma^*(y\,dx + x\,dy) = -2 \sin t \cos t \, dt$, also

$$\int_\gamma (y\,dx + x\,dy) = \int_0^{2\pi} (-2 \sin t \cos t)\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Verdopplungsformel}}}{=} - \int_0^{2\pi} \sin(2t)\, dt$$

$$= \frac{\cos(2t)}{2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(1-1) = \underline{\underline{0}}$$

4) **Aufgabe:** Bestimmen Sie die Fouriertransformierte von

$$f(x) = e^{-2\pi a|x|} e^{2\pi i b x}$$ und

$$g(x) = e^{-2\pi a|x|} e^{-2\pi i b x}$$ für $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$.

$$\hat{f}(y) = \int_0^\infty e^{-2\pi x(a - i(b+y))} dx + \int_{-\infty}^0 e^{2\pi x(a+i(b+y))} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi(a - i(b+y))} + \frac{1}{2\pi(a+i(b+y))}$$

$$= \frac{a}{\pi(a^2+b^2+2by+y^2)}$$

$\Rightarrow$ $\hat{g}(y)$ durch $b \longmapsto -b$: $f \longmapsto g$, also

$$\hat{g}(y) = \frac{a}{\pi(a^2+b^2-2by+y^2)}$$

(5) Aufgabe ~~6~~: Formulieren Sie ein hinreichendes Kriterium für die Gültigkeit der Vertauschung

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x,y)\,dy = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy . \quad (*)$$

[Typisches Bsp. f. d. Satz v. der dominierten Konvergenz:
Sei $f_n \longrightarrow f$ pktweise, $f_n \in L(X)$ für alle n.
Es existiere $F \in L(X)$ so, dass $|f_n| \leq F$ für alle n.
Dann ist $f \in L(X)$ mit $\int_X f = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$.]

Hinreichende Voraussetzungen für (*) sind z.B.:

$$f : X \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto f(x,y)$$

- f für jedes festes x in $L(y) = L([a,b])$
- f part. diffbar in x
- $|\partial_x f(x,y)| \leq F(y)$ für $F \in L(y)$ unabh. von x.

Beweis: [Schreibe Abl. um!]

Sei $x_n \longrightarrow x$ $(x_n \neq x)$ bel. Folge.

Zu jedem x_n ex. $\Theta = \Theta(y,n) \in [a,b]$:

$$f(x_n,y) - f(x,y) = (x_n - x) \underbrace{\partial_x f(\Theta(y,n),y)}_{=: f_n(y)} \quad (\text{MWS})$$

Es gilt
- n.V. $|f_n(y)| \leq F(y)$, also insbes. $f_n \in L(y)$ ~~...~~,
- $\lim_{n\to\infty} f_n(y) = \partial_x f(x,y)$.

Wende also S.v.d.dom. Konv. an:

$$\int_a^b \partial_x f(x,y)\,dy = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x,y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{f(x_n,y) - f(x,y)}{\underbrace{x_n - x}_{\text{konst. in } y}}\,dy$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(f(x_n,y) - f(x,y)\right) dy}{x_n - x} = \partial_x \int_a^b f(x,y) .$$

⑥ Ein einfacheres Bsp. zum Satz v. der dom. Konvergenz:

Zeigen Sie $$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,dx = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,dx .$$

[Natürlich geht auch: Re Seite $= \int_0^t \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^t = -\cos t + 1$

Li Seite $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\Big|_0^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2(n+1)}}{(2n+2)!}$

$= (-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} = 1 - \cos t$,

aber uns gehts ja auch ums Üben...]

Also: Setze $s_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. s_m ist als Polynom (also stetig) int.bar auf $(0,t)$.

Außerdem: $s_m \to \sin$ punktweise (Potenzreihenentw. des Sinus!),

sowie $|s_m(x)| \leq \sum_{n=0}^{m} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} < \exp(|x|)$ (Teilsumme der Exp.-Reihe) für alle x.

$\exp(|x|)$ ist auf $(0,t)$ ebenfalls int.bar, da stetig.

Also ist Satz v. d. dom. Konv. anwendbar, und es folgt:

$\lim_{m\to\infty} \int_0^t s_m(x)\,dx$ ex. und ist $= \int_0^t \lim_{m\to\infty} s_m(x)\,dx$

$= \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,dx$

$\|$

$\lim_{m\to\infty} \int_0^t \underbrace{\sum_{n=0}^{m}}_{\text{endl. Summe}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,dx$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,dx .$

(7) Diese Aufgabe ist mit Bedacht etwas vage formuliert.

Vorab: Für $r>0$ bel. aber fest, geht das nicht für alle b, d.

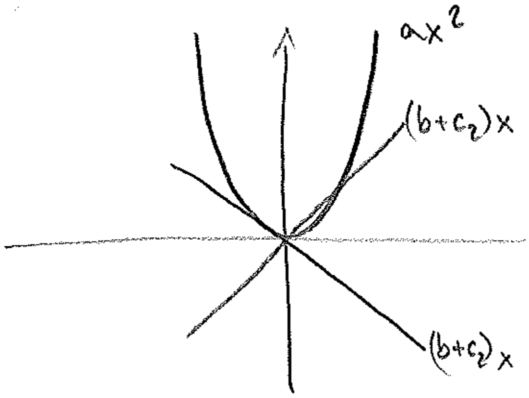
Was man immer erreichen kann: Es gibt $r>0$ und Konst. $c_1, c_2 > 0$ so, dass für alle $x \geq r$ gilt:

$$e^{-ax^2+bx+d} \leq c_1 e^{-c_2 x} \qquad (*)$$

Das reicht für die meisten Anwendungen!

Wähle $c_1 = e^d$, bleibt: $e^{-ax^2+bx} \leq e^{-c_2 x} \iff -ax^2+bx \leq -c_2 x$

$\iff ax^2 \geq (b+c_2)x$



Die Gerade $y=(b+c_2)x$ hat

- genau 1 Schnittpkt $x \geq 0$ mit der Parabel $y=ax^2$, wenn $b+c_2 \leq 0$. (Schnittpkt $x_1 < 0$ interessiert nicht)

Ist $b<0$, so wähle $0 < c_2 \leq |b|$, und erhalte $(*)$ sogar für alle $x \geq 0$, d.h. r bel.

- genau 2 Schnittpkte $x_0 = 0$ und $x_1 = \frac{b+c_2}{a} > 0$, wenn $b+c_2 > 0$.

Dann gilt $(*)$ für $x \geq \frac{b+c_2}{a}$.

Also ist $r > \frac{b}{a}$ notwendig, und c_2 und r kann man z.B. in folgender Relation wählen: $r = \frac{b+c_2}{a}$.

(8) $\dim \mathcal{P}_l = \binom{n+l-1}{l}$ für $n=5$: $\dim \mathcal{P}_0 = 1$, $\dim \mathcal{P}_1 = 5$, $\dim \mathcal{P}_2 = 15$

Basis von $\mathcal{P}_0$: 1, denn $\mathcal{P}_0$ besteht nur aus den konst. Polynomen.

Basis von $\mathcal{P}_1$: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ; $P_i(x) := x_i$

Die P_i sind homog.: $P_i(\ell x) = P_i(\ell x_1, \ldots, \ell x_5) = \ell \cdot x_i = \ell \cdot P_i(x)$

und lin. unabh, weil Pol in unterschiedl. Variablen,

Jedes hom. Pol. vom Grad 1 hat die Form $\sum a_i x_i$ $\Rightarrow$ lin. unabh.

Basis von $\mathcal{P}_2$: $\underbrace{x_1^2, x_2^2, \ldots, x_5^2}_{5}$, $x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5$ 4

x_2x_3, x_2x_4, x_2x_5 3

x_3x_4, x_3x_5 2

x_4x_5 1

Σ 15

Jedes homog. Pol. vom Grad 2 hat die Form

$$\sum_{i,j=1}^{5} a_{ij} x_i x_j ,$$

man kann zusammenfassen: $a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i = \underbrace{(a_{ij}+a_{ji})}_{=: c_{ij}} x_ix_j$ mit $\underline{i<j}$

und $a_{ii}x_ix_i = a_{ii}x_i^2$

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^{5} a_{ij}x_ix_j = \underbrace{\sum_{i=1}^{5} a_{ii}x_i^2}_{5 \text{ Summanden}} + \underbrace{\sum_{i<j} c_{ij}x_ix_j}_{4+3+2+1 \text{ Summanden}} .$$

Also: Die 15 obigen Monome x_i^2 sowie x_ix_j, $i<j$ sind offenbar lin. unabh.

und erzeugen $\mathcal{P}_2$. Also bilden sie Basis.

<u>Allg.:</u> Die Monome $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_\ell}$ mit $1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_\ell \le n$

bilden eine Basis von $\mathcal{P}_\ell = \mathcal{P}_\ell(\mathbb{R}^n)$.

Oder: Die $\dim \mathcal{P}_\ell$ ist gleich der Anzahl $A(n,\ell)$ der Mögl.keiten,

ℓ <u>gleiche</u> Bälle (1 Ball $\hat{=}$ +1 im Exponenten) auf n Töpfe (benannt $x_1, \ldots, x_n$)

zu verteilen: $\binom{n+\ell-1}{\ell}$, wie man vielleicht aus dem Kombinatorik-Unterricht in der Schule noch weiß ....

Oder $A(n,\ell) = A(n-1,\ell) + A(n,\ell-1) = A(n-1,\ell) + A(n-1,\ell-1) + A(n,\ell-2) = \ldots = \sum_{j=0}^{\ell-1} A(n-1,\ell-j) + \underbrace{A(n,0)}_{1}$

+ Induktion + Add. v. Binomkoeff.

(9) (a) Eigentl. genügt es, 2 harm. hom. Pol. vom Grad 5 in $\underline{2}$ Var. anzugeben, etwa

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^{5} a_i x^i y^{5-i}$$

$$\Delta P(x,y) = \sum_{i=0}^{5} \left(a_i \cdot i(i-1) x^{i-2} y^{5-i} + a_i (5-i)(5-i-1) x^i y^{5-i-2} \right)$$

$$= \sum_{i=2}^{5} a_i \cdot i (i-1) x^{i-2} y^{5-i} + \sum_{j=0}^{3} a_j (5-j)(5-j-1) x^j y^{5-j-2}$$

$$\overset{j=i-2}{=} \sum_{i=2}^{5} \left(a_i \cdot i(i-1) + a_{i-2} (7-i)(6-i) \right) x^{i-2} y^{5-i}$$

$$\overset{!}{=} 0$$

Bem: Dass hier $n=5$ gewählt ist, ist bislang willkürlich. Also: Wir bekommen diese Gl. für $i=2,3,\dots,n$

$\Leftrightarrow$ für $i = 2,3,4,5$ ist $a_i \cdot i(i-1) + a_{i-2}(7-i)(6-i) = 0$.

[D.h. Wahl der Koeff. a_5 und a_4 legt die anderen Koeff a_i fest.] [D.h. $\dim \mathcal{H}_5(\mathbb{R}^2) = 2$.]

<u>etwa</u>: • $a_5 = 1 \Rightarrow a_3 = -\frac{a_5 5\cdot 4}{2\cdot 1} = -10 a_5 = -10$,

$a_1 = -\frac{a_3 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = -\frac{1}{2} a_3 = 5$

und $a_4 = 0 \Rightarrow a_2 = a_0 = 0$

$$\Rightarrow P_1(x,y) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$$

• $a_5 = 0 \Rightarrow a_3 = a_1 = 0$

und $a_4 = 5 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_4 4\cdot 3}{3 \cdot 2} = -2a_4 = -10$,

$a_0 = -\frac{a_2 2\cdot 1}{5\cdot 4} = -\frac{a_2}{10} = 1$

$$\Rightarrow P_2(x,y) = y^5 - 10x^2y^3 + 5x^4y$$

(b) $ax = a(x_1,\dots,x_n) = (ax_1,\dots,ax_n)$. $P(x) = \sum b_\alpha x^\alpha$ (Multiindex) $\Rightarrow$

$$P(ax) = \sum_{|\alpha|=\ell} b_\alpha (ax_1)^{\alpha_1} \cdots (ax_n)^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=\ell} b_\alpha a^{|\alpha|} \cdot x^\alpha \overset{|\alpha|=\ell}{=} a^\ell P(x).$$

(10) • $\langle r^2 f, g\rangle = (r^2 f)(\partial)\,(g(x))$

$$= \sum \partial_{x_i}^2 \cdot f(\partial)\,(g(x)) = f(\partial)\,\overbrace{\sum \partial_{x_i}^2}^{\Delta}\,(g(x))$$

$$= f(\partial)\,\Delta g(x) = \langle f, \Delta g\rangle .$$

• $\langle\ ,\ \rangle$ symmetrisch: Seien $f, g \in \mathcal{P}_\ell$ bel,

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=\ell} a_\alpha x^{(\alpha)} = \sum_{|\alpha|=\ell} a_\alpha x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\ , \quad g(x) = \sum_{|\beta|=\ell} b_\beta x^{(\beta)}$$

$$f(\partial)\,g(x) = \sum_{|\alpha|,|\beta|=\ell} a_\alpha b_\beta \underbrace{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}\left(x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}\right)}_{\partial^{(\alpha)}(x^{(\beta)})}$$

Dabei ist $\partial_{x_i}^{\alpha_i}(x_i^{\beta_i}) = \beta_i(\beta_i-1)\cdots(\beta_i-\alpha_i+1)\,x_i^{\beta_i-\alpha_i}$,

insbes. $= 0$ für $\alpha_i > \beta_i$

ist in α ein $\alpha_i > \beta_i$, dann gibt es ein $j \neq i$ mit $\alpha_j < \beta_j$, denn $|\alpha| = |\beta|$. Dann ist also $\partial^{(\alpha)}(x^{(\beta)}) = 0$.

Also: $\partial^{(\alpha)}(x^{(\beta)}) \neq 0$ nur für $\alpha = \beta$ und

$$\partial^{(\alpha)}(x^{(\alpha)}) = \alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_n! =: \alpha!$$

$$\Rightarrow f(\partial)\,g(x) = \sum_{|\alpha|=\ell} a_\alpha b_\alpha \alpha!$$

Und andersrum: $g(\partial)\,f(x) = \sum_{|\beta|,|\alpha|=\ell} b_\beta a_\alpha \partial^{(\beta)}(x^{(\alpha)}) = \sum_{|\alpha|=\ell} b_\alpha a_\alpha \alpha!$

Beiträge nur für $\alpha=\beta$

also: $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$ •

• pos. def.: Sei $f \in \mathcal{P}_\ell$ bel.. Dann $\langle f, f\rangle = \sum_{|\alpha|=\ell} a_\alpha a_\alpha \alpha! = \sum_{|\alpha|=\ell} |a_\alpha|^2 \alpha! \geq 0$

wie oben

für alle f und $= 0 \iff |a_\alpha|^2 = 0$ für alle $\alpha \iff a_\alpha = 0$ f.a. α

$\iff \underline{\underline{f = 0}}$

12

Große Übung:

Aufgabe: Bestimmen Sie die Pot.r. entw. um 0 von

$$P_n(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n.$$

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (-1)^{n-j} x^{2j} \cdot \binom{n}{j}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \underline{\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{2j}}$$

Koeff. d. Pot.r. entw.: $P_n(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l$ mit $a_l = \frac{P_n^{(l)}(0)}{l!}$

$$P_n^{(l)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+l} x^{2j}}$$

$$= 2j \cdot (2j-1) \cdots (2j-(n+l)+1)\, x^{2j-(n+l)}$$

insbes. $=0$ für $n+l > 2j$

und $\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+l} x^{2j} \Big|_{x=0} = 0$ für $2j > n+l$

$$\Rightarrow P_n^{(l)}(0) = \delta_{n+l,2j} \cdot \binom{n}{j} (-1)^{n-j} (2j)!\,, \quad l \le n \quad \left[\begin{matrix} 2j = n+l \\ j = \frac{n+l}{2} \end{matrix}\right]$$

$$= \begin{cases} (n+l)!\,(-1)^{\frac{n-l}{2}} \dfrac{n!}{\left(\frac{n+l}{2}\right)!\left(\frac{n-l}{2}\right)!} & \text{, wenn } n+l \text{ gerade}, l \le n \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_l = \frac{P_n^{(l)}(0)}{l!} = \frac{(n+l)!}{l!} \binom{n}{\frac{n+l}{2}} (-1)^{\frac{n-l}{2}} \quad \text{für } l \le n,\ n+l \text{ gerade}$$