Große Übung vom 18. Jan. 2012

1) Besprechung der Ü-Aufg. 43 bis 45 vom Weihnachtsblatt.

Aufg. 43: Fouriertransformation $f(x) = e^{-2\pi|x|}$

(a) $$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi|x|} e^{2\pi i x y}\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{2\pi(iy-1)x}\, dx + \int_0^{\infty} e^{-2\pi(iy+1)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi(iy-1)} \lim_{x\to\infty} e^{(iy-1)2\pi x}\Big|_0^{x} - \frac{1}{2\pi(iy+1)} \lim_{x\to\infty} e^{-(iy+1)2\pi x}\Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2\pi(iy-1)} \Big(\underbrace{\lim_{x\to\infty} \underbrace{e^{2\pi i x y}}_{|\,|=1} \cdot \underbrace{e^{-2\pi x}}_{\to 0}}_{=0} - 1 \Big) + \frac{1}{2\pi(iy+1)}$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-iy)} + \frac{1}{2\pi(iy+1)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{iy+1+1-iy}{1+y^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

(b) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+y^2)^2}\, dy = \pi^2 \left\langle \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \frac{1}{\pi(1+y^2)} \right\rangle_{L^2} = \pi^2 \cdot \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle_{L^2}$$

$$\overset{\text{Aufg. 38} \,\hat{=}\, \text{Parseval}}{=} \pi^2 \langle f, f \rangle_{L^2} = \pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4\pi|x|}\, dx$$

$$= 2\pi^2 \int_0^{\infty} e^{-4\pi x}\, dx = \frac{2\pi^2}{-4\pi} e^{-4\pi x}\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Aufg. 43: (c) Mit Aufg. 42 $\hat{=}$ Poissonsche Summenformel mit $t=0$ ②

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi|n|} = \frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+k^2} \quad \text{, also}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+k^2} = \pi\cdot\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi|n|} = \pi\left(2\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-2\pi})^n - 1\right)$$

$$\overset{\text{geom. Reihe}}{=} \pi\cdot\left(\frac{2}{1-e^{-2\pi}} - 1\right) = \pi\left(\frac{2e^{2\pi}}{e^{2\pi}-1} - 1\right) = \pi\left(\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}\right)$$

(d) Bestimme aus $\hat{f}$ die FT von $(1-x)f(x)$ und $e^{-|x|}$.

Wende Lemma 6.10 an:

$$g(x) := (1-x)f(x) \implies \hat{g}(y) \overset{\text{Lin.}}{=} \hat{f}(y) - \mathcal{F}(xf)(y)$$

$$\overset{(2)}{=} \hat{f}(y) - \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dy}\hat{f}(y)$$

$$= \frac{1}{\pi(1+y^2)}\left(1 - \frac{1}{2\pi i}\frac{-2y}{1+y^2}\right)$$

$$= \hat{f}(y)\left(1 - iy\hat{f}(y)\right)$$

$h(x) := e^{-|x|}$, Habe $T_{\frac{1}{2\pi}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f\left(\frac{x}{2\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-|x|}$, also

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\cdot T_{\frac{1}{2\pi}} f(x)$$

$$\overset{\text{L. 6.10 (3)}}{\implies} \hat{h}(y) = \sqrt{2\pi}\, T_{2\pi}\hat{f}(y) = \sqrt{2\pi}^2\,\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+4\pi^2y^2} = \frac{4}{1+4\pi^2y^2}$$

V norm. VR

Aufg. 44: $B \subset V$ heißt dicht, wenn es zu jedem $v \in V$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $b \in B$ gibt mit $\|v-b\| < \varepsilon$.

zeige: $A \subset B$ dicht, $B \subset V$ dicht $\Rightarrow$ $A \subset V$ dicht

Bew.: Sei $v \in V$ bel., $\varepsilon > 0$ bel. . z.z.: ex. $a \in A$ mit $\|v-a\| < \varepsilon$.

$B \subset V$ dicht $\Rightarrow$ ex. $b \in B$ mit $\|v-b\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$A \subset B$ dicht $\Rightarrow$ ex. $a \in A$ mit $\|b-a\| < \frac{\varepsilon}{2}$

Dann gilt: $\|v-a\| \leq \|v-b\| + \|b-a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ∎

[Diagonalfolgenargument: (Eher zu äquiv. Def. der Dichtheit: $B \subset V$, wenn jedes $v \in V$ Limes einer Folge b_n aus B ist.)

Da $B \subset V$ dicht, ex. $(b_n)_n$ in B mit $\|v-b_n\| < \frac{1}{n}$.

Da $A \subset B$ dicht, ex. zu jedem n eine Folge $(a^n_m)_m \to b_n$, sogar: $\|b_n - a^n_m\| < \frac{1}{m}$.

$\Rightarrow$ $\|v - a^m_m\| \leq \|v-b_m\| + \|b_m - a^m_m\| < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m}$.

Also konv. die Diag.folge $(a^m_m)_m$ aus A gegen v.

Bzw. $\|v-a^m_m\| < \frac{2}{m} < \varepsilon$ für $m > \frac{2}{\varepsilon}$.]

Aufg. 45: V vollst. norm. VR, $A \subset V$.

$$\bar{A} := \{x \in V \mid B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \text{ für alle } \varepsilon > 0\}$$

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in V \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$$

z.z.:

(a) A liegt dicht in A:

Zunächst $A \subset \bar{A}$, weil für alle $a \in A$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$B_\varepsilon(a) \cap A \ni a.$$

Nach Vor. gilt für alle $\varepsilon > 0$, $x \in \bar{A}$: $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.

Sei $\varepsilon > 0$ bel. und nimm $a \in B_\varepsilon(x) \cap A$.

Dann gilt $\|x - a\| < \varepsilon$. Da x bel., ist $A \subset \bar{A}$ dicht.

(b) $\bar{A}$ ist abg.

Es sei (x_n) CF in $\bar{A}$ und $x \in V$ ihr Grenzwert (ex., da V vollst.)

z.z.: $x \in \bar{A}$.

Zu $\varepsilon > 0$ ex. $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n > N$ gilt $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Fixiere solches n.

Nimm $a \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_n)$ (ex. n. Vor.). Dann gilt:

$$\big|\, \|x_n - a\| - \|x - a\| \,\big| \underset{\uparrow \, \Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \|x_n - a + a - x\| = \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (*).$$

Fallunterscheidung:

- $\|x_n - a\| - \|x - a\| > 0$:
  Dann ist $\|x - a\| < \|x_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$ nach Wahl von a

- $\|x - a\| - \|x_n - a\| \geq 0$:
  Dann ist nach (*): $0 \leq \|x - a\| - \|x_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$, also
  $\|x - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \|x_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

In jedem Fall gilt also: $\|x - a\| < \varepsilon$, d.h. $a \in B_\varepsilon(x) \cap A$.

Da $\varepsilon > 0$ bel., gehört x zu $\bar{A}$.

(c) A abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $A = \overline{A}$.

„$\Leftarrow$": $A = \overline{A} \overset{(b)}{\Longrightarrow}$ A abg.

„$\Rightarrow$" (durch Negation): Sei $A \subsetneq \overline{A}$ und $x \in \overline{A} \setminus A$.

Nach Vor. ex. für alle $n \in \mathbb{N}$ $a_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$, also $\| a_m - x \| < \frac{1}{n}$ für alle $m \geq n$.

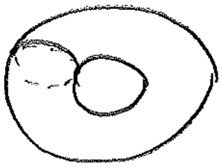
$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = x$. Da $x \notin A$, ist A nicht abg.

(d) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

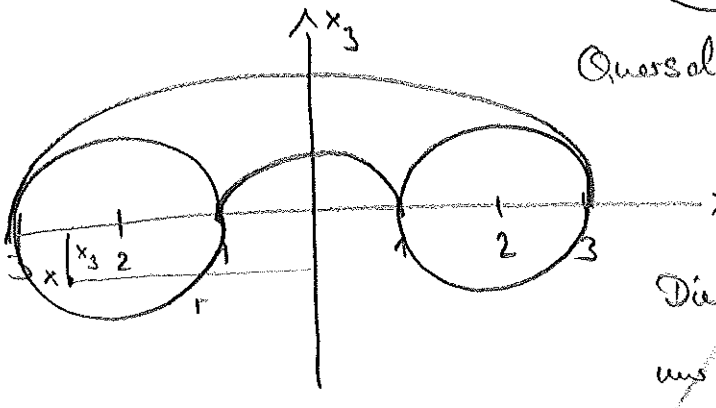
Nach (b) ist $\overline{A}$ abg., was nach (c) glbed. mit $\overline{A} = \overline{(\overline{A})} = \overline{\overline{A}}$.

2) Bsp für Untermannigfaltigkeit mit Rand:

Torus $T \subseteq \mathbb{R}^3$



Querschnitt



x_1-x_2-Ebene

Die x_1-x_2-Komp. von $x \in T$ hängt nur nur $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ab, nicht vom Winkel φ.

Also: $x \in T \iff (r-2)^2 + x_3^2 \leq 1$

$$\iff f(x) := -1 + (r-2)^2 + x_3^2 \leq 0$$

$\partial T = \text{Rand v. } T = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0 \}$

$$\xi \in \partial T \iff (r-2) + \xi_3^2 = 1 \iff r^2 - 4r + \xi_3^2 + 3 = 0$$

$$\iff r_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(\xi_3^2 + 3)}}{2} = 2 \pm \sqrt{1 - \xi_3^2}$$

$$\iff \xi_3^2 = 1 - (r-2)^2 \iff \boxed{\xi_{3\,1/2} = \pm\sqrt{1-(r-2)^2}}$$

Finde möglichst praktische Karten für ∂T:

x_1-x_2-Koord. in Polarkoord: $(\xi_1, \xi_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$$\partial T \ni \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \pm\sqrt{1-(r-2)^2})$$

Also:
$$\lambda_+ : (1,3) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \partial T^+ = \{ \xi \in \partial T \mid \xi_3 > 0 \}$$
$$(r, \varphi) \longmapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, +\sqrt{1-(r-2)^2})$$

$$\lambda_- : (1,3) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \partial T^- = \{ \xi \in \partial T \mid \xi_3 < 0 \}$$
$$(r, \varphi) \longmapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, -\sqrt{1-(r-2)^2})$$

Diffeomorphismen, d.h. bij, stetig diffbar und stetig diffbar umkehrbar

Die Bilder von λ_+, λ_- überdecken ∂T zusammen bis auf Äquator ($\xi_3 = 0$) und seiner „Schweißnaht“.

Dieser besteht aus zwei Kreisen in der x_1-x_2-Ebene mit Radien $r=1,3$.
Und einem Kreis vom Radius 1 in der x_1-x_3-Ebene (mit Mittelpkt $(x_1,x_3)=(2,0)$).
Das sind Nullmengen in $\mathbb{R}^2$!

[Will man zwei Karten $\tilde{\lambda}_\pm$, die ∂T ganz überdecken, dann muß man $\lambda_\pm$ auf $(1-\varepsilon, 3+\varepsilon)\times(-\delta, 2\pi+\delta)$ ausweiten und dabei auf den hinzugekommenen Pkten $\lambda_\pm$ „verschmieren/dehnen".
Dann benötigt man zum Integrieren die Partition der Eins, um die Überlappungsbereiche von $\tilde{\lambda}_+$ und $\tilde{\lambda}_-$ nicht doppelt zu integrieren!] theoretisch, geht aber immer

Da aber $\partial T \setminus (\mathrm{Im}\,\lambda_+ \cup \mathrm{Im}\,\lambda_-)$ Nullmenge und ← praktisch, im Spezialfall!

$$\mathrm{Im}\,\lambda_+ \cap \mathrm{Im}\,\lambda_- = \emptyset,$$

gilt für jede 2-Form η (etwa $\eta \in A^2(\mathbb{R}^3)$):

$$\int_{\partial T} \eta = \int_{\mathrm{Im}\lambda_+ \cup \mathrm{Im}\lambda_-} \eta = \int_{(1,3)\times(0,2\pi)} \lambda_+(\varepsilon_+\eta) + \int_{(1,3)\times(0,2\pi)} \lambda_-(\varepsilon_-\eta),$$

wo $\varepsilon_\pm = \mathrm{sign}\,(\underbrace{\partial_3 f(\xi)}_{\neq 0,\text{ wenn } \xi \notin \text{Äquator}}) = \mathrm{sign}\,(2\xi_3)$, also $\varepsilon_+ = +1$, $\varepsilon_- = -1$

$$= +\int_{(1,3)\times(0,2\pi)} \lambda_+(\eta) - \int_{(1,3)\times(0,2\pi)} \lambda_-(\eta).$$