Leitfaden für die folgenden Notizen:

Seite

1 : sternförmige Mengen (Def.), Beispiele,
in der Vorlesung wurde ähnliches gemacht;

2-3: Wiederholung der Eckpunkte der letzten großen Übung

3-5: 2. Teil der Lebesgue-Theorie für den Spezialfall der Folgen

6-7: Kleine Bem. zur Kompatibilität v. Standard- mit Lebesgue-Integral; wurde zugunsten von (a)-(c) weggelassen

(a)-(c): Kurzzusammenfassung der Diff.formen

Große Übung 19.10.2011

Anmerkung zur Def. einer sternförmigen Menge:

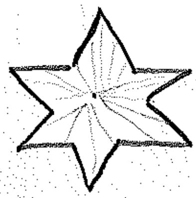
Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn es einen Pkt P (sog. Sternmittelpunkt) gibt so, dass für jedes $x \in U$ die Verbindungsstrecke von P zu x ganz in U liegt.

Bsp: • Jede $\left\{ \begin{array}{l} \text{Kreisscheibe} \\ \text{Kugel für } n \neq 2 \end{array} \right\}$ $K_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| < r\}$

ist sternförmig: Jeder Pkt $x \in K_r(a)$ ist Sternmpkt.
Beweisen Sie das!

• Ebenso: Jeder Quader ist sternförmig

• Die meisten „Sterne" sind sternförmig:



• z.B. ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nicht sternförmig,
denn wäre $P = (x,y)$ ein Sternmittelpkt, dann müßte
$\lambda(x,y) + (1-\lambda)(-x,-y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ für alle $\lambda \in [0,1]$
gelten. Aber für $\lambda = \frac{1}{2}$ erhält man

$$\tfrac{1}{2}(x,y) + \tfrac{1}{2}(-x,-y) = (0,0)$$

In Worten: $(0,0)$ liegt auf der Verbindungsstrecke von (x,y) zu $(-x,-y)$.
Also kann kein Pkt Sternmittelpkt sein.

Widerhole:

- Verband $\mathcal{B}$ der endl. Folgen in $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}$-VR , versehen mit min/max-Bildung

- $\mathcal{B}^+$ monotone Hülle von $\mathcal{B}$:
  - besteht aus Suprema der gliedw. mon. aufsteigenden Folgen von Folgen
  - d.h.: (unendl) Folgen mit Werten in $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit nur endl. vielen neg. Gliedern

- $\mathcal{B}^-$ monotone Hülle von $\mathcal{B}$:
  - $-\mathcal{B}^+ = \mathcal{B}^-$
  - besteht aus Infima der gliedw. mon. fallenden Folgen von Folgen
  - d.h. (unendl) Folgen mit Werten in $\mathbb{R}^-$ und nur endl. vielen pos. Gliedern

Daniell-Integral auf $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^+$, $\mathcal{B}^-$:
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Sigma^+$, Σ^-

$$(a_n) \longmapsto \sum a_n ,$$

mit Werten in $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$

Lebesgue-Int. für Folgen:

Sei (f_n) bel. Folge

$$\Sigma^\# f_n = \inf \{ \Sigma^+ g_n \mid (g_n) \in \mathcal{B}^+ , (f_n) \leq (g_n) \}$$

$$\Sigma^b f_n = \sup \{ \Sigma^- h_n \mid (h_n) \in \mathcal{B}^- , (h_n) \leq (f_n) \}$$

(f_n) heißt L-summierbar, wenn

$$\Sigma^b f_n = \Sigma^\# f_n \in \mathbb{R} .$$ Schreibe dann Σf_n

Satz 3.16: Die L-summierbaren Folgen bilden einen Verband $L \supset B$,

Bsp.: Die Folge $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ist nicht L-summierbar.

Bew.: Da jede Folge (g_n) in B^+ nur endl. viele neg. Glieder hat, gilt für Folgen, die man bei der $\Sigma^\#$-Bildung betrachten muß „bestenfalls":

$$\left.\begin{array}{l} g_{2n+1} = 0 \\ g_{2n} = \frac{1}{2n} \end{array}\right\} \text{ für fast alle } n$$

Für diese gilt

$$\Sigma^+ g_n = \text{const} + \sum_{n \geq N} \frac{1}{2n}$$

$$= \text{const.} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

(harmon. Reihe)

Also: $\Sigma^\# a_n = \infty \notin \mathbb{R}$. ∎

Allgemein: (f_n) ist L-summierbar $\iff$ $|(f_n)|$ ist L-summierbar

$\iff$ Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert absolut.

(D.h. $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \in \mathbb{R}$)

Theorie d. L-summierbare Folgen ist die Theorie der absolut konvergenten Reihen.

Bew.: „$\Rightarrow$": Mit (f_n) ist $|(f_n)|$ im Verband L, also $|(f_n)|$ summierbar.

„$\Leftarrow$": Ist $|(f_n)|$ L-summierbar, d.h. $\sum |f_n| < \infty$, dann gilt auch für jede Teilfolge $|(f_{n_j})|$, dass $\sum |f_{n_j}| \leq \sum |f_n| < \infty$

Insbesondere gilt das für die Teilfolgen $|(f_n)^+|$ und $|(f_n)^-|$:

$$\sum |f_n^+| = \sum f_n^+ < \infty, \quad \sum |f_n^-| = \sum (-f_n^-) < \infty.$$

Also: $(f_n)^+, (f_n)^- \in L$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ L \text{ Verband}}}{\Rightarrow} \quad (f_n) = (f_n)^+ + (f_n)^- \in L$$

D.h.: Eine reelle Folge $(f_n) \in L$ definiert eine absolut konvergente Reihe $\sum f_n$.

Vertauschungssätze

Satz 3.19: (Beppo Levi) Eine monoton wachsende Folge $(f_n)^m \nearrow (f_n)$ in L definiert eine monoton wachsende Folge $\sum_n (f_n^m)$ in $\mathbb{R}$.

Ist $\limsup_m \sum_n f_n^m < \infty$, dann ist die Grenzfolge $(f_n) \in L$

mit $\sum_n f_n = \sum_n \limsup_m f_n^m = \limsup_m \sum_n f_n^m < \infty$.

[Analog mon. fallende Folgen.]

Satz 3.20: (Lebesgue, Satz v.d. dominierten Konvergenz)

Es sei $(f_n)^m \to (f_n)$ eine gliedweise Konv. Folge (v. Folgen) in L, so dass $F \in L$ ex. mit $|(f_n)^m| \leq F$ für alle m.

Dann ist auch (f_n) L-summierbar mit $\sum_n \lim_m (f_n)^m = \lim_m \sum_n f_n^m$.

Folg.: (Umordnungssatz) Ist (f_n) L-summierbar und $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Umordnung (Bijektion) der nat. Zahlen, dann gilt:

$$\sum f_n = \sum f_{\sigma(n)}$$

Absolut konv. Folgen kann man bel. umordnen!

Beweis: Man wendet Satz 3.20 mit der konst. Folge $(f_{\sigma(n)})$ und der Majorante $(F_n) = |(f_{\sigma(n)})| \in L$.

Kor. 3.22: (Fubini für Doppelreihen) Es gilt $\mathbb{N} \overset{bij}{\to} \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Sei $(f_{m,n}) \in L(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$. Die Abb. $\begin{array}{ccc}(f_{m,n}) & \longmapsto & (\sum_n f_{m,n}) \\ L(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) & \longrightarrow & L(\mathbb{N})\end{array}$ ist linear,

Es gilt: $$\sum_{m,n} f_{m,n} = \sum_m \sum_n f_{m,n} \overset{\text{analog}}{=} \sum_n \sum_m f_{m,n}.$$

Cauchy-Produkt

Es seien $(a_n), (b_n) \in L$, also insbes. $\sum_n a_n < \infty$, $\sum_m b_m < \infty$.

Also gilt: $$\sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{m\in\mathbb{N}} b_m\Big) a_n \overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{n,m\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} b_m a_n < \infty.$$

Nach dem Umordungssatz können in bel. Reihenfolge summieren.

Wir machen das diagonal, also via der Identität

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k, \quad D_k := \{(m,n) \mid m+n = k\}.$$

Definiere die (für alle k endl. Teilsumme) $c_k = \sum_{D_k} b_m a_n$.

Dann erhalten wir das sog. Cauchy-Produkt der absolut konv. Reihen $\sum_n a_n$, $\sum_n b_m$:

$$\sum_k c_k = \sum_n a_n \cdot \sum b_m < \infty,$$

d.h. $\sum_k c_k$ ist abs. konv., d.h. $(c_k) \in L$.

[Für (konv.) Potenzreihen: $(\sum_n a_n x^n)\cdot(\sum_m b_m x^m) = \sum_k c_k x^k$, c_k wie oben def.]

Bem. zu Kompatibilität des Standardintegrals mit dem Lebesgue-Integral

(1-dim, n-dim analog)

Sei $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$, also X kompakt

$CT(X)$: Raum d. stückw. stetigen Fkten;

Auf $CT(X)$ habe Standardint..

Nimm $CT(X)$ als Verband $\mathcal{B}$.

Das Standardint. ist auf $CT(X)$ ein Daniell-Integral, und für das resultierende Lebesgue-Int. auf X gilt:

Ist $f \in CT(X)$, so ist f Lebesgue-int.bar mit

$$\int_{St.} f = \int_L f.$$

Standardintegral auf $\mathbb{R}$: Zunächst für stückw. stetige Fkten mit kompaktem Träger (also spezialisieren auf irgendein komp. X), $C_c(\mathbb{R}) \triangleq$ Verband $\mathcal{B}$. Uneigentl. Stand. int. durch Limesbildung.

<u>Folg.</u>: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stand. int. bar auf jedem Teilintervall $[-n,n]$, $n \in \mathbb{N}$. <u>Wenn</u> $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} |f|(x)\,dx < \infty$ existiert, dann ist f Lebesgue-intbar auf $\mathbb{R}$ mit $\int_L f = \int_{St} f$.

<u>Bem</u>: Aussage falsch ohne Betrag im Int. der Voraussetzung (Vgl. Aufg. 4)

Bew.: Setze $f_n = |f| \cdot \chi_{[-n,n]}$.

Es gilt $\underbrace{|f| \cdot \chi_{[-n,n]}}_{\text{Leb.-int.bar}} \nearrow |f|$ mit $\lim_{n\to\infty} \int_L |f| \cdot \chi_{[-n,n]} = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} |f| \, dx$ ex.
St.

Beppo Levi $\Longrightarrow$ $|f|$ Leb.-int.bar mit $\int_L |f| = \lim_{n\to\infty} \int_L |f| \cdot \chi_{[-n,n]}$.

Es gilt aber auch $f_n \longrightarrow f$ punktweise und $|f_n| \le |f| =: F$,

Satz v. d. dom. Konv. $\Longrightarrow$ f L-int.bar mit

$$\int f = \int_L \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_L f_n \qquad \blacksquare$$

Bsp.: Die Fkt $f(x) = \exp(-x)$ ist Leb.-intbar auf $[0,\infty)$ mit

$$\int_L \chi_{[0,\infty)}(x) \exp(-x)\, dx = 1,$$

Denn $\underbrace{f_n(x) = \chi_{[0,n]}(x) \exp(-x)}_{\in C_c(\mathbb{R})} \nearrow \exp(-x) \cdot \chi_{[0,\infty)}$.

$$\int_L f_n = \int_0^n e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big|_0^n = 1 - e^{-n},$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_L f_n = \lim_{n\to\infty} (1 - e^{-n}) = 1.$$

Mit obiger Folg. sieht man: $\exp(-x) \cdot \chi_{[0,\infty)}$ ist Leb.-intbar mit

$$\int_L \exp(-x)\, \chi_{[0,\infty)} = 1.$$

Kurzzusammenfassung Differentialformen

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen (oder zulässig)

$I \subseteq \{1, \dots, n\}$: • $dx_I := dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots dx_{j_i}$,

wo $I = \{j_1, \dots, j_i\}$

und $j_1 < j_2 < \dots < j_i$

• $\omega_I \in C^\infty(U)$

Def. eine Diff.form $\omega(x) = \sum_{I, |I|=i} \omega_I(x)\, dx_I$.

Zwei solche Diffformen kann man addieren und mit Konstanten aus $\mathbb{R}$ multiplizieren.

$\Rightarrow$ Menge d. Diff.formen „vom Grad i" bilden VR $A^i(U)$.

Bez. A kommt von <u>alternierend</u> und bezieht sich aufs <u>$\wedge$-Produkt</u>:

$$dx_l \wedge dx_k = - dx_k \wedge dx_l$$

(<u>Folg.</u>: $dx_l \wedge dx_l = 0$)

Diff'formen kann man zunächst zu bel. $i \in \mathbb{N}$ bilden:

• $A^0(U) = C^\infty(U)$

• $A^1(U) = C^\infty(U)\, dx_1 \oplus \dots C^\infty(U)\, dx_n$

...

• $A^n(U) = C^\infty(U)\, dx_1 \wedge \dots dx_n$

Für $j > 0$ gilt: $A^{n+j}(U) = 0$, weil Diff'formen alternierend: in einem Prod. aus mehr als n Faktoren dx_l muß mind. eines 2mal vorkommen.

(b)

Weiter zum $\wedge$-Produkt: Allg. $\wedge : A^i(U) \times A^j(U) \longrightarrow A^{i+j}(U)$

$$\left(\sum \omega_I(x)\,dx_I , \sum \omega_J(x)\,dx_J \right) = \sum_{I,J} \omega_I(x)\cdot\omega_J(x)\,dx_I \wedge dx_J$$

distributiv.

Es gilt $\quad dx_I \wedge dx_J = (-1)^{|I|\cdot|J|}\, dx_J \wedge dx_I$.

Cartan-Ableitung d für jedes i Abb. $A^i(U) \to A^{i+1}(U)$:

$$A^0(U) \xrightarrow{d} A^1(U) \xrightarrow{d} A^2(U) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} A^n(U) \xrightarrow{d} 0$$

definiert durch $\quad d\left(\sum_I \omega_I(x)\,dx_I \right) = \sum_I \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}(\omega_I(x))\,dx_j \wedge dx_I$.

Bsp.: • $f \in A^0(U) = C^\infty(U)$:

(totales Differential)

$$df(x) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f(x)\,dx_j \quad \underline{\text{insbes.}} \; \boxed{d(x_i) = dx_i} \; !!$$

• $$d(x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2) = \sum_{j=1}^n \left[\partial_{x_j}(x_2)\,dx_j \wedge dx_1 + \partial_{x_j}(x_1)\,dx_j \wedge dx_2 \right]$$

$$= dx_2 \wedge dx_1 + dx_1 \wedge dx_2 = -dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_2 = 0$$

<u>Produktformel:</u> $\eta \in A^i(U)$, $\omega \in A^j(U)$

$$d(\eta \wedge \omega) = d\eta \wedge \omega + (-1)^i \eta \wedge d\omega$$

Wichtige Eigenschaft: $\quad d^2 : A^i(U) \xrightarrow{d} A^{i+1}(U) \xrightarrow{d} A^{i+2}(U)$

ist die 0-Abbildung: $d^2 = 0$.

Der **Pullback** ist eine Abb. zw. Diff-formen auf verschiedenen Mengen.

$U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen (zulässig).

$\varphi : U \to V$ unendl. oft diffbar.

Pullback $\varphi^* : A^\bullet(V) \longrightarrow A^\bullet(U)$, d.h. $\forall i$: $\varphi^* : A^i(V) \to A^i(U)$

bestimmt durch die folgenden Eigenschaften:

(i) φ^* ist $\mathbb{R}$-linear.

(ii) φ^* ist multiplikativ: $\varphi^*(\eta \wedge \omega) = \varphi^*(\eta) \wedge \varphi^*(\omega)$

(iii) φ^* vertauscht mit Cartanabl.: $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$

(iv) Für 0-Formen $\omega(y) = f(y) \in A^0(V)$ gilt

$$\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x)).$$

Bsp.: (1) auf U Koord. $x_1, \dots, x_n$, auf V Koord $y_1, \dots, y_m$

$$\varphi^*(dy_k) \overset{(iii)}{=} d\varphi^*(y_k) \overset{(iv)}{=} d(y_k \circ \varphi) = d(\varphi_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\partial_{x_j}(\varphi_k)}_{(D\varphi)_{kj}} dx_j$$

(2) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \varphi^* : A^\bullet(\mathbb{R}) \longrightarrow A^\bullet(\mathbb{R}^2)$

$(x_1, x_2) \longmapsto x_1 \cdot x_2$

- $\varphi^*(y)(x) = y(x_1 \cdot x_2) = x_1 x_2$
- $\varphi^*(dy) = d\varphi^*(y) = d(x_1 \cdot x_2) = \sum_{j=1,2} \partial_{x_j}(x_1 x_2)\, dx_j = x_2 dx_1 + x_1 dx_2$.