Lebesgue-Theorie für den Spezialfall der Folgen bzw. Reihen

Große Übung 12.10.2011

Funktionenverbände (Skript 3.5)

Betrachte Funktionen auf $X = \mathbb{N}$ mit Werten in

entweder $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R} \cup \infty$ oder $\overline{\mathbb{R}}^- = \mathbb{R} \cup (-\infty)$.

D.h. Folgen mit zugelassenen Folgegliedern in $\overline{\mathbb{R}}^+$ bzw. $\overline{\mathbb{R}}^-$.

Die Gesamtheit solcher Funktionen ist abgeschlossen unter Addition sowie unter Multiplikation mit positiven Skalaren. Sie bildet keinen VR mehr!

Def.: Eine Teilmenge $\mathcal{B}$ aller $\overline{\mathbb{R}}^+$- (bzw. $\overline{\mathbb{R}}^-$-)wertigen Folgen heißt Halbverband, wenn $\mathcal{B}$

(i) die Nullfolge enthält

(ii) abg. ist unter Add. und Multipl. mit $\lambda > 0$

(iii) abg. ist unter Bildung von $\min((f_n), (g_n))$ wie $\max((f_n), (g_n))$

Bsp.: Sei $j \in \mathbb{N}$ bel. aber fest. Die Menge der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 0$ für $n \neq j$ und $a_j \in \overline{\mathbb{R}}^+$ bilden Halbverband.

Ist $\mathcal{B}$ ein Halbverband, dann auch $-\mathcal{B}$.

Gilt $\mathcal{B} = -\mathcal{B}$, dann hat $\mathcal{B}$ Werte in $\mathbb{R}$ und $\mathcal{B}$ ist ein VR.

Dann nennt man $\mathcal{B}$ <u>Verband</u>.

Sei $\mathcal{B}$ ein <u>Verband</u> und $(f_n) \in \mathcal{B}$. Dann gilt:

- $|(f_n)| := (|f_n|) \in \mathcal{B}$
- $(f_n) = (f_n)^+ + (f_n)^-$, wo $(f_n)^+ = \max((f_n), 0) \in \mathcal{B}$,
  $(f_n)^- = \min((f_n), 0) \in \mathcal{B}$
- $|(f_n)| = (f_n)^+ - (f_n)^-$

<u>Def.</u>: Die <u>monotone Hülle $\mathcal{B}^+$</u> eines Halbbands mit Werten in $\mathbb{R}^+$ ist die Menge aller Folgen (f_n) (mit Werten in $\mathbb{R}^+$), für die gliedweise monoton aufsteigende Folgen $(f_n)^m$ existieren $\left[\text{d.h. } \forall n \in \mathbb{N}: \ f_n^1 \le f_n^2 \le f_n^3 \le \dots\right]$ mit $(f_n) = \sup_{m \in \mathbb{N}} (f_n)^m$ $\left[\text{d.h.: } f_n = \sup\{f_n^m \mid m \in \mathbb{N}\}\right]$.

Analog: $\mathcal{B}^-$ für Halbverband mit Werten in $\mathbb{R}^-$.

<u>Lemma 3.6:</u> Die monotone Hülle $\mathcal{B}^+$ $(\mathcal{B}^-)$ ist wiederum ein Halbverband.

<u>Lemma 3.7:</u> $\mathcal{B}^+$ ist unter monoton wachsenden Limiten abgeschlossen.

Bsp: Die endlichen Folgen (a_n) (d.h. $a_n = 0$ für fast alle n, d.h. Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit endlichem bzw. kompaktem Träger) bilden einen Verband $\mathcal{B}$.
Die monotone Hülle $\mathcal{B}^+$ besteht aus den (unendl.) Folgen (f_n) mit Werten in $\mathbb{R}^+$, für die $f_n < 0$ nur für endliche viele n.

Daniell-Integrall (Spezialfall)

$\mathcal{B}$ Halbverband mit Werten in $\mathbb{R}^+$.
Eine Abb. $I: \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ nennt man Daniell-Integral, wenn gilt:

- $I(f+g) = I(f) + I(g)$ f.a. $f, g \in \mathcal{B}$
- $I(\lambda f) = \lambda \cdot I(f)$ f.a. $f \in \mathcal{B}$, $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
- Für eine mon. wachsende Folge $(g^m)_m$ gilt
  $$f \leq \sup(g^m) \Rightarrow I(f) \leq \sup(I(g^m))$$

Lemma 3.8: Ein Daniell-Integral auf $\mathcal{B}$ setzt sich eindeutig zu einem D.-Int. I^+ auf $\mathcal{B}^+$ fort via $(g^m) \nearrow g$
$$\Rightarrow \quad I^+(g) = \sup I(g^m)$$

Bsp.: Für den Verband $\mathcal{B}$ der endl. Folgen definiert
$$I: (a_n) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (\underline{\text{endl!}} \text{ Summe})$$
ein Daniell-Integrall.
Dann entsprechen die Werte von $I^+ = \sum^+$ den unendl. Reihen mit nur endl. vielen negativen Summanden.

Ab jetzt bezeichne $\mathcal{B}$ stets den Verband der endl. Folgen.

Um der Notation des Skripts weiter zu folgen, definieren wir:

$I^- = \Sigma^-$ auf $\mathcal{B}^-$ durch:

Für $(h_n) \in \mathcal{B}^-$ (d.h. eine Folge, bei der nur endl. viele Glieder positiv sind)

liegt $(-h_n) \in \mathcal{B}^+$ und man setzt

$$I^-((h_n)) = \Sigma^-(h_n) = -\Sigma^+(-h_n) \in \mathbb{R}^-$$

Es gilt für $(h_n^m) \downarrow (h_n)$: $I^-((h_n)) = \liminf_m I(h_n)$

<u>Lemma 3.12:</u> $h \in \mathcal{B}^-$, $g \in \mathcal{B}^+$ mit $h \leq g$. Dann folgt

$$I^-(h) \leq I^+(g).$$

<u>Lebesgue-Integral im Spezialfall der Folgen</u>

$$I = \Sigma : \mathcal{B} \to \mathbb{R}.$$

Für eine <u>bel.</u> Folge (f_n) definiere:

„Obersumme" $\Sigma^\# f_n = \inf \{ \Sigma^+ g_n \mid (g_n) \in \mathcal{B}^+, (f_n) \leq (g_n) \} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

„Untersumme" $\Sigma^\flat f_n = \sup \{ \Sigma^- h_n \mid (h_n) \in \mathcal{B}^-, (h_n) \leq (f_n) \} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Es gilt: $\Sigma^\flat f_n \leq \Sigma^\# f_n$

<u>Def. 3.13:</u> Eine Folge (f_n) heißt <u>L-summierbar</u> (Lebesgue-int.bar),

wenn gilt $\boxed{\Sigma^\flat f_n = \Sigma^\# f_n \in \mathbb{R}}$.

Schreibe dann: Σf_n.

Lemma 3.15: $(f_n) \in \mathcal{B}^{\pm} \Rightarrow \sum^b f_n = \sum^{\#} f_n = \sum^{\pm} f_n$

Also gilt für $(f_n) \in \mathcal{B}^{\pm}$: (f_n) L-summierbar $\Leftrightarrow \sum^+ f_n < \infty$ und $\sum^- f_n > -\infty$.

Satz 3.17: Die Menge der L-summ. Folgen ist unter Addition, Multipl. mit reellen Skalaren und min/max-Bildung abgeschlossen.

Satz 3.16: Die L-summierbaren Folgen bilden einen Verband $L \supset \mathcal{B}$.

Lemma 3.18: Das „L-Integral" definiert ein Daniell-Integral auf L.

Bsp: (a) Die Folge $a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1,\ a_4 = -1, \ldots$ ist nicht L-summierbar. Denn:

Jede Folge $(g_n) \in \mathcal{B}^+$ hat nur endl. viele neg. Glieder.

Für $(a_n) \leq (g_n)$ gilt also „bestenfalls" $\left.\begin{array}{l} g_{2n} = 0 \\ g_{2n+1} = 1 \end{array}\right\}$ für fast alle n.

$\Rightarrow \sum^{\#} a_n = \inf\left\{ \sum^+ g_n \mid (g_n) \in \mathcal{B}^+,\ (a_n) \leq (g_n) \right\} = \infty$

Ebenso: $\sum^b a_n = -\infty$. $\longleftarrow$ am 12.10. bis hierhin!

(b) Analog sieht man: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ist nicht L-summierbar.

Allgemeiner: (f_n) ist L-summierbar $\Leftrightarrow |(f_n)|$ ist L-summierbar

Bew.: „$\Rightarrow$" Mit (f_n) ist $|(f_n)|$ im Verband L.

„$\Leftarrow$" Ist $|(f_n)|$ L-summierbar, d.h. $\sum |f_n| < \infty$, dann gilt auch für jede Teilfolge $|(f_{n_j})|$, dass $\sum |f_{n_j}| < \infty$.

Insbesondere: $\sum f_n^+ < \infty$, $\sum (-f_n^-) < \infty$, also $(f_n)^+, (f_n)^- \in L$,

also $(f_n) = (f_n)^+ + (f_n)^- \in L$. (Verband ist VR!)