Große Übung 14.12.2011

Äquivalenzklassen

① 

- Es sei $M$ eine Menge und „$\sim$" irgendeine Relation (Beziehung) auf $M$. Dann heißt $\sim$ eine Äquivalenzrelation, wenn gilt: $\forall x,y,z \in M$:
  - $x \sim x$ (Reflexivität)
  - $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (Symmetrie)
  - $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (Transitivität)

- Bsp.: $M = \mathbb{Z}$, „$\sim$": Division mit Rest bzgl. einer festen Zahl $m > 0$:
  $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen „äquivalent modulo $m$" ($a \equiv b \mod m$), wenn:
  $$a = a_1 \cdot m + r \qquad a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$$
  $$b = b_1 \cdot m + r \qquad \text{für dasselbe } r \in \{0, \ldots, m-1\}.$$

  Es gibt genau $m$ Äquivalenzklassen:
  $$[0] = \mathbb{Z} \cdot m,$$
  $$[1] = 1 + \mathbb{Z} \cdot m, \qquad [1] = [m+1] = [2m+1] = \ldots$$
  etc.
  $$[m-1] = (m-1) + \mathbb{Z} \cdot m = [-1] = \ldots$$

  Man schreibt für diese $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Beachte: $\mathbb{Z}$ ist eine additive Gruppe, $m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ ist U-Gr.
Dann trägt $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ebenfalls Gruppenstruktur!

- $[a] + [b] = (a + \mathbb{Z}\cdot m) + (b + \mathbb{Z}\cdot m) = (a+b) + \mathbb{Z}\cdot m = [a+b]$
- neutrales Element: $[0]$: $[0] + [a] = 0 + \mathbb{Z}\cdot m + a + \mathbb{Z}\cdot m = a + \mathbb{Z}\cdot m = [a]$
- inverses Element: $-[a] = [-a]$, denn $[a] + [-a] = a + \mathbb{Z}\cdot m - a + \mathbb{Z}\cdot m = 0 + \mathbb{Z}\cdot m = [0]$

Dieses Konzept gilt allgemein: [Für kommutative Gruppen; oder auch allgemeiner für $U$ Normalteiler: $G/_U$ wieder Gr.]

Sei $G$ eine Gruppe $(G,+)$, $U$ eine Untergruppe $(U,+)$ und „$\sim$" die Äquiv. rel. die durch $U$ auf $G$ induziert wird:

$$a \sim b \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \exists\, u \in U : a + u = b \quad (\text{oder}: a - b = u')$$

Beachte: $a \sim b \Leftrightarrow a - b \sim 0 \Leftrightarrow a - b \in U$

Das ist wirklich Äquiv.rel.:
- $\forall a \in G$ gilt: $a \sim a$, denn $a + 0 = a$ und $0 \in U$, weil $U$ eine U-Gr.
- $\forall a,b \in G$ gilt: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$, denn $a \sim b$, d.h. ex. $u \in U$ mit $a + u = b$. Dann ist $b + (-u) = a$, und $-u \in U$, weil $U$ U-Gr, also auch $b \sim a$.
- $\forall a,b,c \in G$ gilt: $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$. Denn seien $u, u' \in U$ mit $a + u = b$ und $b + u' = c$. Dann gilt $a + u + u' = b + u' = c$ und $u + u' \in U$ weil $U$ U-Gr, also: $a \sim c$.

Dann bezeichnet man mit $G/_U$ den Faktorraum (Quotientenraum) von „$G$ modulo $U$", das heißt:

Die Äquivalenzklassen $[a] = a + U$, $a \in G$, sind die Elemente von $G/U$.

[Vertreter einer Klasse]

$G/U$ erbt eine Gruppenstruktur von $G$:

Die Äquiv.klassen nennt man dann meist Nebenklassen

- $[a] + [b] = a + U + b + U = [a+b]$
- $[0] = U$
- $[a] + [-a] = [0]$

Man kann auch mehr erreichen:

- $V$ $\mathbb{C}$ Vektorraum $(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$, $U < V$ Untervektorraum.

Dann hat auch $V/U$ Vektorraumstruktur:

- additive Gruppe ist klar
- skalare Multiplikation: $\lambda \cdot [v] = \lambda(v + U) = \lambda v + \lambda U = \lambda v + U$

  für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

  für $\lambda = 0$ definiert man $\lambda \cdot [v] = [0] = U$.

Bsp.: (1) Die Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ (bzgl abs. Betrag $|\cdot|$) definieren einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathcal{R}$. $(a_n), (b_n)$ CF $\Rightarrow$ • $(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n)$ CF

• $\lambda \cdot (a_n)$ CF für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Sei $W$ der U-VR der Nullfolgen in $\mathcal{R}$.

Dann ist $\mathcal{R}/W$ ein $\mathbb{Q}$-VR. Man nennt ihn $(\mathbb{R}, +)$ $\; 0 := [0] = W$

Sogar noch mehr: Ist $(c_n) \in \mathcal{R}$ keine Nullfolge, so kann man $(\tilde{c}_n) = (c_n) + (a_n)$ $((a_n) \in W)$ so abändern, dass $\tilde{c}_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $(\tilde{c}_n)^{-1} := (\tilde{c}_n^{-1})$ auch eine CF sowie: $(b_n), (c_n) \in \mathcal{R}$ bel.: $(b_n)\cdot(c_n) := (b_n \cdot c_n)$ ist CF

und für $(a_n), (a_n') \in \mathcal{N}$ gilt: (Rechnung!)

$$(b_n + a_n)\cdot(c_n + a_n') = (b_n \cdot c_n) + (a_n'') \text{ mit}$$

$$(a_n'') \in \mathcal{N}$$

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist auch eine multipl. Gruppe,

also: $\mathbb{R}$ ist Körper.

(Man zeigt dann: $\mathbb{R}$ ist vollst. bzgl. des induzierten abs. Betrags $|\cdot|$.)

(2) $L^2(X, \underset{\mathbb{R}}{\mathbb{C}})$: Entsteht aus $\mathcal{L}^2(X, \mathbb{C}) = \{ f: X \to \mathbb{C}$ meßbar mit $|f|^2 \in L(X) \}$

modulo $\mathcal{N} = \{ f: X \to \mathbb{C}$ meßbar, Träger$(f)$ = Nullmenge$\}$

U-VR der Nullfunktionen.

Üblich bei solchen Faktorräumen: Man identifiziert einen Vertreter der Äquiv.kl. mit dieser, etwa

$$C_c(X, \mathbb{C}) \subseteq L^2(X, \mathbb{C}).$$

Das gilt eben im $L^2$-Sinne.

$C_c(X, \mathbb{C}) \xhookrightarrow{\text{inj.}} L^2(X, \mathbb{C})$ , $C_c(X, \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{L}^2(X, \mathbb{C})$

$\mathbb{C}$-Vektorräume

und $f, g \in C_c(X, \mathbb{C})$ sind genau dann äquivalent, wenn sie gleich sind:

$f \sim g \Leftrightarrow f - g \in \mathcal{N} \Leftrightarrow f - g = 0$, da $f, g$ <u>stetig</u>!

Schwartz-Funktionen: Raum der S-Fkten: $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ unendl. oft diffbar so, dass

$$|f^{(n)} \cdot P(x)| \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0, \text{ alle Polynome } P.$$

„schnell abklingend."

Prototypen: • $P(x) \cdot e^{-(ax^2+bx+c)}$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $b, c \in \mathbb{R}$,

[oder $P(x) \cdot e^{-b|x|+c}$ für $b \in \mathbb{R}_{>0}$, $c \in \mathbb{R}$: ist schnell abklingend, aber nicht $C^\infty$!]

• $C^\infty$-Fkten mit kompaktem Träger

Es gilt • $\mathcal{S} \subseteq L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ als $\mathbb{R}$-VR.

• Mit $f, g \in \mathcal{S}$ ist auch $\bar{f} \cdot g, \bar{g} \cdot f \in \mathcal{S}$.

$\Rightarrow$ $\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x) g(x)\, dx$ ist auch Skalarprodukt auf $\mathcal{S}$.

Lemma 6.13: Die Fkten $x^n \exp(-\pi x^2)$ erzeugen einen $\mathbb{R}$-VR $H$, der dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und in $L^2(\mathbb{R})$ liegt

[Dann liegt das $\mathbb{C}$-VR-Erzeugnis dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.]

„Lebenszweck" der Schwartz-Fkten:

Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ist ein unitärer (≙ isometrischer) Automorphismus von $\mathcal{S}$, also

$\mathcal{F}: \mathcal{S} \xrightarrow[\mathbb{C}\text{-lin.}]{} \mathcal{S}$ mit • $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f)(x) = f(-x)$

• $\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle = \langle f, g \rangle$, also insbes.:

• $\|f\| = \|\mathcal{F}(f)\|$

Da $\mathcal{S}$ dicht in $L^2(X, \mathbb{C})$ und es die Hermite-Fkten gibt (HRB!), läßt sich $\mathcal{F}$ auf $L^2(X, \mathbb{C})$ fortsetzen:

Satz 6.14 + Kor. 6.15:

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

$\mathbb{C}$-linear, unitär mit

$$\mathcal{F}\mathcal{F}(f)\ (x) = f(-x).$$

Hermite-Funktionen:

Def. die Hermite-Polynome für $n \in \mathbb{N}_0$ durch:

$$H_n(x) = (-1)^n \, e^{2\pi x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-2\pi x^2}\right).$$

Es gilt: $H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = (-1)\cdot(-4\pi x) = 4\pi x$

$$H_2(x) = e^{2\pi x^2}\frac{d}{dx}\left(-4\pi x \, e^{-2\pi x^2}\right) = \underbrace{-4\pi + (4\pi)^2 x^2}_{=(4\pi)^2 x^2 - 4\pi}, \quad \text{etc.}$$

Es gilt:
- $H_n'(x) = 4\pi n \, H_{n-1}(x)$ für $n \geq 1$
- $$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) \cdot H_m(x) \, e^{-2\pi x^2} \, dx = \overbrace{\frac{(4\pi)^m \cdot m!}{\sqrt{2}}}^{c(m)^{-2}} \cdot \delta_{nm}$$

[Bew. nächste Seite!] $\qquad c(m) := \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{(4\pi)^m \cdot m!}}$

Setze $\boxed{h_n(x) := H_n(x) \cdot e^{-\pi x^2} \cdot c(n) \quad \text{n-te Hermite-Funktion}}$

Dann gilt: $\langle h_n, h_m \rangle = \delta_{nm}$.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{2\pi x^2} \partial_x^n \left(e^{-2\pi x^2}\right)$$

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 4\pi x, \quad H_2(x) = e^{2\pi x^2} \partial_x \left(-4\pi x e^{-2\pi x^2}\right)$$
$$= -4\pi + (4\pi)^2 x^2$$
$$= 4\pi\left(4\pi x^2 - 1\right)$$

$$H_1'(x) = 4\pi = 4\pi H_0, \qquad H_2'(x) = 2(4\pi)^2 x = 2\cdot(4\pi)\cdot H_1(x)$$

$$\boxed{\text{Beh.: } H_n'(x) = 4\pi \cdot n H_{n-1}(x) \quad \text{für } n \geq 1.}$$

Bew.: $n = 1, 2$ ✓ Ind.-Ann.: Beh. bew. für alle $m \leq n$.

Rechne: für $n \geq 1$ bel., $n = 0$ gilt auch
$$H_n'(x) = \cancel{(-1)^n} \cdot 4\pi x H_n(x) + (-1)^{\cancel{n}} H_{n+1}(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad H_{n+1}(x) = 4\pi x H_n(x) - H_n'(x)$$

Dann folgt:
$$H_{n+1}'(x) = 4\pi H_n(x) + 4\pi x H_n'(x) - \frac{d}{dx} H_n'(x)$$
$$\overset{\text{I. Ann.}}{=} 4\pi H_n(x) + 4\pi x \cdot 4\pi n H_{n-1}(x) - 4\pi n H_{n-1}'(x)$$
$$= 4\pi H_n(x) + 4\pi n\left(4\pi x H_{n-1}(x) - H_{n-1}'(x)\right)$$
$$= 4\pi H_n(x) + 4\pi n H_n(x) = 4\pi(n+1) H_n(x) \quad .$$

$$\overset{n,m \geq 1}{\Longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n \cdot H_m e^{-2\pi x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-2\pi x^2}\right) H_m(x)\, dx$$

Part. Int.
$$= (-1) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{-2\pi x^2}\right) \cdot H_m(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{-2\pi x^2}\right) dx \cdot 4\pi m H_{m-1}(x)$$

$$= 0 + 4\pi m \int_{-\infty}^{+\infty} H_{n-1}(x) H_{m-1}(x)\, e^{-2\pi x^2} dx$$

$$\overset{n \geq m}{=} (4\pi)^m \cdot m! \int_{-\infty}^{+\infty} H_{n-m}(x)\, e^{-2\pi x^2} dx$$

$$= (4\pi)^m \cdot m! \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left(e^{-2\pi x^2}\right) dx = \begin{cases} (4\pi)^m \cdot m! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi x^2} dx & \text{für } n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= (4\pi)^m \cdot \frac{m!}{\sqrt{2}} \cdot \delta_{nm}$$

(Für $n = 0$ oder $m = 0$ analog).

<u>Bem.:</u> Die $h_n$ sind Eigenfktn der Fouriertransf. zum EW $i^n$:

$$\hat{h}_n(y) = c(n) \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\, e^{-\pi x^2} e^{2\pi i y x}\, dx$$

$$= c(n) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-2\pi x^2}\right) e^{\pi x^2 + 2\pi i y x}\, dx$$

$$= c(n) \cdot e^{\pi y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-2\pi x^2}\right) e^{\pi (x+iy)^2}\, dx$$

$$\overset{\text{Part.int.}}{=} \ldots = c(n)\, i^n\, e^{\pi y^2} \frac{d^n}{dy^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi x^2} e^{\pi (x+iy)^2}\, dx$$

$$= c(n)\, i^n\, e^{\pi y^2} \frac{d^n}{dy^n}\left(e^{-\pi y^2} \hat{h}_0(y)\right) = i^n h_n(y)$$

<u>Bem.:</u> Die Hermite-Funktionen sind eindeutig bestimmt (bis auf $\{\lambda \in \mathbb{C}^\times \mid |\lambda| = 1\}$ - Vielfache) als Orthonormalsystem von Eigenvektoren = Eigenfunktionen des unitären Operators $\mathcal{F}$ auf $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Denn nach dem <u>Spektralsatz</u> (hier für $\infty$-dim. Hilberträume, das ist schwieriger als die endl.dim. Version für unitäre Matrizen aus der LA!)

Besitzt jeder unitäre Operator auf $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ eine HRB aus Eigenfunktionen, und diese ist bis auf obige Vielfache eindeutig bestimmt.