Einige Orbitalintegrale von Funktionen der Iwahori-Hecke-Algebra reduktiver Gruppen kleinen Rangs

Diplomarbeit

vorgelegt von

Kathrin Maurischat

betreut von

Prof. Dr. Rainer Weissauer

November 2003

Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Heidelberg

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Integration auf Faktorräumen **5**

2 Orbitalintegrale für die $\mathbf{SL}(2,F)$ **12**
2.1 Berechnung von $O_t^G(\mathbf{1_K})$ für $t \in T_\theta$ . . . 13
2.1.1 Die Zerlegung $T_\theta \backslash G/K$ . . . 14
2.1.2 Berechnung von $O_t^G(\mathbf{1_K})$ für $t \in T$ . . . 17
Berechnung der Volumina . . . 19
Summation der Beitäge . . . 21
2.1.3 Berechnung von $O_t^G(\mathbf{1_K})$ für $t \in \tilde{T}$ . . . 21
2.2 Orbitalintegrale für die Erzeuger der Iwahori-Hecke-Algebra . . . 23
2.2.1 Orbitalintegrale $O_t^G(\mathbf{1}_{IwI})$ für $t \in T$ . . . 24
Die Zerlegung $T \backslash G/I$ . . . 24
Benötigte Volumina . . . 29
Auswertung der Integralformel . . . 29
2.2.2 Orbitalintegrale $O_t^G(\mathbf{1}_{IwI})$ für $t \in \tilde{T}$ . . . 34
Die Zerlegung $\tilde{T} \backslash G/I$ . . . 34
Benötigte Volumina . . . 35
Auswertung der Integralformel . . . 35
2.2.3 Zusammenfassung . . . 39

3 Integrale für die $\mathbf{GSp}(4,F)$ **40**
3.1 Die Zerlegung $H \backslash G/I$ . . . 43
Der Beweis von Satz 3.1 . . . 50
Der Ausnahmefall $i = 0$ . . . 50
Der generische Fall $i > 0$ . . . 55
3.2 Die Isomorphismen $H \cap v_{ij} I v_{ij}^{-1} \longrightarrow I_{ij}$ . . . 58
Der Fall $i = 0$ . . . 59
Der Fall $i > 0$ . . . 60
3.3 Die Zerlegung $T \backslash H / I_0$ . . . 62
3.3.1 Die Indices $[\mathbf{o_T} : (T \cap r I_0 r^{-1})]$ . . . 63
3.4 Die Integrale $[I_0 : I_{ij}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{ij}}(k^{-1} r^{-1} \eta r k)\, dk$ . . . 64
3.4.1 Auswertung der Integrale . . . 66
Der Fall $i = 0$ . . . 67

Der Fall $0 < i \leq v(b) - f$ und $0 < i \leq v(b') - f'$ 68
Der Fall $i > v(b) - f$ und $i > v(b') - f'$ 72
3.4.2 Benötigte Untergruppen von $\mathbf{SL}(2, R_i) \cap I(2, R_i)$ 77
3.5 Berechnung von $O_\eta^G(\mathbf{1}_I)$ 79
3.5.1 Summationsbedingungen 79
3.5.2 Die Auswertung in den einfachsten Fällen 81
Der Fall $v(b) = v(b') = 1$ und $\chi = 0$ 81
Der Fall $v(b) = v(b') = 1$ und $\chi = 2$ 82
$O_\eta^G(\mathbf{1}_I) + O_{\eta'}^G(\mathbf{1}_I)$ im Fall $\chi = 0$ 84
$O_\eta^G(\mathbf{1}_I) + O_{\eta'}^G(\mathbf{1}_I)$ im Fall $m = 1$ und $\chi > 0$ 85
3.5.3 Die Differenz $O_\eta^G(\mathbf{1}_I) - O_{\eta'}^G(\mathbf{1}_I)$ 87
Beiträge für $i = 0$ 87
Beiträge aus dem Bereich $0 < i \leq \min\{v(b) - f, v(b') - f'\}$ . . 88
Beiträge aus dem Bereich $v(b) - f < i \leq \chi - (v(b) - f)$ 95
Summation der Bereiche 97

Literaturverzeichnis **99**

Erklärung **101**

Einleitung

Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist es, Orbitalintegrale zu berechnen. Was ein Orbitalintegral ist, kann man so verstehen: Eine lokal kompakte Gruppe G, zum Beispiel die Gruppe der F-wertigen Punkte einer algebraischen Gruppe für einen lokalen Körper F, besitzt ein rechtsinvariantes Haarsches Maß. Man kann dort also lokal konstante Funktionen mit kompaktem Träger integrieren. Bildet man den Faktorraum der Gruppe G nach einer abgeschlossenen Untergruppe T, zum Beispiel einem Torus, so besitzt dieser in manchen Fällen ebenfalls ein Haarsches Maß, und nur solche sollen hier betrachtet werden. Nun sei t ein Element von G, und T dessen Zentralisator. Das Integral der Funktion $f(g^{-1}tg)$ heißt dann das Orbitalintegral von t unter f:

$$O_t^G(f) \;=\; \int_{T\backslash G} f(g^{-1}tg)\; d(Tg).$$

Ein Orbitalintegral mißt grob gesprochen, wie die Bahn (der Orbit) von t unter Konjugation eine Funktion trifft.
In der Praxis ergeben sich nun erhebliche Schwierigkeiten, wenn man ein solches Orbitalintegral auswerten möchte. Man kann sagen: Es existiert noch kein Verfahren, es allgemein zu berechnen. Eine Möglichkeit bietet sich, wenn es sich um eine Funktion f handelt, die auf den (Rechts-)Nebenklassen einer kompakten offenen Untergruppe K von G konstant ist, und man ein Vertretersystem Φ der Doppelnebenklassen von $T\backslash G/K$ kennt. Dann kann man sich einer Verallgemeinerung der Integralformel für endliche Gruppen bedienen:

$$O_t^G(f) = \sum_{g\in\Phi} f(g^{-1}tg)\frac{vol_G(gKg^{-1})}{vol_T(T\cap gKg^{-1})}.$$

Dieses Verfahren wird in Kapitel 1 dargestellt.
Diese Summationsformel und Modifikationen von ihr werden im folgenden benutzt, um Orbitalintegrale zu berechnen. Dazu sei nun F ein lokaler Körper, genauer eine algebraische Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$, $p \neq 2$, der eine unverzweigte quadratische Erweiterung L besitzt.
Eine solche Erweiterung L/F kann man benutzen, um in den linearen algebraischen Gruppen $G = \mathbf{SL}(2,F)$ bzw. $G = \mathbf{GSp}(2,F)$ über F (streng gesagt den F-wertigen Punkten der algebraischen Gruppen über F) Konjugationsklassen maximaler Tori zu beschreiben.
Natürlich kann man diese Konstruktion auch im für eine verzweigte Erweiterung L/F durchführen. Die Beschränkung auf den Fall einer unverzweigten Erweiterung

ist willkürlich. Sie wird hier gemacht, um die Rechenarbeit auf den Umfang einer Diplomarbeit zu reduzieren. Im verzweigten Fall wären einige kleinere Abänderungen vorzunehmen, etwa dort, wo ein Primelement von $\mathbf{o_F}$, dem Bewertungsring von F, auch als eines von $\mathbf{o_L}$ verwendet wird oder dort, wo die Gestalt der Normgruppe von L/F ausgenützt wird. Aber die generelle Vorgehensweise müßte dieselbe bleiben.
Berechnet werden sollen dann Orbitalintegrale zu regulären Elementen t eines geeigneten Torus T bezüglich der verschiedenen Einbettungen von T als maximaler Torus in G. Im Rahmen dieser Arbeit heißt ein Orbitalintegral stabil, wenn es nicht von der Konjugationsklasse dieser Einbettung abhängt, anderenfalls instabil.

In Kapitel 2 wird diese Berechnung für das wohl einfachste Beispiel durchgeführt, nämlich für $G = \mathbf{SL}(2, F)$. Als kompakte offene Gruppe wird hier zunächst $K := \mathbf{SL}(2, \mathbf{o_F})$ benutzt, später eine Iwahori-Gruppe I von K. Die Doppelnebenklassenvertreter finden sich im ersten Fall sehr anschaulich durch die Charakterisierung von Gittern im F-Vektorraum F^2, im zweiten Fall resultieren sie aus den ersten und der Bruhat-Tits-Zerlegung $G = \bigcup IwI$, wobei w die zugehörige affine Weylgruppe durchläuft. Berechnet werden die Orbitalintegrale der charakteristischen Funktionen $\mathbf{1}_K$, $\mathbf{1}_I$ und der übrigen Erzeuger $\mathbf{1}_{IwI}$ der Iwahori-Hecke-Algebra. Diese Ergebnisse sind jedenfalls zum größeren Teil schon längere Zeit bekannt (s. [W1], The Easiest Example). Als Ergebnis erhält man für $O^G_\eta(\mathbf{1}_{IwI})$, $w \neq \mathrm{id}$, eine von t abhängige Potenz von q, der Mächtigkeit des Restklassenkörpers κ_F, und für $w = \mathrm{id}$ einen Ausdruck der Form

$$O^G_t(\mathbf{1}_I) = \frac{q^{n(t)} - 1}{q - 1}.$$

Diese Ergebnisse sind stabil unter Konjugation der Tori.
Dieses schlichte und schöne Ergebnis läßt hoffen, wenn man auf der Suche nach einer allgemeinen geschlossenen Formel für Orbitalintegrale ist. Man könnte vermuten, daß Orbitalintegrale sich im wesentlichen aus solchen Bestandteilen zusammen setzen lassen. Dies legen auch viele Rechnungen von Y.F. Flicker [Fl] nahe. Es scheint, daß die Form stabiler Orbitalintegrale dem Wurzelsystem der algebraischen Gruppe in irgendeiner Weise assoziiert ist. Das würde eine Analogie zur Weylschen Dimensionsformel (vgl. [Hu2]) darstellen, wenn man das Orbitalintegral mit der Quantendimension in Verbindung bringt.

Um darüber mehr Informationen zu bekommen, braucht man weitere explizite Ergebnisse, die nicht ohne Anstrengung zu bekommen sind. Die in Kapitel 1 beschriebene Methode über die Doppelnebenklassenzerlegung bietet zwar grundsätzlich eine Möglichkeit, Orbitalintegrale zu berechnen, aber eine solche Zerlegung ist in den allerwenigsten Fällen bekannt.

In Kapitel 3 wird eine ähnliche bekannte Zerlegung benutzt, um mit Hilfe weiterer Umformungen der Summationsformel Orbitalintegrale einer Iwahori-Gruppe I der

$\mathbf{GSp}(4,F)$ zu berechnen. Dabei wird mit der $\mathbf{GSp}(4,F)$ in der Darstellung als generelle Transformationsgruppe der alternierenden Bilinearform, die durch

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, gearbeitet. I sei eine Iwahori-Gruppe der maximalen kompakten Untergruppe $K = \mathbf{GSp}(2, \mathbf{o_F})$. Weiter benötigt man eine abgeschlossene Untergruppe H von G, die zu $(\mathbf{GL}(2,F) \times \mathbf{GL}(2,F))^0$ isomorph ist. Dabei soll der Exponent 0 ausdrücken, daß die beiden Komponenten eines Elements dieselbe Determinante haben. In H liegen maximale Tori T von G, sie werden gebildet von den Elementen der Produkte maximaler Tori der $\mathbf{GL}(2,F)$, die die Determinantenbedingung erfüllen.
Die Modifikation der bisherigen Summationsformel für das Integral wird auf den ersten Seiten von Kapitel 3 dargestellt. (Dort finden sich auch die genauen Definitionen der erwähnten Gruppen.) Sie besagt im wesentlichen, daß man ausgehend von einer Zerlegung $H\backslash G/I$ mit Vertretersystem $\{v_{ij}\}$ das Orbitalintegral zunächst als eine Summe von Orbitalintegralen von charakteristischen Funktionen der Untergruppen $H \cap v_{ij} I v_{ij}^{-1}$ von H schreiben kann. Und diese Orbitalintegrale können dann mit Hilfe einer Nebenklassenzerlegung $T\backslash H/(H \cap I)$ mit einem Vertretersystem $\{r(\psi)\}$ auf einfache Integrale der Form

$$\int_{H \cap I} \mathbf{1}_{I_{ij}}(k^{-1} r(\psi)^{-1} \eta r(\psi) k)\, dk$$

zurückgeführt werden, wobei die I_{ij} Untergruppen von $H \cap I$ sind, die in G zu $H \cap v_{ij} I v_{ij}^{-1}$ konjugiert sind. Diese Vorgehensweise folgt der von R. Weissauer [W2] für das Orbitalintegral der maximalen kompakten Gruppe $K = \mathbf{GSp}(4, \mathbf{o_F})$.
Man benötigt also als erstes Doppelnebenklassenvertreter $\{v_{ij}\}$ von $H\backslash G/I$. Für die Zerlegung $H\backslash G/K$ wurden von M. Schröder Nebenklassenvertreter (vgl. [W3])

$$r_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pi^{-i} \\ 0 & 1 & \pi^{-i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gefunden. Mit deren Hilfe wird in Kapitel 3.1 ein Vertretersystem von $H\backslash G/I$ gewonnen, indem man zunächst Vertreter der Bruhat-Tits-Zerlegung $G = \bigcup IwI$ konstruiert und aus diesen dann durch Multiplikation mit den alten Nebenklassenvertretern solche für $H\backslash G/I$ erhält und überflüssige wegläßt.
In Kapitel 3.2 werden die Untergruppen I_{ij} von $H \cap I$ konstruiert, auf deren Integrale (s.o.) man das Orbitalintegral zurückgeführt hat. Sie ergeben sich als Untergruppen, deren Elemente $(h, h') \in H$ zusätzlich zu den Bedingungen von H und I gewisse Kongruenzen

$$h h'^{-1} \equiv D_{ij} \bmod \wp_F^i$$

erfüllen. Dabei bezeichnet $\wp_F$ das Primideal von $\mathbf{o_F}$.
Der Abschnitt 3.3 dient der Erstellung eines Vertretersystems der Doppelnebenklassen $T\backslash H/(H \cap I)$. Man erhält es aus der Kombination zweier Doppelnebenklassenzerlegungen von $\mathbf{GL}(2,F)$ unter Ausnützung der Determinantenbedingung auf H.

Die Vertreter werden charakterisiert durch fünf Parameter: $r(\psi) = r(n, n', \epsilon, f, f')$. Diese Parameter erweisen sich als bestimmend für die ganze weitere Auswertung, weil sowohl die Form der Summanden des Integrals als auch der Bereich, über den summiert wird, durch sie reglementiert wird.
Kennt man nun Vertreter der Doppelnebenklassen $T\backslash H/(H \cap I)$, so kann man die obigen Integrale ausrechnen (Abschnitt 3.4). Dies bedeutet nichts weiter als die Nebenklassen $kI_{ij} \subset I \cap H$ zu zählen, für die $k^{-1}r(\psi)^{-1}\eta r(\psi)k$ in I_{ij} liegt, das heißt für die obige Kongruenzbedingung erfüllt ist. Für deren Anzahl erhält man Mächtigkeiten gewisser Untergruppen der endlichen Gruppen $\mathbf{SL}(2, \mathbf{o_F}/\wp_F^i)$.
Hat man diese Ingredenzien bereit gestellt, so kann man die urspünglichen Orbitalintegrale auswerten. Das heißt man muß eine Summe berechnen, die über alle Vertreter $\{v_{ij}\}$ und $\{r(n, n', \epsilon, f, f')\}$ läuft. Dank zahlreicher Bedingungen an die Parameter ist diese Summe endlich. Diese Bedingung werden in Abschnitt 3.5.1 zusammengestellt. Man überzeugt sich leicht von deren Komplexität. Deshalb werden im Anschluß erst einige Spezialfälle errechnet. Weiter wird die Differenz

$$O_\eta^G(\mathbf{1}_I) - O_{\eta'}^G(\mathbf{1}_I)$$

der Orbitalintegrale bezüglich zweier nicht konjugierter Tori bestimmt (vgl. Abschnitt 3.5.3). Die Differenz nimmt bei Vertauschung der Einbettungen offensichtlich ein Vorzeichen auf, ist also instabil. Für ihr Aussehen besteht eine Vermutung von R.P. Langlands (s. [La1]), die hier ein weiteres Mal bestätigt wird: Das instabile Orbitalintegral ist ein Produkt zweier Faktoren der erhofften Form. (vgl. Bemerkung 3.14).
Anders verhält es sich für den stabilen Fall

$$O_\eta^G(\mathbf{1}_I) + O_{\eta'}^G(\mathbf{1}_I),$$

dem das eigentliche Interesse gilt, der aber viel mühsamer zu berechnen ist. Schuld daran ist die Tatsache, daß sich in der Differenz viele gleiche Terme von vornherein wegheben mit denen man bei der Summe zu kämpfen hat. Um den Rahmen der Arbeit nicht völlig zu sprengen, wird deshalb von einer allgemeinen Berechnung des stabilen Integrals abgesehen. Stattdessen werden hier lediglich einige Spezialfälle ausgewertet (Abschnitt 3.5.2), an denen man aber ablesen kann: Die Hoffnung, das stabile Orbitalintegral als Produkt von solchen Faktoren zu erhalten, kann nicht aufrecht gehalten werden. Denn bereits in den einfachsten Fällen ergeben sich Terme, die niemals auf eine solche Form gebracht werden können (vgl. Bemerkung 3.13).

Kapitel 1

Integration auf Faktorräumen

In diesem Abschnitt werden die Grundaussagen über das Haarsche Integral auf lokal kompakten topologischen Gruppen in Kürze rekapituliert und das ihm assoziierte Maß auf Faktorräumen eingeführt. (Siehe etwa [HN] Chapter 2, § 5.) Als Abschluß wird eine explizite Integralformel für lokal konstante Funktionen auf einem Faktorraum angegeben, mit der in den weiteren Kapiteln gearbeitet wird.

Satz 1.1. *Eine lokal kompakte topologische Gruppe G besitzt ein Haarsches Integral, d.h. ein nichttriviales lineares rechtsinvariantes Funktional auf dem Raum $\mathcal{C}_0(G)$ der stetigen Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger. Es ist bis auf eine von null verschiedene multiplikative Konstante eindeutig bestimmt.*

Beweis: vgl. [HN], Chapter 2, § 5.3.

Definition 1.2. *Es sei G eine lokal kompakte topologische Gruppe, und es sei U eine Teilmenge von G, deren charakteristische Funktion $\mathbf{1}_U$ stetig ist. Dann definiert man das Volumen oder Haarsche Maß von U in G als*

$$vol_G(U) := \int_G \mathbf{1}_U(g)\, dg,$$

falls dieses Integral existiert, das heißt wenn U in einem Kompaktum enthalten ist.

Definition 1.3. *Sei G eine lokal kompakte topologische Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe von G. Mit einem rechtsinvarianten Integral auf $\mathcal{C}_0(H\backslash G)$ bezeichnet man (in Analogie zum Haarschen Integral einer Gruppe) ein lineares Funktional*

$$\int_{H\backslash G} : \mathcal{C}_0(H\backslash G) \quad \to \quad \mathbb{C}$$

mit der Eigenschaft

$$\forall x \in G : \qquad \int_{H\backslash G} f^x = \int_{H\backslash G} f,$$

wobei $f^x(y) = f(yx)$ die Operation von G auf $\mathcal{C}_0(H\backslash G)$ durch Rechtstranslation bezeichnet.

Ohne die Existenz eines Integrals auf $H\backslash G$ sichern zu müssen, gilt:

Satz 1.4. *Sei G eine lokal kompakte topologische Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe von G. Dann existiert auf $\mathcal{C}_0(H\backslash G)$ höchstens ein bis auf eine multiplikative Konstante bestimmtes rechtsinvariantes Integral.*

Beweis: Sei $\int_{H\backslash G}$ ein solches, und seien $\int_G$ bzw. $\int_H$ Haarsche Integrale auf G und H. Für $f \in \mathcal{C}_0(G)$ definiert man $\int_H f = \int_H f\,|_H$. Durch

$$\tilde{f}(g) := \int_H f^g(h)\, dh = \int_H f(hg)\, dh \quad (g \in G)$$

wird eine stetige Funktion $\tilde{f}$ mit kompaktem Träger auf G definiert. Weiter ist $\tilde{f}(tg) = \int_H f^{tg}(h)dh = \int_H f^g(h)dh$ für alle $t \in H$, weil das Integral auf H rechtsinvariant ist. Das heißt $\tilde{f}$ ist konstant auf den Nebenklassen nach H und definiert somit eine Funktion $F \in \mathcal{C}_0(H\backslash G)$ durch $F(Hg) = \tilde{f}(g)$. Das Integral von F hat die Form

$$\int_{H\backslash G} F(Hg)\, d\dot{g} = \int_{H\backslash G}\int_H f^g(h)\, dhd\dot{g},$$

wobei $d\dot{g} = d(Hg)$ gesetzt wurde. Da $f \in \mathcal{C}_0(G)$, stellt dies auch ein Integral von f auf $\mathcal{C}_0(G)$ dar, das wegen der Rechtsinvarianz von $\int_{H\backslash G}$ selbst rechtsinvariant ist:

$$\int_{H\backslash G}\int_H f^{gy}(h)\, dhd\dot{g} = \int_{H\backslash G} F(Hgy)\, d\dot{g} = \int_{H\backslash G} F(Hg)\, d\dot{g} = \int_{H\backslash G}\int_H f^g(h)\, dhd\dot{g}.$$

Das Integral auf G ist aber bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Also gibt es ein $0 \neq c \in \mathbb{C}$ so, daß

$$\int_{H\backslash G}\int_H f^g(h)\, dhd\dot{g} = \quad c \cdot \int_G f(g)\, dg. \qquad (*)$$

Somit ist das rechtsinvariante Integral auf $H\backslash G$ für Funktionen F, die wie oben aus einer Funktion $f \in \mathcal{C}_0(G)$ entstehen, bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig. Jede beliebige Funktion $F \in \mathcal{C}_0(H\backslash G)$ definiert aber auf natürliche Weise eine solche Funktion f: Sei $K \subset G$ ein offenes kompaktes Urbild des Trägers von F unter der Faktorbildung $G \to H\backslash G$, und sei $\mathbf{1}_K$ die charakteristische Funktion von K auf G. Setzt man

$$f(g) = \frac{F(Hg)}{vol_H(Hg \cap K)} \cdot \mathbf{1}_K(g),$$

dann ist

$$\int_H f^g(h)\, dh = \frac{F(Hg)}{vol_H(Hg \cap K)} \cdot \int_H \mathbf{1}_K(hg)\, dh = F(Hg).$$

Somit ist das Integral auf ganz $\mathcal{C}_0(H\backslash G)$ eindeutig.

Bemerkung 1.5. *Die Gleichung $(*)$ heißt auch Weylsche Integralformel.*

Um die Notation zu vereinfachen, wird oft $F(g)$ statt $F(Hg)$ für $F \in \mathcal{C}_0(H\backslash G)$ geschrieben.
Rechtsinvariante Haarsche Integrale sind im allgemeinen nicht linksinvariant, aber durch Linkstranslation mit $t \in G$ erhält man wieder ein rechtsinvariantes Haarsches Integral, das mit dem ersten bis auf eine Konstante $\Delta(t)$, der Modulusfunktion, übereinstimmen muß:

$$\int_G f(t^{-1}g)\, dg = \Delta(t) \int_G f(g)\, dg.$$

Auf kommutativen Gruppen ist das Haarsche Maß aber unimodular, d.h. für alle t ist $\Delta(t) = 1$, denn dann ist jede Linkstranslation auch eine Rechtstranslation. Vor der angestrebten Integralformel noch zwei schlichte, aber oft benützte Eigenschaften des Haarschen Maßes:

Lemma 1.6. *(a) Sei G eine lokal kompakte Gruppe und seien $K' \subset K$ kompakte offene Untergruppen von G. Dann gilt: Der Index von K' in K ist endlich und es ist*

$$vol_G(K) = [K : K']vol_G(K').$$

(b) Zu $g \in G$ gebe es eine g-stabile kompakte offene Untergruppe K von G. Dann gilt für alle kompakten offenen Untergruppen $\tilde{K}$ von G

$$vol_G(\tilde{K}) = vol_G(g\tilde{K}g^{-1}).$$

Beweis: (a) Die Nebenklassen $K'k$ von $K'\backslash K$ bilden eine offene und disjunkte Überdeckung von K. Weil K kompakt ist, dürfen es nur endlich viele sein. Sei $\{k_1, \ldots, k_n\}$ ein Vertretersystem der Restklassen. Dann gilt:

$$vol_G(K) = \int_G \mathbf{1}_K(x)\, dx = \int_G \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{K'k_j}(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} vol_G(K') = [K : K']vol_G(K'),$$

weil das Integral linear und rechtsinvariant ist.
(b) Zu zeigen ist, daß die Modulusfunktion auf solchen g den Wert 1 hat. Nun gilt $K = gKg^{-1}$, also $vol_G(K) = vol_G(gKg^{-1}) = \Delta(g^{-1})vol_G(K)$, und somit $\Delta(g^{-1}) = 1$.

Satz 1.7. *Sei G eine lokal kompakte Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe von G. Es seien Haarsche Integrale auf G und H mit zugehörigen Modulusfunktionen Δ_G und Δ_H so gegeben, daß $\frac{\Delta_G}{\Delta_H} = 1$ auf H.*
Sei $f : H\backslash G \to \mathbb{C}$ eine lokal konstante Funktion mit kompaktem Träger, und sei K eine kompakte offene Untergruppe von G auf deren Nebenklassen f konstant ist, das heißt

$$\forall \quad k \in K, g \in G : \quad f(gk) = f(g).$$

Sei Φ ein Vertretersystem der Doppelnebenklassen $H\backslash G/K$.
Dann ist

$$\int_{H\backslash G} f(g)\ d\dot{g} \ = \ \sum_{g_i\in\Phi} \ f(g_i)\frac{vol_G(g_iKg_i^{-1})}{vol_H(H\cap g_iKg_i^{-1})}$$

das (nach Satz 1.4 bis auf eine Konstante eindeutig bestimmte) Integral von f.
Das heißt:
(a) Die Summe ist unabhängig von der Wahl des Vertretersystems Φ.
(b) Das Integral ist unabhängig von der Wahl der kompakten offenen Untergruppe K mit $f(gK) = f(g)$.
(c) Linearität: Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt, wenn f und h auf den Nebenklassen der kompakten offenen Untergruppen K_f bzw. K_h konstant sind:

$$\int_{H\backslash G} (\lambda f(g) + \mu h(g))\ d\dot{g} \ = \ \lambda \int_{H\backslash G} f(g)\ d\dot{g} \ + \ \mu \int_{H\backslash G} h(g)\ d\dot{g}.$$

(d) Rechtsinvarianz: Für alle $x \in G$ gilt:

$$\int_{H\backslash G} f(g)\ d\dot{g} = \int_{H\backslash G} f(gx)\ d\dot{g}.$$

Beweis:
(a) Es seien $h \in H, k \in K$ und somit g und hgk zwei Vertreter derselben Nebenklasse. Dann ist $f(g) = f(hgk)$. Für die Volumenanteile bezüglich zweier solcher Vertreter gilt:

$$\begin{aligned} vol_G(gKg^{-1}) &= \int_G \mathbf{1}_{gKg^{-1}}(x)\ dx \\ &= \Delta_G(h) \int_G \mathbf{1}_{gKg^{-1}}(h^{-1}xh)\ dx \\ &= \Delta_G(h) \int_G \mathbf{1}_{hgkK(hgk)^{-1}}(x)\ dx \\ &= \Delta_G(h) \cdot vol_G(hgkK(hgk)^{-1}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} vol_H(H\cap gKg^{-1}) &= \int_H \mathbf{1}_{H\cap gKg^{-1}}(x)\ dx \\ &= \Delta_H(h) \int_H \mathbf{1}_{H\cap gKg^{-1}}(h^{-1}xh)\ dx \\ &= \Delta_H(h) \cdot vol_H(H\cap hgkK(hgk)^{-1}). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die gewünschte Gleichheit der Summanden von $\int f$:

$$\begin{aligned} & f(g_i)\ \frac{vol_G(g_iKg_i^{-1})}{vol_H(H\cap g_iKg_i^{-1})} \\ = \ & f(hg_ik)\ \frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)}\ \cdot\ \frac{vol_G(hg_ikK(hg_ik)^{-1})}{vol_H(H\cap hg_ikK(hg_ik)^{-1})} \\ = \ & f(hg_ik)\ \frac{vol_G(hg_ikK(hg_ik)^{-1})}{vol_H(H\cap hg_ikK(hg_ik)^{-1})}\ . \end{aligned}$$

(b) Seien K und K'' zwei solche kompakt offenen Untergruppen, und damit auch $K' := K\cap K''$. Es bezeichne $\mathbf{I}_K$ die Integralformel bezüglich der Zerlegung $H\backslash G/K$. Zu zeigen: $\mathbf{I}_K(f) = \mathbf{I}_{K'}(f)$. (Dann ist auch $\mathbf{I}_K(f) = \mathbf{I}_{K''}(f)$.)
Der Index von K' in K ist endlich, weil K' eine offene Untergruppe der kompakten Gruppe K ist. Seien $k_1,\dots,k_n$ Vertreter der Restklassen K/K' und $g_i\in\Phi$ solche von $H\backslash G/K$. Dann sind die g_ik_j, $i\in I, j=1,\dots,n$, Vertreter der Nebenklassen $H\backslash G/K'$, wobei Klassen mehrmals auftreten können. Wählt man $J_i\subset\{1,\dots,n\}$ so, daß die g_ik_j, $j\in J_i, i\in I$, ein Vertretersystem bilden, so ist

$$\mathbf{I}_{K'}(f) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} f(g_ik_j)\frac{vol_G(g_ik_jK'k_j^{-1}g_i^{-1})}{vol_H(H\cap g_ik_jK'k_j^{-1}g_i^{-1})}.$$

Es bleibt zu zeigen:

$$\frac{vol_G(g_iKg_i^{-1})}{vol_H(H\cap g_iKg_i^{-1})} = \sum_{j\in J_i}\frac{vol_G(g_ik_jK'k_j^{-1}g_i^{-1})}{vol_H(H\cap g_ik_jK'k_j^{-1}g_i^{-1})},$$

bzw. wegen Lemma 1.6(a)

$$[K:K'] = \sum_{i\in J_i}[(H\cap g_iKg_i^{-1}) : (H\cap g_ik_jK'k_j^{-1}g_i^{-1})].$$

Für festes i setze $A_j := \{xK'\in K/K' \mid g_ixK'\subset Hg_ik_jK'\}$. Dann ist

$$K/K' = \bigcup_{j\in J_i} A_j, \quad [K:K'] = \sum_{j\in J_i} |\,A_j\,|\ .$$

Zeigt man, daß $[(H\cap g_iKg_i^{-1}) : (H\cap g_ik_jK'k_j^{-1}g_i^{-1})] = |\,A_j\,|$, so folgt die Behauptung. Die Nebenklassen $\tilde{y}K'$, die in Hg_ik_jK' enthalten sind, entsprechen umkehrbar eindeutig den Nebenklassen von $H/(H\cap g_ik_jK'k_j^{-1}g_i^{-1})$ vermöge $\tilde{y}K' = yg_ik_jK'$, wenn $y\in H$ Vertreter der Nebenklassen $H/(H\cap g_ik_jK'k_j^{-1}g_i^{-1})$ bezeichnet. Von diesen yg_ik_jK' haben solche eine Darstellung als g_ixK' mit $x\in K$, für die man $y\in H$ so wählen kann, daß $yg_ik_j = g_ix$, für die also $y\in H\cap g_iKg_i^{-1}$. Für $y = g_ikk_j^{-1}g_i^{-1}\in H\cap g_iKg_i^{-1}$ erhält man andererseits $yg_ik_jK' = g_ikK'\subset Hg_ik_jK'$.

Es ist also $[(H \cap g_i K g_i^{-1}) : (H \cap g_i k_j K' k_j^{-1} g_i^{-1})] = \mid A_j \mid$, das heißt man hat eine Bijektion

$$\begin{aligned} \varphi : (H \cap g_i K g_i^{-1})/(H \cap g_i k_j K' k_j^{-1} g_i^{-1}) &\longrightarrow A_j \\ y \in (H \cap g_i K g_i^{-1}) &\longmapsto g_i^{-1} y g_i k_j K'. \end{aligned}$$

(c) Offensichtlich ist $\int \lambda f = \lambda \int f$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.
Zu zeigen bleibt $\int (f+h) = \int f + \int h$.
Der Durchschnitt $K = K_f \cap K_h$ ist wieder eine kompakte offene Untergruppe von G mit $f(xk) = f(x)$ und $h(xk) = h(x)$ für alle $k \in K, x \in G$. Nach (b) ist dann $\int f = \mathbf{I}_K(f)$, $\int h = \mathbf{I}_K(h)$, und

$$\begin{aligned} &\int_{H\backslash G} (f+h)(g)\, d\dot{g} \\ &= \sum_{i\in I} f(g_i) \frac{vol_G(g_i K g_i^{-1})}{vol_H(H \cap g_i K g_i^{-1})} + \sum_{i\in I} h(g_i) \frac{vol_G(g_i K g_i^{-1})}{vol_H(H \cap g_i K g_i^{-1})} \\ &= \int_{H\backslash G} f(g)\, d\dot{g} \quad + \int_{H\backslash G} h(g)\, d\dot{g}. \end{aligned}$$

(d) Sei K eine kompakt offene Untergruppe mit $f(gK) = f(g)$ für alle $g \in G$. Dann gilt für alle $g \in G$:

$$f^x(gxKx^{-1}) = f(gxKx^{-1}x) = f^x(g).$$

Das heißt f^x ist konstant auf den Nebenklassen nach der kompakt offenen Gruppe xKx^{-1}. Für G hat man die disjunkten Zerlegungen

$$G = Gx^{-1} = \bigcup_{i\in I} H g_i K = \bigcup_{i\in I} H g_i x^{-1} (xKx^{-1}),$$

woraus man abliest, daß die $g_i x^{-1}$, $i \in I$, ein Vertretersystem von $H\backslash G/(xKx^{-1})$ bilden. Man kann also die Integralformel für die um x nach rechts translatierte Funktion f^x ansetzen und erhält

$$\begin{aligned} \int_{H\backslash G} f^x(g)\, d\dot{g} &= \sum_{i\in I} f^x(g_i x^{-1}) \frac{vol_G(g_i x^{-1}(xKx^{-1}) x g_i^{-1})}{vol_H(H \cap g_i x^{-1}(xKx^{-1}) x g_i^{-1})} \\ &= \sum_{i\in I} f(g_i x^{-1} x) \frac{vol_G(g_i K g_i^{-1})}{vol_H(H \cap g_i K g_i^{-1})} \\ &= \int_{H\backslash G} f(g)\, d\dot{g}. \end{aligned}$$

Bemerkung 1.8. *Der Beweis von Satz 1.7 gibt keine Begründung der Form der Summationsformel für das Integral. Diese ist aber leicht einzusehen, wenn man annimmt, daß die Integration mit der Summation vertauschbar ist. Dies ist aber immer der Fall, da der kompakte Träger von f nur aus endlich vielen Nebenklassen HgK besteht. Denn die Nebenklassen HgK sind offen, weil K offen ist, und damit bilden diejenigen von ihnen, die den kompakten Träger von f treffen eine offene Überdeckung desselben. Also darf es nur endlich viele solche geben.*
Man weiß also, daß gilt

$$\int_{H\backslash G} f(g)\ d\dot{g} = \sum_{g\in\Phi} f(g_i) \int_{H\backslash G} \mathbf{1}_{Hg_iK}(g)\ d\dot{g}.$$

Dann findet man für $\mathbf{1}_{Hg_iK}$ wie im Beweis von Satz 1.4 das kompakte Urbild $g_iK \subset G$ von Hg_iK und die Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{C}_0(G)$ definiert durch

$$\tilde{f}(g) = vol_H(Hg \cap g_iK)^{-1} \mathbf{1}_{Hg_iK}(g) \mathbf{1}_{g_iK}(g),$$

für die man mit der Weylschen Integralformel schreiben kann:

$$\int_{H\backslash G} \mathbf{1}_{Hg_iK}(g)\ d\dot{g} = \int_{g_iK} \frac{\mathbf{1}_{Hg_iK}(g)\ dg}{vol_H(Hg \cap g_iK)} = \frac{vol_G(g_iKg_i^{-1})}{vol_H(H \cap g_iKg_i^{-1})}.$$

Dann ergibt sich die Integralformel aus Satz 1.7 durch Summation dieser einzelnen Beiträge.

Bemerkung 1.9. *Die gefundene Integralformel ist eine Verallgemeinerung eines elementaren Satzes über endliche Gruppen:*
Sei G eine endliche Gruppe und seien H und K Untergruppen von G. Sei Φ ein Vertretersystem von $H\backslash G/K$. Dann gilt:

$$|G| = \sum_{g\in\Phi} |HgK| = \sum_{g\in\Phi} \frac{|K|}{|H \cap gKg^{-1}|}.$$

Diesen Satz erhält man natürlich auch aus der Integralformel, denn durch $f \mapsto \sum_{g\in G} f(g)$ wird ein Haarsches Integral auf G definiert.

Kapitel 2

Orbitalintegrale für die $\mathbf{SL}(2, F)$

Es sei F ein lokaler Körper, genauer eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$, und es sei $p \neq 2$. Sei weiter $L = F(\sqrt{A})$ eine unverzweigte Erweiterung von F. Ohne Einschränkung kann man A als Einheit des Bewertungsrings $\mathbf{o_F}$ wählen. Außerdem sei ein für allemal ein Primelement $\pi \in \mathbf{o}_F$ der Bewertung von F fixiert. Bezeichnet v die Bewertung von F, so ist also $v(\pi) = 1$. Wegen der Unverzweigtheit der Erweiterung L/F ist π auch ein Primelement von L, und man kann ohne Probleme auch die Bewertung von L mit v bezeichnen. Die Bewertungsideale von $\mathbf{o_F}$ und $\mathbf{o_L}$ seien $\wp_F$ beziehungsweise $\wp_L$, und die Restklassenkörper von F und L seien κ_F und κ_L. Dann ist $\kappa_F = \mathbf{o_F}/\wp_F \cong \mathbb{F}_q$ und $\kappa_L = \mathbf{o_L}/\wp_L \cong \mathbb{F}_q^2$ für eine Potenz q der Primzahl $p \neq 2$. In L hat man die Normeinsgruppe

$$N_L^1 = \{t = a + b\sqrt{A} \in L^* \mid N_{L/F}(t) = a^2 - b^2 A = 1\}.$$

Es gilt sogar $a, b \in \mathbf{o_F}$. Im F-Vektorraum L wählt man die Basis $1, \theta\sqrt{A}$ ($\theta \in \mathbf{o_F}$) und erhält eine Darstellung von L^* in der $\mathbf{GL}(2, F)$ durch die Abbildung:

$$l = a + b\sqrt{A} \quad \longmapsto \quad \begin{pmatrix} a & \theta b A \\ \theta^{-1} b & a \end{pmatrix}.$$

Den Elementen von N_L^1 entsprechen dann die

$$t = \begin{pmatrix} a & \theta b A \\ \theta^{-1} b & a \end{pmatrix},$$

mit $a, b \in \mathbf{o_F}$ und $det(t) = a^2 - b^2 A = 1$. Sie bilden einen Torus $T_\theta \cong N_L^1$.
Es sei $G := \mathbf{SL}(2, F)$. Dann ist $T_\theta \subset G$ ein maximaler Torus in G. In G gibt es genau zwei Äquivalenzklassen maximaler Tori, die in G nicht konjugiert sind, denn die Anzahl der Konjugationsklassen maximaler Tori in $\mathbf{SL}(2, F)$ ist gleich der Mächtigkeit von $H^1(F, T_\theta) \cong H^1(Gal(L/F), Aut_F(\mathbb{G}_m)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. (Vgl. [Sp] 11.3.3, 12.3.8.) Diese zwei Klassen werden repräsentiert durch

$$T = T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a^2 - b^2 A = 1 \right\}$$

und

$$\tilde{T} = T_\pi = \left\{ \begin{pmatrix} a & \pi bA \\ \pi^{-1}b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a^2 - b^2A = 1 \right\}.$$

Den Matrizenring $M(2,F) \cong F^4$ versieht man mit der $\wp$-adischen Topologie, die Gruppen G und T_θ mit den entsprechenden Spurtopologien. Dann ist T_θ abgeschlossen in G. Auf G, T_θ und $T_\theta\backslash G$ gibt es also Haarsche Maße, und weil T_θ kommutativ ist, ist das Maß auf T_θ sogar unimodular.
Für Elemente t der Tori $T, \tilde{T}$ sollen nun Orbitalintegrale berechnet werden.

Definition 2.1. *Sei $G := G(F)$ eine reduktive Gruppe über einem lokalen Körper und $f \in \mathcal{C}_0(G)$, also eine lokal konstante Funktion mit kompaktem Träger. Sei weiter $t \in G$ und $H := Z_G(t) \subset G$. Dann heißt*

$$O_t^G(f) = \int_{H\backslash G} f(g^{-1}tg)\, d\dot{g}$$

das zugehörige Orbitalintegral.

2.1 Berechnung von $O_t^G(\mathbf{1_K})$ für $t \in T_\theta$

Nun sei $K := \mathbf{SL}(2, \mathbf{o_F})$. K ist eine maximale kompakte offene Untergruppe von G. Man normiert das Haarsche Maß auf G so, daß

$$1 = vol_G(K) = \int_G \mathbf{1}_K(x)dx = \int_G \mathbf{1}_{gKg^{-1}}(x)dx = vol_G(gKg^{-1}),$$

und das Haarsche Maß auf T_θ so, daß

$$vol_{T_\theta}(T_\theta) = 1.$$

Zu einem beliebigen aber festen $t \in T_\theta$ betrachtet man die Funktion

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ g &\longmapsto \mathbf{1}_K(g^{-1}tg). \end{aligned}$$

Für alle $t' \in T_\theta$, $g \in G$, gilt: $f(t'g) = \mathbf{1}_K(g^{-1}t'^{-1}tt'g) = \mathbf{1}_K(g^{-1}tg)$ weil T_θ kommutativ ist. Also ist f auf den Nebenklassen nach T_θ konstant und definiert eine Funktion

$$f : T\backslash G \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Für diese gilt: $f(gk) = \mathbf{1}_K(k^{-1}g^{-1}tgk) = \mathbf{1}_K(g^{-1}tg)$ für alle $k \in K$, $g \in G$. Die Funktion f ist somit lokal konstant, genauer: konstant auf den Doppelnebenklassen $T_\theta gK$. Die Integralformel aus Satz 1.7 liefert eine Möglichkeit, das Integral von f zu berechnen:

$$\int_{T\backslash G} f(g)\; d\dot{g} = \sum_{g\in\Phi} f(g)\frac{vol_G(gKg^{-1})}{vol_{T_\theta}(T_\theta \cap gKg^{-1})} = \sum_{g\in\Phi} \frac{\mathbf{1}_K(g^{-1}tg)}{vol_{T_\theta}(T_\theta \cap gKg^{-1})},$$

wobei Φ ein Vertretersystem der Doppelnebenklassen bezeichnet. Dieses Integral ist das Orbitalintegral von $t = a + b\sqrt{A}$ wenn $b \neq 0$, weil dann $Z_G(t) = T_\theta$. In diesem Fall nennt man t regulär.
Bei der Berechnung des Orbitalintegrals müssen nun im wesentlichen zwei Probleme gelöst werden. Zum einen muß ein explizites Vertretersystem Φ gefunden werden. Zum anderen sind für diese Vertreter die Beiträge zur Summe zu bestimmen.

2.1.1 Die Zerlegung $T_\theta \backslash G / K$

Satz 2.2.
(a) Es sei $\mathbf{GL}(2,F)$ *die Darstellung von* $\mathbf{GL}(L)$ *bezüglich der Basis* $1, \theta\sqrt{A}$ *von* L *über* F. *Dann gilt:*

$$\mathbf{GL}(2,F) = \bigcup_{f\in\mathbb{N}_0} L^* \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^{f-v(\theta)} \end{pmatrix} \cdot \tilde{K},$$

wobei $\tilde{K} := \mathbf{GL}(2, \mathbf{o_F})$.
(b) Es sei $G = \mathbf{SL}(2,F)$ *die Darstellung der* $\mathbf{SL}(L)$ *bezüglich der Basis* $1, \sqrt{A}$. *Weiter sei* $\epsilon \in \mathbf{o_F}^* \backslash \mathbf{o_F}^{*2}$ *und* $l \in L^*$ *so, daß* $N(l)\epsilon = 1$. *Dann gilt:*

$$G = \mathbf{SL}(2,F) = \bigcup_m \bigcup_i T \cdot l^i \begin{pmatrix} \pi^{-\frac{m}{2}} & 0 \\ 0 & \epsilon^i \pi^{\frac{m}{2}} \end{pmatrix} \cdot K,$$

wobei $K = \mathbf{SL}(2, \mathbf{o_F})$, $m = 0, 2, 4, 6, \ldots$ *und* $i = 0$ *für* $m = 0$ *bzw.* $i = 0, 1$ *für* $m > 0$.
(c) Identifiziert man G *mit* $\mathbf{SL}(L)$ *vermöge der Basis* $1, \pi\sqrt{A}$ *von* L *über* F, *so gilt:*

$$G = \mathbf{SL}(2,F) = \bigcup_{m\in 2\mathbb{N}_0} \bigcup_{i=0,1} \tilde{T} \cdot l^i \begin{pmatrix} \pi^{-\frac{m}{2}} & 0 \\ 0 & \epsilon^i \pi^{\frac{m}{2}} \end{pmatrix} \cdot K.$$

Als Hilfsmittel für den Beweis zunächst

Lemma 2.3. $\mathbf{o_F}^*$ *hat genau zwei Quadratklassen.*

Beweis von Lemma 2.3: Es sei $1 + \wp_F$ die Einseinheitengruppe von F. Dann ist $\mathbf{o_F}^* = \kappa_L^* \times (1+\wp_F)$. Denn es ist $\mathbf{o_F}^*/(1+\wp_F) \cong (\mathbf{o_F}/\wp_F)^* = \kappa_F^*$, und da κ_F vollkommen und von der Charakteristik p, existiert ein multiplikatives Restsystem von $(\mathbf{o_F}/\wp_F)^*$ in $\mathbf{o_F}^*$, das man suggestiv wieder mit κ_F^* bezeichnet. Dann ist $\kappa_F^* \times (1 + \wp_F) = \mathbf{o_F}^*$. Die multiplikative Gruppe des Restklassenkörpers κ_F hat genau zwei Quadratklassen. Zu zeigen: In der Einseinheitengruppe ist jede Zahl Quadrat. Denn dann ist die Anzahl der Quadratklassen in $\mathbf{o_F}^*$ gleich der von κ_F^*. Dies ist aber eine einfache Anwendung des Henselschen Lemmas: Sei $f(X) = X^2 - u \in \mathbf{o_F}[X]$ und $u \in (1+\wp_F)$. Dann zerfällt $\bar{f}(X) = X^2 - \bar{u} = X^2 - 1$ in $\kappa_F[X]$ in Linearfaktoren, also auch in $\mathbf{o_F}[X]$: $f(X) = (X - u_1)(X - u_2)$ mit o.E. $\bar{u}_1 = 1 \in \kappa_F$.

Beweis von Satz 2.2: (a) Sei $\tilde{G} = \mathbf{GL}(2,F)$. Ein Gitter Γ ist ein $\mathbf{o_F}$-Untermodul von $L \cong F^2$ vom Rang zwei. Ist $\alpha, \beta \in L^*$ eine Basis des Gitters, so schreibt man:

$$\Gamma = \alpha \mathbf{o_F} + \beta \mathbf{o_F} = (\alpha, \beta).$$

Die Gruppe $\mathbf{GL}(2,F)$, aufgefaßt als $\mathbf{GL}(L)$ bezüglich der Basis $1, \theta\sqrt{A}$, operiert transitiv auf den Gittern von L. Für $M \in \tilde{G}$ ist $M(\Gamma) \subset \Gamma$ für alle Gitter Γ genau dann, wenn M nur Einträge aus $\mathbf{o_F}$ hat, wenn also $M \in \tilde{K} := \mathbf{GL}(2, \mathbf{o_F})$. $\tilde{K}$ ist der Stabilisator der Gitter unter $\tilde{G}$, und man kann $\tilde{G}/\tilde{K}$ mit den Gittern in L identifizieren.
Eine Ordnung von L ist ein Gitter $\Gamma \subset \mathbf{o_L}$, das 1 enthält. Dabei ist $\mathbf{o_L} = \mathbf{o_F} + \sqrt{A}\mathbf{o_F}$ die Maximalordnung von L (d.h. die Ordnung, die jede andere enthält), weil L/F unverzweigt ist.
Jedes Element einer beliebigen festen Ordnung läßt sich schreiben als $x + y\sqrt{A}$, $x, y \in \mathbf{o_F}$. Unter allen diesen existiert eines, etwa $a + b\sqrt{A}$, für das $v(b)$ minimal ist, da $v(y) \geq 0$. Bis auf Einheiten ist $b = \pi^{v(b)}$ mit einem Primelement $\pi \in \mathbf{o_F}$, und $\pi^{v(b)}$ geht in jedem y auf, weil $v(b)$ minimal war. Da $1 \in \Gamma$, ist somit $\Gamma = (1, \pi^{v(b)}\sqrt{A})$. Dieses $v(b) =: f \in \mathbb{N}_0$ heißt der Führer von Γ. Man hat also eine Bijektion, die jeder Ordnung von L ihren Führer $f \in \mathbb{N}_0$ zuordnet:

$$\Gamma_f = (1, \pi^f\sqrt{A}) \longmapsto f \in \mathbb{N}_0.$$

Es sei nun $\Gamma = (\alpha, \beta)$ ein beliebiges Gitter aus L, und o.E. kann man $v(\alpha) \leq v(\beta)$ annehmen. Γ ist ähnlich zur Ordnung $(1, \frac{\beta}{\alpha})$:

$$\Gamma = \alpha(1, \frac{\beta}{\alpha}) = \alpha(1, \pi^{v(\frac{\beta}{\alpha})}\sqrt{A}) = \alpha(1, \pi^f\sqrt{A}), \quad f := v(\frac{\beta}{\alpha}).$$

Und diese Darstellung ist eindeutig in f. Nimmt man für L/F die Basis $1, \theta\sqrt{A}$, so ergibt sich:

$$\Gamma = \alpha(1, \pi^f\sqrt{A}) \quad \longleftrightarrow \quad \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^{f-v(\theta)} \end{pmatrix},$$

das heißt

$$\tilde{G}/\tilde{K} \cong \bigcup_{f \in \mathbb{N}_0} L^* \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^{f-v(\theta)} \end{pmatrix},$$

oder

$$\tilde{G} = \mathbf{GL}(2,F) = \bigcup_{f \in \mathbb{N}_0} L^* \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^{f-v(\theta)} \end{pmatrix} \cdot \tilde{K}.$$

Zu (b) und (c): Es sei $G = \mathbf{Sl}(2,F)$ die Darstellung von $\mathbf{SL}(L)$ zunächst für eine beliebige Basis λ_0, λ_1 von L über F. G operiert nun transitiv auf den Gittern mit gleichem (d.h. bis auf Einheiten gleichem) Grundmascheninhalt. Für $M \in G$ ist

$M(\Gamma)=\Gamma$ genau dann wenn M Einträge aus $\mathbf{o_F}$ hat, d.h. $M\in K=\mathbf{SL}(2,\mathbf{o_F})$. Somit entspricht G/K umkehrbar eindeutig den Gittern in L mit gleichem Mascheninhalt. Sei $\Gamma=(\alpha,\beta)=(a_0\lambda_0+a_1\lambda_1, b_0\lambda_0+b_1\lambda_1)$, für $a_0,a_1,b_0,b_1\in F$. Dann hat Γ gleichen Mascheninhalt wie das von λ_0,λ_1 aufgespannte Gitter, wenn

$$\det\Gamma=\begin{vmatrix} a_0 & b_0\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}=1,$$

(nachdem man eventuell mit Einheiten multipliziert hat). Sei $\Gamma=(\alpha,\beta)$ ein Gitter mit $\det\Gamma=1$. Man setzt $\alpha=\alpha_0\lambda_0, \beta=\beta_0\lambda_1$ in L, o.E. $v(\alpha_0)\le v(\beta_0)$. Schreibt man $\alpha_0=\tilde\alpha\pi^{v(\alpha_0)}$ mit $\tilde\alpha\in\mathbf{o_L^*}$, so ist $N(\tilde\alpha)\in\mathbf{o_F^*}$. Dann gilt für Γ:

$$\Gamma=\tilde\alpha\pi^{v(\alpha_0)}(\lambda_0,\frac{\beta_0}{\alpha_0}\lambda_1)=\tilde\alpha\pi^{v(\alpha_0)}(\lambda_0,\pi^{v(\frac{\beta_0}{\alpha_0})}\lambda_1)=\tilde\alpha(\pi^{v(\alpha_0)}\lambda_0,\pi^{v(\beta_0)}\lambda_1),$$

und

$$\det\frac{1}{\tilde\alpha}\Gamma=N(\tilde\alpha)^{-1}\pi^{v(\alpha_0)}\pi^{v(\beta_0)}\in\mathbf{o_F^*}.$$

Es gilt also $v(\alpha_0)=-v(\beta_0)$ und $\Gamma=\tilde\alpha(\pi^{-v(\beta_0)}\lambda_0,\pi^{v(\beta_0)}\lambda_1)$. Damit ist $v(\alpha_0)\le 0$. Nach Lemma 2.3 hat $\mathbf{o_F^*}$ zwei Quadratklassen, d.h. es gilt für $\tilde\alpha$:

$$N(\tilde\alpha)=\epsilon^{-i}\cdot\tilde\epsilon^2,\quad \epsilon,\tilde\epsilon\in\mathbf{o_F^*}, \epsilon\notin\mathbf{o_F^{*2}},\quad i=0 \text{ oder } 1.$$

Die $l\in L^*$ mit $N(l)=\epsilon^{-1}$ sind bis auf $t\in N_L^1$ festgelegt. Also hat $\tilde\alpha$ (für festgelegtes l) die Form: $\tilde\alpha=tl^i\tilde\epsilon$ mit eindeutig bestimmtem $t\in N_L^1$. Damit wird Γ zu

$$\Gamma=t\,l^i\,\tilde\epsilon(\pi^{-v(\beta_0)}\lambda_0,\pi^{v(\beta_0)}\lambda_1)=tl^i(\pi^{-v(\beta_0)}\lambda_0,\epsilon^i\pi^{v(\beta_0)}\lambda_1),$$

und für die Determinante des letzten Ausdrucks erhält man $N(t)N(l)^i\epsilon^i=1$. Um zu prüfen, wann zwei Ausdrücke $tl^i(\pi^{-n}\lambda_0,\epsilon^i\pi^n\lambda_1)$ und $t'l'^j(\pi^{-m}\lambda_0,\epsilon^j\pi^m\lambda_1)$ dasselbe Gitter Γ bestimmen, werden jetzt λ_0,λ_1 der Einbettung $N_L^1\hookrightarrow T_\theta\subset G$ entsprechend spezifiziert:
(b) Es sei $\lambda_0=1$ und $\lambda_1=\sqrt{A}$. Da l nur bis auf Elemente aus N_L^1 bestimmt ist, sei o.E. $\epsilon=A$ und $l=\sqrt{A}^{-1}$. Dann ist für

$$t\sqrt{A}^{-i}(\pi^{-n},A^i\pi^n\sqrt{A})=t'\sqrt{A}^{-j}(\pi^{-m},A^j\pi^m\sqrt{A})$$

zwingend $n=m$, weil der Mascheninhalt (bis auf Einheiten) derselbe sein muß. Auch kann man $t=t'$ annehmen, weil sie sich höchstens um ein Element aus $N_L^1\cap F=\{\pm1\}$ unterscheiden dürfen. Somit vereinfacht sich obiges zu der Frage, wann das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\pi^{-n} &= a_0\sqrt{A}^{-1}\pi^{-n}+a_1A\pi^n,\\ \pi^n\sqrt{A} &= b_0\sqrt{A}^{-1}\pi^{-n}+b_1A\pi^n\end{aligned}$$

eine Lösung $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbf{o_F}$ hat, oder äquivalent

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 + (Aa_1\pi^{2n} - 1)\sqrt{A}, \\ 0 &= (b_0 - A\pi^{2n}) + b_1 A\sqrt{A}. \end{aligned}$$

Dies hat nur für $n = 0$ eine Lösung, (nämlich $a_0 = 0, a_1 = A^{-1}, b_0 = A$ und $b_1 = 0$). Also entspricht die Menge der Gitter Γ mit $det\,\Gamma = 1$ umkehrbar eindeutig der Vereinigung

$$\bigcup_m \bigcup_i T \cdot l^i \begin{pmatrix} \pi^{-m/2} & 0 \\ 0 & \epsilon^i \pi^{m/2} \end{pmatrix},$$

mit $m = 0, 2, 4, 6, \ldots$ und $i = 0$ für $m = 0$ bzw. $i = 0, 1$ für $m = 2, 4, 6, \ldots$. Und für G liest man die Zerlegung ab:

$$G = \bigcup_m \bigcup_i T \cdot l^i \begin{pmatrix} \pi^{-m/2} & 0 \\ 0 & \epsilon^i \pi^{m/2} \end{pmatrix} \cdot K.$$

(c) Nun muß man entsprechend der Einbettung $N_L^1 \hookrightarrow T_\pi$ die Basis $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \pi\sqrt{A}$ wählen. Dann führt die Frage, wann zwei Ausdrücke $tl^i(\pi^{-n}\lambda_0, \epsilon^i\pi^n\lambda_1)$ und $t'l^j(\pi^{-m}\lambda_0, \epsilon^j\pi^m\lambda_1)$ dasselbe Gitter Γ bestimmen, wie in Teil (b) zur Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \pi^{-n} &= a_0\sqrt{A}^{-1}\pi^{-n} + a_1 A\pi^{n+1}, \\ \pi^{n+1}\sqrt{A} &= b_0\sqrt{A}^{-1}\pi^{-n} + b_1 A\pi^{n+1} \end{aligned}$$

mit $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbf{o_F}$, oder äquivalent

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 + (a_1 A\pi^{2n+1} - 1)\sqrt{A}, \\ 0 &= (b_0 - A\pi^{2n+1}) + b_1 A\pi^{2n+1}\sqrt{A}. \end{aligned}$$

Dies ist aber unlösbar, da $a_1 A\pi^{2n+1} \neq 1$ für alle $a_1 \in \mathbf{o_F}$. Also erhält man:

$$G = \mathbf{SL}(2,F) = \bigcup_{m\in 2\mathbb{N}_0} \bigcup_{i=0,1} \tilde{T} \cdot l^i \begin{pmatrix} \pi^{-\frac{m}{2}} & 0 \\ 0 & \epsilon^i \pi^{\frac{m}{2}} \end{pmatrix} \cdot K.$$

2.1.2 Berechnung von $O_t^G(\mathbf{1_K})$ für $t \in T$

Nachdem eine Doppelnebenklassenzerlegung gefunden ist, kann man die Integralformel nun auswerten:

$$O_{t\in T_\theta}^G(\mathbf{1}_K) = \sum_{g\in\Phi} \frac{\mathbf{1}_K(g^{-1}tg)}{vol_{T_\theta}(T_\theta \cap gKg^{-1})}.$$

Dies soll für die beiden nicht konjugierten Tori $T = T_1$ und $\tilde{T} = T_\pi$ geschehen, zunächst für T.
Es leisten nur solche $g \in \Phi$ Beiträge zum Integral, für die gilt

$$g^{-1}tg \quad \in \quad K \cap g^{-1}Tg. \qquad (*)$$

Diese Bedingung kann nun für das Vertretersystem aus Satz 2.2(b) ausgewertet werden. Es sei

$$g_m := \begin{pmatrix} \pi^{-m/2} & 0 \\ 0 & \pi^{m/2} \end{pmatrix},$$

für $m = 0, 2, 4, 6, \ldots$. Für g_m schreibt sich die Bedingung $(*)$ als:

$$\begin{aligned} g_m^{-1}tg_m &= \begin{pmatrix} \pi^{m/2} & 0 \\ 0 & \pi^{-m/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^{-m/2} & 0 \\ 0 & \pi^{m/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & bA\pi^m \\ b\pi^{-m} & a \end{pmatrix} \quad \in \quad K \cap g_m^{-1}Tg_m. \end{aligned}$$

Weil $t = a + b\sqrt{A} \in N_L^1$, bedeutet das, daß alle Eintäge aus $\mathbf{o_F}$ sein müssen. Das heißt man erhält die zusätzliche Bedingung $\pi^{-m}b \in \mathbf{o_F}$, also $v(b) \geq m$.
Die übrigen Nebenklassenvertreter sind

$$\tilde{g}_m := l \begin{pmatrix} \pi^{-m/2} & 0 \\ 0 & \epsilon\pi^{m/2} \end{pmatrix},$$

für m=2,4,6,.... Dann wird $(*)$ zu:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_m^{-1}t\tilde{g}_m &= \begin{pmatrix} \pi^{m/2} & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1}\pi^{-m/2} \end{pmatrix} l^{-1}tl \begin{pmatrix} \pi^{-m/2} & 0 \\ 0 & \epsilon\pi^{m/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & \epsilon bA\pi^m \\ \epsilon^{-1}b\pi^{-m} & a \end{pmatrix} \quad \in \quad K \cap \tilde{g}_m^{-1}T\tilde{g}_m. \end{aligned}$$

Auch dies ist gleichbedeutend mit $v(b) \geq m$, weil $\epsilon \in \mathbf{o_F^*}$ und $t = a + b\sqrt{A} \in T$. Es liefern also nur solche g_m, $\tilde{g}_m$ einen Beitrag zum Integral, für die $m \leq v(b)$, $t = a + b\sqrt{A}$:

$$O_t^G(\mathbf{1}_K) = \frac{1}{vol_T(T \cap K)} + \sum_{m=2,4}^{2[\frac{v(b)}{2}]} \left(\frac{1}{vol_T(T \cap g_m K g_m^{-1})} + \frac{1}{vol_T(T \cap \tilde{g}_m K \tilde{g}_m^{-1})} \right).$$

Nützlich für später ist

Beobachtung 2.4. *Für $m > 0$ gilt*

$$T \cap g_m K g_m^{-1} = T \cap \tilde{g}_m K \tilde{g}_m^{-1} = \{t \in T \mid v(b) \geq m, t \equiv \pm 1 \bmod \wp_L^m\}.$$

Beweis: Das erste Gleichheitszeichen entnimmt man unmittelbar den vorigen Rechnungen. Zum zweiten: Für $t \in T \cap g_m K g_m^{-1}$ hatten wir bereits gesehen, daß $t = a + b\sqrt{A}$, $N(t) = a^2 - b^2 A = 1$, $b = \pi^m b_1$ mit einem $b_1 \in \mathbf{o_F}$. Schreibt man $a = a_1 + \pi^x a_2$ mit $a_1 \in \kappa_\mathbf{F}$, $a_2 \in \mathbf{o_F^*}$ und $x > 0$ (oder $a = \pm 1$, dann ist nichts zu zeigen), dann folgt $1 = a_1^2 + 2\pi^x a_1 a_2 + \pi^{2x} a_2^2 - \pi^{2m} b_1^2 A$. Somit ist $a^2 \equiv 1 \bmod \wp_F^{2m}$, also $a_1 = \pm 1$ und $x \geq 2m$. Und es ergibt sich $t \equiv \pm 1 \bmod \wp_F^m$.

Berechnung der Volumina

Um das Integral auszuwerten, muß man noch die Volumina berechnen und diese aufsummieren. Es gilt:

$$vol_T(T \cap g_m K g_m^{-1})^{-1} = vol_T(T)^{-1} \cdot [T : (T \cap g_m K g_m^{-1})] = [T : (T \cap g_m K g_m^{-1})],$$

weil $vol_T(T) = 1$ und $T \cap g_m K g_m^{-1}$ eine offen abgeschlossene Untergruppe von T ist, also endlichen Index in T hat.
Um diesen Index zu berechnen, benötigt man zunächst einige einfache Hilfsmittel:

Lemma 2.5. $N_L^1 \cong N_{\kappa_L}^1 \times (N_L^1 \cap (1 + \wp_L))$

Beweis: Man betrachtet die Zerlegung $\mathbf{o_L^*} \cong \kappa_L^* \times (1 + \wp_L)$. Da es egal ist, ob man zuerst die Norm in $\mathbf{o_L^*}$ bildet und dann modulo $\wp_L$ reduziert oder umgekehrt, muß insbesondere gelten: $N_L^1 \cong N_{\kappa_L}^1 \times (N_L^1 \cap (1 + \wp_L))$.

Lemma 2.6. *Sei M/K eine endliche algebraische Erweiterung endlicher Körper, etwa $K = \mathbb{F}_q, M = \mathbb{F}_{q^n}$. Dann ist jedes Element aus K^* Norm eines Elements aus M^*. Insbesondere ist*

$$|N_M^1| = |\operatorname{kern} N| = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Beweis: Die Galoisgruppe von M/K wird durch die Potenzierung mit q erzeugt. Für $\alpha \in M$ gilt also: $N_{M/K}(\alpha) = \alpha^{1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}} = \alpha^{\frac{q^n-1}{q-1}}$. Damit hat die Gleichung $N(\alpha) = 1$ höchstens $\frac{q^n-1}{q-1}$ Lösungen, und für das Bild von N muß gelten:

$$|\operatorname{bild} N| = \frac{q^n - 1}{|\operatorname{kern} N|} \geq q - 1 = |K^*|.$$

Es muß somit überall $=$ stehen, und das $\operatorname{bild} N$ muß K^* überdecken.

Lemma 2.7. *Es sei $q = |\kappa_F|$, und es sei $U^{(n)} := 1 + \wp_L^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$[(N_L^1 \cap U^{(n)}) : (N_L^1 \cap U^{(n+1)})] = q.$$

Beweis: Man hat eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N_L^1 \cap U^{(n+1)} \longrightarrow N_L^1 \cap U^{(n)} \longrightarrow \{x \in \kappa_L \mid \operatorname{sp} x = 0\} \longrightarrow 0,$$

nämlich: Die Exaktheit an der ersten Stelle ist klar, wenn man als Homomorphismus nur die Einbettung $N_L^1 \cap U^{(n+1)} \hookrightarrow N_L^1 \cap U^{(n)}$ benutzt. Weiter definiert man:

$$\begin{aligned} \phi : N_L^1 \cap U^{(n)} &\longrightarrow \{x \in \kappa_L \mid \operatorname{sp} x = 0\} \\ t = 1 + \pi^n x + \pi^{n+1} y &\longmapsto x, \end{aligned}$$

mit $x \in \kappa_L$ und $y \in \mathbf{o_L}$. Da $1 = N(t) = t \cdot \bar{t} = 1 + \pi^n(x + \bar{x}) + \textit{höhere}$, ist $0 = x + \bar{x} = \operatorname{sp}_{\kappa_L} x$. Also ist ϕ wohldefiniert und offensichtlich surjektiv. Die Exaktheit an der zweiten Stelle folgt, da $\operatorname{kern}\phi = \{t = 1 + \pi^n x + \pi^{n+1} y | x = 0\} = N_L^1 \cap U^{(n+1)}$. Zeigt man nun noch $|\operatorname{kern}\operatorname{sp}_{\kappa_L}| = q$, so folgt die Behauptung. Mit einem primitiven Element α der Erweiterung $\kappa_L = \kappa_F(\alpha)$ schreibt sich $x \in \kappa_L$ als $x = x_1 + \alpha x_2$, $x_1, x_2 \in \kappa_F$. Dann ist $\operatorname{sp} x = 2x_1 = 0$ genau dann, wenn $x_1 = 0$ und $x_2 \in \kappa_F$ beliebig. Also ist $|\operatorname{kern}\operatorname{sp}_{\kappa_L}| = q$.

Nun kann man die gesuchten Volumina ausrechnen:

Satz 2.8.

$$vol_T(T \cap g_m K g_m^{-1})^{-1} = [T : (T \cap g_m K g_m^{-1})] = \begin{cases} 1 & \textit{falls } m = 0, \\ \frac{q+1}{2} \cdot q^{m-1} & \textit{falls } m > 0. \end{cases}$$

Beweis: Für $m = 0$ ist $[T : (T \cap K)] = 1$, weil $T \subset K$. Sei nun $m > 0$: Aus Lemma 2.5 liest man vermöge $T \cong N_L^1$ ab:

$$\begin{aligned} &[T : (T \cap g_m K g_m^{-1})] = \\ &[N_{\kappa_L}^1 : (T \cap g_m K g_m^{-1}) \bmod \wp_L] \cdot [T \cap (1 + \wp_L) : (T \cap g_m K g_m^{-1}) \cap (1 + \wp_L)]. \end{aligned}$$

Zum ersten Faktor: Nach Beobachtung 2.4 ist $(T \cap g_m K g_m^{-1}) \equiv \{\pm 1\} \bmod \wp_L$, also muß $(T \cap g_m K g_m^{-1}) \bmod \wp_L$ die Untergruppe der Ordnung 2 in $N_{\kappa_L}^1$ sein, und man erhält mit Lemma 2.6:

$$[N_{\kappa_L}^1 : (T \cap g_m K g_m^{-1}) \bmod \wp_L] = \frac{1}{2} \cdot |N_{\kappa_L}^1| = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2 - 1}{q - 1} = \frac{q+1}{2} \quad .$$

Zum zweiten Faktor: Sukzessives Anwenden von Lemma 2.7 liefert zusammen mit Beobachtung 2.4:

$$\begin{aligned} &[T \cap (1 + \wp_L) : (T \cap g_m K g_m^{-1}) \cap (1 + \wp_L)] \\ &= [T \cap (1 + \wp_L) : T \cap (1 + \wp_L^m)] \\ &= [T \cap U^{(1)} : T \cap U^{(m)}] \\ &= q^{m-1}. \end{aligned}$$

Summation der Beitäge

Nun erhält man durch Aufsummieren das Orbitalintegral:

Satz 2.9. *Es sei F ein lokaler Körper der Restklassencharakteristik $\neq 2$, und es sei $L = F(\sqrt{A})$ eine unverzweigte Erweiterung von F, also o.E. $A \in \mathbf{o_F^*} \backslash \mathbf{o_F^*}^2$. Sei weiter $G = \mathbf{SL}(2,F)$, $K = \mathbf{SL}(2,\mathbf{o_F})$ und $T \cong N_L^1$ der Torus in $\mathbf{SL}(2,F)$ der Form*

$$T = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & bA \\ b & a \end{array} \right) \quad \middle| \quad a^2 - b^2 A = 1 \quad \right\}.$$

Dann hat das Orbitalintegral für reguläres $t = a + b\sqrt{A} \in T$ den Wert

$$\begin{aligned} O^G_{t\in T}(\mathbf{1}_K) &= \sum_{g\in\Phi} \frac{\mathbf{1}_K(g^{-1}tg)}{vol_T(T \cap gKg^{-1})} \\ &= 1 + 2\frac{q+1}{2}q + 2\frac{q+1}{2}q^3 + \cdots + 2\frac{q+1}{2}q^{2[\frac{v(b)}{2}]-1} \\ &= \frac{q^{2[\frac{v(b)}{2}]} - 1}{q-1} \quad . \end{aligned}$$

2.1.3 Berechnung von $O_t^G(\mathbf{1_K})$ für $t \in \tilde{T}$

Es sei nun

$$\tilde{T} \quad = \quad \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & \pi bA \\ \pi^{-1}b & a \end{array} \right) \quad \middle| \quad a^2 - b^2 A = 1 \quad \right\}$$

der maximale Torus von G, der durch die Einbettung von $L \cong F^2 \hookrightarrow G$ bezüglich der Basis $1, \pi\sqrt{A}$ entsteht. Es sollen die Orbitalintegrale für Elemente $t \in \tilde{T}$ und die Funktion $\mathbf{1}_K$ berechnet werden. Es gilt wieder $Z_G(t) = \tilde{T}$, wenn $t = a + b\sqrt{A}$ mit $b \neq 0$. Man muß also die folgende Formel auswerten:

$$O^G_{t\in\tilde{T}}(\mathbf{1}_K) = \sum_{g\in\Phi} \frac{\mathbf{1}_K(g^{-1}tg)}{vol_{\tilde{T}}(\tilde{T} \cap gKg^{-1})},$$

wobei Φ ein Vertretersystem der Doppelnebenklassen $\tilde{T}\backslash G/K$ bezeichnet. Das Volumen von $\tilde{T}$ sei auf 1 normiert: $vol_{\tilde{T}}(\tilde{T}) = 1$. Die Vorgehensweise bei der Berechnung ist exakt dieselbe wie die des vorigen Abschnitts: Satz 2.2(c) liefert ein vollständiges Vertretersystem für die Doppelnebenklassen $\tilde{T}\backslash G/K$:

$$g_m = \left(\begin{array}{cc} \pi^{-m/2} & 0 \\ 0 & \pi^{m/2} \end{array} \right)$$

und

$$\tilde{g}_m := l \left(\begin{array}{cc} \pi^{-m/2} & 0 \\ 0 & \epsilon\pi^{m/2} \end{array} \right),$$

jeweils für m=0,2,4,6,.... Dabei ist $\epsilon \in \mathbf{o_F^*} \backslash \mathbf{o_F^*}^2$ und $l \in L^*$ so, daß $N(l)\epsilon = 1$. Für diese Vertreter müssen nun die Beiträge zum Integral berechnet werden. Es ist $\mathbf{1}_K(g^{-1}tg) = 1$ genau dann, wenn

$$g^{-1}tg \quad \in \quad \tilde{g}^{-1}\tilde{T}g \cap K. \qquad (*)$$

Diese Bedingung schreibt sich für $g = g_m$ als:

$$\begin{aligned} g_m^{-1} t g_m &= \begin{pmatrix} \pi^{m/2} & 0 \\ 0 & \pi^{-m/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & bA\pi \\ b\pi^{-1} & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^{-m/2} & 0 \\ 0 & \pi^{m/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & bA\pi^{m+1} \\ b\pi^{-m-1} & a \end{pmatrix} \quad \in \quad K \cap g_m^{-1} \tilde{T} g_m. \end{aligned}$$

Damit dies erfüllt ist, müssen alle Einträge aus $\mathbf{o_F}$ sein. Das heißt, es muß $v(b) \geq m+1$ erfüllt sein. Mit den Vertretern $\tilde{g}_m$ erhält man für Bedingung $(*)$:

$$\tilde{g}_m^{-1} t \tilde{g}_m = \begin{pmatrix} a & \epsilon bA\pi^{m+1} \\ \epsilon^{-1} b\pi^{-m-1} & a \end{pmatrix} \quad \in \quad K \cap \tilde{g}_m^{-1} T \tilde{g}_m.$$

Auch dies ist genau dann erfüllt, wenn $v(b) \geq m+1$. Daraus folgt, daß nur die g_m, $\tilde{g}_m$ mit $m = 0, 2, 4, 6, \ldots, 2[\frac{v(b)-1}{2}]$ von Null verschiedene Beiträge zum Integral liefern. Für diese müssen jetzt noch die Volumina

$$vol_{\tilde{T}}(\tilde{T} \cap g_m K g_m^{-1})^{-1} = [\tilde{T} : (\tilde{T} \cap g_m K g_m^{-1})]$$

berechnet werden. Als Analogon zu Beobachtung 2.4 erhält man

Beobachtung 2.10. *Für $m \geq 0$ gilt*

$$\tilde{T} \cap g_m K g_m^{-1} = \tilde{T} \cap \tilde{g}_m K \tilde{g}_m^{-1} = \{t \in \tilde{T} \mid v(b) \geq m+1, t \equiv \pm 1 \bmod \wp_L^{m+1}\}.$$

Beweis: Das erste Gleichheitszeichen folgt aus den obigen Rechnungen. Für das zweite schreibt man $t = a + b\sqrt{A} \in \tilde{T} \cap g_m K g_m^{-1}$ als $t = a_1 + a_2\pi^x + b_1\sqrt{A}\pi^{m+1}$ mit $a_1 \in \kappa_F$, $a_2, b_1 \in \mathbf{o_F^*}$ und $x > 0$, (denn wenn $x = 0$, so ist nichts zu zeigen). Dann erhält man mit der Bedingung $1 = N(t) = a_1^2 + 2a_1a_2\pi^x + a_2^2\pi^{2x} - b_1^2 A\pi^{2m+2}$ zwingend $a^2 \equiv 1 \bmod \wp^{2m+2}$, also $a_1 = \pm 1$ und $x \geq 2m+2$. Damit folgt $t \equiv \pm 1 \bmod \wp_F^{m+1}$.

Damit kann man die Volumina berechnen:

Satz 2.11. *Für $m \geq 0$ gilt*

$$vol_{\tilde{T}}(\tilde{T} \cap g_m K g_m^{-1})^{-1} = [\tilde{T} : (\tilde{T} \cap g_m K g_m^{-1})] = \frac{q+1}{2} \cdot q^m.$$

Beweis: Wie in Satz 2.8 hat man

$$\begin{aligned} &[\tilde{T} : (\tilde{T} \cap g_m K g_m^{-1})] = \\ &\frac{q+1}{2} \cdot [\tilde{T} \cap (1+\wp_L) : (\tilde{T} \cap g_m K g_m^{-1}) \cap (1+\wp_L)]. \end{aligned}$$

Der zweite Faktor ergibt sich aus Beobachtung 2.10 und m-maliges Anwenden von Lemma 2.7 nun zu

$$\begin{aligned} &[\tilde{T} \cap (1+\wp_L) : (\tilde{T} \cap g_m K g_m^{-1}) \cap (1+\wp_L)] \\ &= [\tilde{T} \cap (1+\wp_L) : \tilde{T} \cap (1+\wp_L^m)] \\ &= [\tilde{T} \cap U^{(1)} : \tilde{T} \cap U^{(m)}] \\ &= q^m. \end{aligned}$$

Das Orbitalintegral erhält man nun wieder durch Aufsummieren:

Satz 2.12. *Es sei F ein lokaler Körper der Restklassencharakteristik $\neq 2$ und es sei $L = F(\sqrt{A})$ eine unverzweigte Erweiterung von F, also o.E. $A \in \mathbf{o_F^*} \backslash \mathbf{o_F^*}^2$. Sei weiter $G = \mathbf{SL}(2,F)$, und $K = \mathbf{SL}(2,\mathbf{o_F})$ und $\tilde{T} \cong N_L^1$ der Torus der Form*

$$\tilde{T} = \left\{ \begin{pmatrix} a & bA\pi \\ b\pi^{-1} & a \end{pmatrix} \quad \middle| \quad a^2 - b^2 A = 1 \right\}.$$

Dann hat das Orbitalintegral für reguläres $t = a + b\sqrt{A} \in \tilde{T}$ den Wert

$$\begin{aligned} O^G_{t \in \tilde{T}}(\mathbf{1}_K) &= 2\frac{q+1}{2}q^0 + 2\frac{q+1}{2}q^2 + \cdots + 2\frac{q+1}{2}q^{2[\frac{v(b)-1}{2}]} \\ &= \frac{q^{2[\frac{v(b)+1}{2}]} - 1}{q-1} \quad , \end{aligned}$$

falls $v(b) > 0$. Wenn $v(b) = 0$, so ist $O^G_t(\mathbf{1}_K) = 0$.

2.2 Orbitalintegrale für die Erzeuger der Iwahori-Hecke-Algebra

Wir bleiben bei den Bezeichnungen der vorigen Abschnitte. Weiter sei

$$I := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in K \quad \middle| \quad \gamma \equiv 0 \bmod \wp_F \right\}$$

die Standard-Iwahorigruppe von $K = \mathbf{SL}(2,\mathbf{o_F})$. Mit I findet man die Bruhat-Tits-Zerlegung:

Satz 2.13.

$$G = \bigcup_{w \in W^{\mathrm{aff}}} I \cdot w \cdot I,$$

wobei W^{aff} die zugehörige affine Weylgruppe bezeichnet, d.h.

$$W^{\mathrm{aff}} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^{-n} & 0 \\ 0 & \pi^n \end{pmatrix}; n \in \mathbb{Z} \right\rangle.$$

Dabei bilden die Elemente

$$l_n = \begin{pmatrix} \pi^{-n} & 0 \\ 0 & \pi^n \end{pmatrix}, \quad j_n = \begin{pmatrix} 0 & \pi^{-n} \\ -\pi^n & 0 \end{pmatrix},$$

mit $n \in \mathbb{Z}$, ein Vertretersystem von $I \backslash G / I$.

Beweis: Daß eine Bruhat-Tits-Zerlegung von $G = \mathbf{SL}(2,F)$ zu der minimalen parabolischen Untergruppe I existiert, entnimmt man der Literatur, z.B. [Ga], Kapitel 19. Dort findet man auch den Aufbau der affinen Weylgruppe: Sie ist das semidirekte Produkt aus der sphärischen Weylgruppe $W^0 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und einer von

einem Element erzeugten Translationsgruppe, die also isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist. Für die sphärische Weylgruppe W^0 findet man als Vertreter in G die Identität und

$$j := j_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Es ist $j^2 = -\mathrm{id} \in I$, also wird W^0 wirklich von j erzeugt.) Die Translationsgruppe wird durch die

$$l_n = \begin{pmatrix} \pi^{-n} & 0 \\ 0 & \pi^n \end{pmatrix}$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ dargestellt. Da sie Normalteiler in W^{aff} ist, kann man jedes Produkt jl_n auch schreiben als ein $l_m j$. Somit vereinfachen sich alle Produkte in W^{aff} zu $l_n j^i$, also zu Elementen der Form l_n oder $l_n j = j_n$.
Die Algebra der links- und rechts-I-invarianten Funktionen mit kompaktem Träger auf G heißt Iwahori-Hecke-Algebra $\mathcal{H}_F(G,I)$ von G über F. Sie wird erzeugt von den charakteristischen Funktionen $\mathbf{1}_{IwI}$ mit $w \in W^{\mathrm{aff}}$, und ihre assoziative Multiplikation wird definiert durch

$$\mathbf{1}_{IsI} * \mathbf{1}_{IwI} = \mathbf{1}_{IswI}, \quad \text{falls } \; l(sw) > l(w),$$

und

$$\mathbf{1}_{IsI} * \mathbf{1}_{IsI} = (q-1)\mathbf{1}_{IsI} + q\mathbf{1}_I.$$

(Siehe dazu etwa [Ga], Kapitel 6.2.)
Um das Orbitalintegral einer beliebigen Funktion aus $\mathcal{H}_F(G,I)$ zuberechnen, reicht es also im Prinzip aus, die Orbitalintegrale für die Erzeuger $\mathbf{1}_{IwI}$, $w \in W^{\mathrm{aff}}$, zu kennen. Diese sollen im folgenden berechnet werden, und zwar zunächst für t aus der Einbettung $N_L^1 \hookrightarrow T \subset G$ und später für $N_L^1 \hookrightarrow \tilde{T} \subset G$. Dabei kann natürlich wieder die Integralformel aus Satz 1.7 benutzt werden, denn I ist eine kompakt offene Untergruppe von $\mathbf{SL}(2,F)$:

$$O^G_{t\in T_\theta}(\mathbf{1}_{IwI}) = \sum_{g\in\Psi} \frac{\mathbf{1}_{IwI}(g^{-1}tg)}{vol_{T_\theta}(T_\theta \cap gIg^{-1})},$$

wobei Ψ ein Vertretersystem der Doppelnebenklassen $T\backslash G/I$ bezeichnet. Die Berechnung gliedert sich wieder in zwei Teile: Man muß ein solches Vertretersystem Ψ finden und anschließend die Integralformel auswerten.

2.2.1 Orbitalintegrale $O^G_t(\mathbf{1}_{IwI})$ für $t \in T$

Die Zerlegung $T\backslash G/I$

Da in Satz 2.2 bereits ein Vertretersystem Φ für $T\backslash G/K$, $K = \mathbf{SL}(2,\mathbf{o_F})$, gefunden wurde, und I eine Untergruppe von K ist, sucht man zunächst Vertreter für K/I und überlegt dann, welche dieser Nebenklassen in derselben Doppelnebenklasse liegen. Zur Abkürzung bezeichne $\{\xi \in \kappa_F\}$ auch ein Vertretersystem (z.B. das multiplikative Restsystem) von κ_F in $\mathbf{o_F}$.

Lemma 2.14. *Die $q+1$ Elemente*

$$j := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k_\xi := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix},$$

mit $\xi \in \kappa_F$, bilden ein Vertretersystem von K/I.

Beweis: Es reicht, alles mod$\wp_F$ zu betrachten, weil $K/I \cong \mathbf{SL}(2,\kappa_F)/\mathbf{B}(2,\kappa_F)$, wobei

$$\mathbf{B}(2,\kappa_F) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| a \in \kappa_F^*, b \in \kappa_F \right\}$$

eine Borelgruppe von $\mathbf{SL}(2,\kappa_F)$ ist. Da $\kappa_F \cong \mathbb{F}_q$, ergibt sich für die Mächtigkeit

$$|SL(2,\kappa_F)/B(2,\kappa_F)| = \frac{|SL(2,\mathbb{F}_q)|}{|B(2,\mathbb{F}_q)|} = \frac{q(q-1)+q^2(q-1)}{q(q-1)} = q+1.$$

Nun liegen von den $q+1$ Elementen j, k_ξ keine zwei in derselben Nebenklasse, d.h. sie bilden ein Vertretersystem.

Jetzt muß man aus diesen Vertretern solche $k \in J_g \subset \{j, k_\xi | \xi \in \kappa_F\}$, auswählen, daß

$$G = \bigcup_{g\in\Phi, k\in J_g} TgkI.$$

Dazu benutzt man die Bijektion aus dem Beweis von Satz 1.7(b):

$$(T \cap gKg^{-1})/(T \cap gkIk^{-1}g^{-1}) \xrightarrow{\sim} A = \{xI \mid gxI \subset TgkI\}.$$

Die Betrachtung des linken Quotienten mag zunächst kompliziert erscheinen, sie hat jedoch den Vorteil, daß man aus ihr auch die später benötigten Volumina ablesen kann. Für das folgende zunächst ein Lemma:

Lemma 2.15. *Für $m > 0$ sei T_m definiert als $T_m := \{t \in T | v(b) \geq m\}$. Dann gilt:*

$$[T_m : T_{m+1}] = q.$$

Beweis: Es ist

$$T_m/T_{m+1} \cong (T_m \bmod \wp_F^{m+1})/(T_{m+1} \bmod \wp_F^{m+1}).$$

Nach Beobachtung 2.4 hat $t = a + b\sqrt{A} \in T_m$ die Eigenschaft, daß $a \equiv \pm 1 \bmod \wp_F^{2m}$; und immer gilt $2m \geq m+1$. Es folgt also:

$$\begin{aligned} T_m \bmod \wp_F^{m+1} &\cong \left\{ t = \pm 1 + \xi\sqrt{A} \mid \xi \in \kappa_F \right\}, \\ T_{m+1} \bmod \wp_F^{m+1} &\cong \{\pm 1\}. \end{aligned}$$

Somit ist $[T_m : T_{m+1}] = 2q : 2 = q$.

Der Quotient $(T \cap gKg^{-1})/(T \cap gkIk^{-1}g^{-1})$ soll nun zunächst für $g = g_m$ bzw. $g = \tilde{g}_m$ und $m = 2, 4, 6, \ldots$ betrachtet werden:
Die Unterschiede zwischen den auftretenden Termen von $\tilde{g}_m$ und denen von g_m sind jeweils nur Faktoren $\epsilon, \epsilon^{-1} \in \mathbf{o}_\mathbf{F}^*$, die im folgenden in Klammern gesetzt werden, so daß beide Fälle gleichzeitig behandelt werden können. In Beobachtung 2.4 wurde schon gezeigt, daß $T \cap g_m K g_m^{-1} = T \cap \tilde{g}_m K \tilde{g}_m^{-1} = T_m$. Ähnliches gilt für $T \cap g_m k I k^{-1} g_m^{-1}$: Es ist $t \in T \cap g_m k I k^{-1} g_m^{-1}$ genau dann, wenn

$$k^{-1} g_m^{-1} t g_m k \in I \qquad (*)$$

für $t \in T$.
Sei zunächst $k = j$. Dann hat man für $(*)$:

$$j^{-1} g_m^{-1} t g_m j = \begin{pmatrix} a & -\pi^{-m} b(\epsilon^{-1}) \\ -\pi^m b A(\epsilon) & a \end{pmatrix} \in I,$$

was gleichbedeutend ist mit $-\pi^{-m} b \in \mathbf{o}_\mathbf{F}$, das heißt mit $v(b) \geq m$. Also ist $T_m = T \cap g_m j I j^{-1} g_m^{-1} = T \cap g_m I g_m^{-1}$ und $(T \cap g_m I g_m^{-1})/(T \cap g_m j I j^{-1} g_m^{-1}) = 1$, und in $T g_m j I$ liegt keine weitere Nebenklasse von K/I.

Sei jetzt $k = k_\xi$. Dann ist

$$k_\xi^{-1} g_m^{-1} t g_m k_\xi = \begin{pmatrix} a + \xi \pi^m b A(\epsilon) & \pi^m b A(\epsilon) \\ \pi^{-m} b(\epsilon^{-1}) - \xi^2 \pi^m b A(\epsilon) & a - \xi \pi^m b A(\epsilon) \end{pmatrix} \in I$$

gleichbedeutend mit $t \in T$ und $v(b) > m$. Also ist $T \cap g_m k_\xi I k_\xi^{-1} g_m^{-1} = T_{m+1}$, und $(T \cap g_m I g_m^{-1})/(T \cap g_m k_\xi I k_\xi^{-1} g_m^{-1}) = T_m / T_{m+1}$. Lemma 2.15 besagt, daß q Nebenklassen $g_m k I$ in eine Doppelnebenklasse $T g_m k_\xi I$ fallen. Da jI schon vergeben ist, müssen dies gerade die $k_\xi I$ sein: $g_m k_\xi I \in T g_m I$ für alle $\xi \in \kappa_F$.

Jetzt muß man den Quotienten noch für den Fall $g = \mathrm{id}$ betrachten:
Setzt man $k = j$, so schreibt sich die Bedingung $(*)$ als

$$j^{-1} t j = \begin{pmatrix} a & -b \\ -bA & a \end{pmatrix} \in I,$$

was gleichbedeutend ist mit $v(b) > 0$. Also ist $T \cap jIj^{-1} = T \cap g_1 K g_1^{-1}$.
Und für $k = k_\xi$ ist

$$k_\xi^{-1} t k_\xi = \begin{pmatrix} a + bA\xi & bA \\ b - \xi^2 bA & a - \xi bA \end{pmatrix} \in I$$

ebenfalls gleichbedeutend mit $v(b) > 0$, weil $(1 - \xi^2 A) \notin \wp_F$. (Denn A ist kein Quadrat in F.) So erhält man in beiden Fällen $T \cap kIk^{-1} = T \cap g_1 K g_1^{-1}$. Dann ist $(T \cap K)/(T \cap kIk^{-1}) = T/(T \cap g_1 K g_1^{-1})$ und $[T : (T \cap g_1 K g_1^{-1})] = \frac{q+1}{2}$ nach Satz 2.8. Es fallen zweimal $\frac{q+1}{2}$ Klassen in eine Doppelnebenklasse TkI. Die Antwort auf die Frage, wie sich diese Nebenklassen aufteilen, gestaltet sich ein wenig komplizierter als im Fall $g \neq \mathrm{id}$. Es gilt nämlich

Lemma 2.16.

$$(a) \qquad j := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in T \cdot I \Longleftrightarrow -1 \text{ nicht Quadrat in } F,$$

$$(b) \quad k := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix} \in T \cdot I, \xi \in \kappa_F \Longleftrightarrow 1 - \xi^2 A \text{ Quadrat in } F.$$

Beweis: (a) Man prüft, wann $TjI = TI$. Sei also

$$tj = \begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bA & a \\ -a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \pi\gamma & \delta \end{pmatrix} \in I.$$

Dann ist $-a = \pi\gamma, \beta = -\pi\gamma$, und die Determinantenbedingung liefert $1 = a^2 - b^2\sqrt{A} = \pi^2\gamma^2 - b^2 A$, also $-b^2 A \equiv 1 \bmod \wp^2$; d.h. $-b^2 A \in 1 + \wp_F$. In $1 + \wp_F$ ist jede Zahl Quadrat, und so muß $-A$ Quadrat sein. Im endlichen Körper κ_F unterscheiden sich zwei Nichtquadrate um ein Quadrat, und in F ist eine Zahl genau dann Quadrat, wenn sie $\bmod \wp_F$ Quadrat ist (Henselsches Lemma). Da A kein Quadrat in F ist, wird $-A$ also genau dann ein Quadrat in F sein, wenn auch -1 kein Quadrat ist. Wählt man dann $b \in \mathbf{o_F^*}$ so, daß $-b^2 A = 1$ und setzt $a = 0$, so ist wie gewünscht

$$\begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bA & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in I.$$

Für (b) prüft man, wann $k_\xi \in TI$ für $\xi \in \kappa_F^*$. Dazu muß gelten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \pi\gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + bA\pi\gamma & a\beta + bA\delta \\ b\alpha + a\pi\gamma & b\beta + a\delta \end{pmatrix}.$$

Man liest ab: $a\beta = -bA\delta$. Da außerdem $\alpha, \delta \in \mathbf{o_F^*}$, muß aufgrund des ersten Eintrags $a \in \mathbf{o_F^*}$ gelten. Dann ist auch $\beta \neq 0$, denn ansonsten wäre $b = 0$ und dann folgte $\pi\gamma a = \xi \in \mathbf{o_F^*}$. Setzt man $bA = -a\beta\delta^{-1}$ in den ersten Matrixeintrag ein, so erhält man $a(\alpha - \pi\gamma\beta\delta^{-1}) = 1$, was, da $\alpha\delta - \pi\gamma\beta = 1$, gleichbedeutend mit $a = \delta$ ist. Dann folgt auch $\beta = -bA$. Somit erhält man die Forderung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + bA\pi\gamma & 0 \\ b\alpha + a\pi\gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Es bleiben drei Gleichungen:
(I) $\quad 1 = a\alpha + bA\pi\gamma$
(II) $\quad 1 = a^2 - b^2 A$
(III) $\xi = b\alpha + a\pi\gamma$.
(I) ist äquivalent zu $\alpha = a^{-1}(1 - bA\pi\gamma)$. Setzt man dies in (III) ein, so folgt $\xi = \frac{b}{a}(1 - bA\pi\gamma) - a\pi\gamma$, das heißt $b = a\xi - \pi\gamma(a^2 - b^2 A) = a\xi - \pi\gamma$. Dies in (II) eingesetzt liefert: $1 = a^2 - (a^2\xi^2 - 2a\xi\pi\gamma + \pi^2\gamma^2)A$. Rechnet man $\bmod \wp_F$, so lautet diese Gleichung $1 = a^2(1 - \xi^2 A)$. Für festes ξ ist dies nach $a \in \kappa_F^*$ auflösbar, wenn $1 - \xi^2 A$ Quadrat in κ_F ist, also Quadrat in F. Zusammenfassung: Wenn $k_\xi \in TI$, dann ist $1 - \xi^2 A$ Quadrat.

Ist andererseits $1-\xi^2 A$ Quadrat, so erhält man eine Darstellung von k_ξ in TI wie folgt: Wähle a so, daß $\frac{1}{a^2} = 1-\xi^2 A$ und $b = a\xi$. Dann ist $a^2 - b^2 A = 1$, und mit $\delta = a, \alpha = a^{-1}, \gamma = 0, \beta = -aA\xi$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \pi\gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix}.$$

Für später werden die Ergebnisse des letzten Abschnitts zusammengefaßt:

Beobachtung 2.17.
(a) Ist $k = j$ oder $k = k_\xi$ mit $\xi \in \kappa_F$, so gilt:

$$(T \cap K)/(T \cap kIk^{-1}) = T/(T \cap g_1 K g_1^{-1})$$

und die zugehörige Anzahl der Restklassen ist

$$[T : (T \cap g_1 K g_1^{-1})] = \frac{q+1}{2}.$$

(b) Ist $m > 0$, so gilt für g_m bzw. $\tilde{g}_m$:

$$(T \cap g_m K g_m^{-1})/(T \cap g_m j I j^{-1} g_m^{-1}) = 1.$$

Für k_ξ mit $\xi \in \kappa_F$ gilt:

$$(T \cap g_m K g_m^{-1})/(T \cap g_m k_\xi I k_\xi^{-1} g_m^{-1}) = T_m/T_{m+1}$$

und der Index ergibt sich zu

$$[T_m : T_{m+1}] = q.$$

Jetzt kann man ein Vertretersystem für $T\backslash G/I$ angeben:

Satz 2.18. *Ein vollständiges Vertretersystem Ψ von $T\backslash G/I$ bilden*

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\xi \in \mathbf{o_F^*}$ so, daß $1-\xi^2 A$ nicht Quadrat in F ist, und

$$g_m = \begin{pmatrix} \pi^{-m/2} & 0 \\ 0 & \pi^{m/2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}_m = l \cdot \begin{pmatrix} \pi^{-m/2} & 0 \\ 0 & \epsilon\pi^{m/2} \end{pmatrix},$$

$$g_m j = \begin{pmatrix} 0 & \pi^{-m/2} \\ -\pi^{m/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}_m j = l \cdot \begin{pmatrix} 0 & \pi^{-m/2} \\ -\epsilon\pi^{m/2} & 0 \end{pmatrix},$$

für $m = 2, 4, 6, \ldots$ und $l \in L = F(\sqrt{A}), \epsilon \in \mathbf{o_F^*} \backslash \mathbf{o_F^*}^2$ so, daß $N(l)\epsilon = 1$.

Benötigte Volumina

Damit man die Integralformel benutzen kann, muß man die Volumina der Doppelnebenklassen angeben, was nach der Vorarbeit nun leicht fällt:

Satz 2.19.
(a) $vol_G(I)^{-1} = q+1$
(b) $vol_T(T\cap I)^{-1} = \frac{q+1}{2}$
(c) $vol_T(T\cap kIk^{-1})^{-1} = \frac{q+1}{2}$
(d) $vol_T(T\cap gIg^{-1})^{-1} = \frac{q+1}{2}q^m$ *für* $g = g_m, \tilde{g}_m$ *und* $m>0$.
(e) $vol_T(T\cap gjIj^{-1}g^{-1})^{-1} = \frac{q+1}{2}q^{m-1}$ *für* $g = g_m, \tilde{g}_m$ *und* $m>0$.

Beweis: (a) ist klar, denn $vol_G(I)^{-1} = vol_G(K)^{-1}[K:I] = (q+1)$.
(b) und (c) sind Beobachtung 2.17(a) zusammen mit Satz 2.8.
Zu (d): Nach Beobachtung 2.17 ist $T\cap g_mIg_m^{-1} = T_{m+1} = T\cap g_{m+1}Kg_{m+1}^{-1}$. Also gilt für das Volumen mit Hilfe von Satz 2.8: $vol_T(T\cap g_mIg_m^{-1})^{-1} = vol_T(T\cap g_mKg_m^{-1})^{-1}[T_m:T_{m+1}] = \frac{q+1}{2}q^{m-1}q$.
Zu (e): Es ist $T\cap g_mjIj^{-1}g_m^{-1} = T\cap g_mKg_m^{-1}$ nach Beobachtung 2.17(b). Also sind auch die Volumina gleich, und Satz 2.8 ergibt $vol_T(T\cap g_mjIj^{-1}g_m^{-1})^{-1} = \frac{q+1}{2}q^{m-1}$.

Auswertung der Integralformel

Nun sind alle Bausteine zusammengetragen, die man benötigt, um die Orbitalintegrale mit der Formel

$$O^G_{t\in T}(\mathbf{1}_{IwI}) = \sum_{g\in\Psi}\frac{\mathbf{1}_{IwI}(g^{-1}tg)}{vol_T(T\cap gIg^{-1})}$$

zu berechnen.

Satz 2.20. *Es sei F ein lokaler Körper der Restklassencharakteristik $\neq 2$ und es sei $L=F(\sqrt{A})$ eine unverzweigte Erweiterung von F, also o.E. $A\in \mathbf{o_F}^*\backslash{\mathbf{o_F}^*}^2$. Sei weiter $G=\mathbf{SL}(2,F)$, $K=\mathbf{SL}(2,\mathbf{o_F})$, I die Standard-Iwahorigruppe und $T\cong N_L^1$ der Torus der Form*

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a^2 - b^2A = 1 \right\}.$$

Dann nehmen die Orbitalintegrale für reguläre $t = a+b\sqrt{A}\in T$ und die Erzeuger $\mathbf{1}_{IwI}$, wobei $w\in W^{\text{aff}}$, der Iwahori-Hecke-Algebra folgende Werte an:
(a) Sei $w = l_n = \begin{pmatrix} \pi^{-n} & 0 \\ 0 & \pi^n \end{pmatrix}$. *Dann erhält man für $n=0$, also für $IwI=I$:*

$$O^G_{t\in T}(\mathbf{1}_I) = \frac{q^{v(b)}-1}{q-1}.$$

(b) Für $n \neq 0$ *ist*

$$O^G_{t\in T}(\mathbf{1}_{Il_nI}) = 0.$$

(c) Sei $w = j_n = \begin{pmatrix} 0 & \pi^{-n} \\ -\pi^n & 0 \end{pmatrix}$. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned} O^G_{t\in T}(\mathbf{1}_{Ij_0I}) &= \begin{cases} 1 & \textit{falls} \quad v(b) = 0, \\ 0 & \textit{falls} \quad v(b) > 0, \end{cases} \\ O^G_{t\in T}(\mathbf{1}_{Ij_nI}) &= q^{v(b)+n-1} \quad \textit{für } n > 0, \ \textit{bzw.} \\ O^G_{t\in T}(\mathbf{1}_{Ij_nI}) &= q^{v(b)-n} \quad \textit{für } n < 0. \end{aligned}$$

Beweis: Da man die Volumengewichte in der Summationsformel schon kennt, ist nur noch für die verschiedenen IwI und $g \in \Psi$ zu prüfen, ob man von Null verschiedene Beiträge erhält, also ob $g^{-1}tg \in IwI$. Da die $g^{-1}tg$ immer wieder benötigt werden, seien sie hier einmal aufgelistet:

$g = \mathrm{id}$:

$$g^{-1}tg = t = \begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix}$$

$g = k_\xi$:

$$g^{-1}tg = k_\xi^{-1}tk_\xi = \begin{pmatrix} a + \xi bA & bA \\ b(1 - \xi^2 A) & a - \xi bA \end{pmatrix}$$

$g = g_m$ bzw. $\tilde{g}_m$:

$$g^{-1}tg = \begin{pmatrix} a & (\epsilon)\pi^m bA \\ (\epsilon^{-1})\pi^{-m} b & a \end{pmatrix}$$

$g = g_m j$ bzw. $\tilde{g}_m j$:

$$g^{-1}tg = \begin{pmatrix} a & -(\epsilon^{-1})\pi^{-m} b \\ -(\epsilon)\pi^m bA & a \end{pmatrix}$$

Um die entstehenden Matizengleichungen übersichtlicher zu gestalten, wird im folgenden wann immer ohne Einschränkung möglich nicht mit konkreten Einträgen, sondern symbolisch mit der Menge der möglichen Einträge gerechnet. So ergibt sich zum Beispiel

$$I = \begin{pmatrix} \mathbf{o}_\mathbf{F}^* & \mathbf{o}_\mathbf{F} \\ \wp_F & \mathbf{o}_\mathbf{F}^* \end{pmatrix},$$

zusammen mit der Nebenbedingung det $= 1$. Der Beweis besteht nun aus einer Reihe von Fallunterscheidungen, die aber im Einzelnen aus elementaren Rechnungen bestehen.

(a) und (b): Sei $w = l_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} IwI &= \begin{pmatrix} \mathbf{o_F^*} & \mathbf{o_F} \\ \wp_F & \mathbf{o_F^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^{-n} & 0 \\ 0 & \pi^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{o_F^*} & \mathbf{o_F} \\ \wp_F & \mathbf{o_F^*} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \pi^{-n}\mathbf{o_F^*} + \pi^{n+1}\mathbf{o_F} & \pi^{-n}\mathbf{o_F} + \pi^n\mathbf{o_F} \\ \pi^{-n+1}\mathbf{o_F} + \pi^{n+1}\mathbf{o_F} & \pi^{-n+1}\mathbf{o_F} + \pi^n\mathbf{o_F^*} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1. Fall: Sei $n > 0$. Dann ist

$$Il_nI = \begin{pmatrix} \pi^{-n}\mathbf{o_F^*} & \pi^{-n}\mathbf{o_F} \\ \pi^{-n+1}\mathbf{o_F} & \pi^{-n+1}\mathbf{o_F} \end{pmatrix}.$$

Um zu prüfen wann $g^{-1}tg \in Il_nI$, betrachtet man für alle $g \in \Psi$ simultan die erste Komponente: Da a bzw. $a + \xi bA \in \mathbf{o_F}$, also insbesondere nie in $\pi^{-n}\mathbf{o_F^*}$, kann nie $g^{-1}tg \in Il_nI$ gelten. Es ist also $\mathbf{1}_{Il_nI}(g^{-1}tg) = 0$, und damit ist auch $O_t^G(\mathbf{1}_{Il_nI}) = 0$.

2.Fall: Sei $n = -r < 0$. Dann ergibt sich

$$Il_nI = \begin{pmatrix} \pi^{-r+1}\mathbf{o_F} & \pi^{-r}\mathbf{o_F} \\ \pi^{-r+1}\mathbf{o_F} & \pi^{-r}\mathbf{o_F^*} \end{pmatrix}.$$

Für alle $g \in \Psi$ betrachtet man die vierte Komponente: Damit man Beiträge erhält, müßten a bzw. $a - \xi bA$ aus $\pi^{-r}\mathbf{o_F^*}$ sein, im Widerspruch zu $a, a - \xi bA \in \mathbf{o_F}$. Also ist niemals $g^{-1}tg \in Il_nI$ und somit das Integral $O_t^G(\mathbf{1}_{Il_nI}) = 0$.

3.Fall: Sei $n = 0$. Dann ist $Il_0I = I$. Sei $g = \mathrm{id}$. Dann ist

$$g^{-1}tg = \begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix} \in I$$

genau dann, wenn $b \in \wp_F$, also wenn $v(b) > 0$. Für $g = k_\xi$ ist

$$g^{-1}tg = \begin{pmatrix} a + bA\xi & bA \\ b(1 - A\xi^2) & a - bA\xi \end{pmatrix} \in I$$

ebenfalls gleichbedeutend mit $v(b) > 0$, also $b(1 - A\xi^2) \in \wp_F$. Für $g = \mathrm{id}$ bzw. $g = k_\xi$ ist demnach $\mathbf{1}_I(g^{-1}tg) = 1$ genau dann wenn $v(b) > 0$.
Für $g = g_m$ bzw. $g = \tilde{g}_m$ hat man

$$g^{-1}tg = \begin{pmatrix} a & (\epsilon)\pi^m bA \\ (\epsilon^{-1})\pi^{-m}b & a \end{pmatrix} \in I$$

nur wenn $-\pi^{-m}b \in \wp_F$. D.h. $\mathbf{1}_I(g^{-1}tg) = 1$ ist hier gleichbedeutend mit $v(b) > m$. Setzt man schließlich $g = g_m j$ bzw. $g = \tilde{g}_m j$, so erhält man

$$g^{-1}tg = \begin{pmatrix} a & -(\epsilon^{-1})\pi^{-m}b \\ -(\epsilon)\pi^m bA & a \end{pmatrix} \in I$$

dann und nur dann, wenn $\pi^{-m}b \in \mathbf{o_F}$. Somit ist nun $\mathbf{1}_I(g^{-1}tg) = 1$ genau dann wenn $v(b) \geq m$. Die Summationsformel für das Integral liefert jetzt, falls $v(b) > 0$,

$$\begin{aligned} O_t^G(\mathbf{1}_I) &= \frac{vol_G(I)}{vol_T(T\cap I)} + \frac{vol_G(kIk^{-1})}{vol_T(T\cap kIk^{-1})} \\ &\quad + \sum_{m=2,4,\ldots}^{2[\frac{v(b)-1}{2}]} \left(\frac{vol_G(g_mIg_m^{-1})}{vol_T(T\cap g_mIg_m^{-1})} + \frac{vol_G(\tilde{g}_mI\tilde{g}_m^{-1})}{vol_T(T\cap \tilde{g}_mI\tilde{g}_m^{-1})} \right) \\ &\quad + \sum_{m=2,4,\ldots}^{2[\frac{v(b)}{2}]} \left(\frac{vol_G(g_mjIj^{-1}g_m^{-1})}{vol_T(T\cap g_mjIj^{-1}g_m^{-1})} + \frac{vol_G(\tilde{g}_mjIj^{-1}\tilde{g}_m^{-1})}{vol_T(T\cap \tilde{g}_mjIj^{-1}\tilde{g}_m^{-1})} \right), \end{aligned}$$

also mit Hilfe von Satz 2.19:

$$\begin{aligned} O_t^G(\mathbf{1}_I) &= 2\cdot\frac{1}{q+1}\cdot\frac{q+1}{2} + \sum_{m=2,4,\ldots}^{2[\frac{v(b)-1}{2}]} 2\cdot\frac{1}{q+1}\cdot\frac{q+1}{2}q^m \\ &\quad + \sum_{m=2,4,\ldots}^{2[\frac{v(b)}{2}]} 2\cdot\frac{1}{q+1}\cdot\frac{q+1}{2}q^{m-1} \\ &= 1+q+q^2+\cdots+q^{v(b)-1} \\ &= \frac{q^{v(b)}-1}{q-1} \quad . \end{aligned}$$

Für $v(b) = 0$ ist das Integral gleich 0, weil $g^{-1}tg \in I$ dann nie erfüllt ist.

(c) Sei nun $w = j_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} IwI &= \begin{pmatrix} \mathbf{o_F^*} & \mathbf{o_F} \\ \wp_F & \mathbf{o_F^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \pi^{-n} \\ -\pi^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{o_F^*} & \mathbf{o_F} \\ \wp_F & \mathbf{o_F^*} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \pi^{-n+1}\mathbf{o_F} + \pi^n\mathbf{o_F} & \pi^{-n}\mathbf{o_F^*} + \pi^n\mathbf{o_F} \\ \pi^n\mathbf{o_F^*} + \pi^{-n+2}\mathbf{o_F} & \pi^{-n+1}\mathbf{o_F} + \pi^n\mathbf{o_F} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zu prüfen ist wieder, wann $g^{-1}tg \in IwI$ ist. Es sei daran erinnert, daß die verschiedenen $g^{-1}tg$ am Anfang dieses Beweises aufgelistet sind.

<u>1.Fall: Sei $n = 0$.</u> Dann ist

$$IjI = \begin{pmatrix} \mathbf{o_F} & \mathbf{o_F^*} \\ \mathbf{o_F^*} & \mathbf{o_F} \end{pmatrix}.$$

Für $g = \mathrm{id}$ ist $g^{-1}tg \in IjI$ nur, wenn $b \in \mathbf{o_F^*}$. Für $g = k_\xi$ ist ebenfalls $g^{-1}tg \in IjI$, genau dann wenn $v(b) = 0$. Denn $b(1-\xi^2A) \in \mathbf{o_F^*}$ bedeutet gerade $b \in \mathbf{o_F^*}$, weil

$1-\xi^2 A \in \mathbf{o}_\mathbf{F}^*$. Für $g = g_m$ bzw. $g = \tilde{g}_m$ bedeutet $g^{-1}tg \in IjI$, daß sowohl $\pi^m b \in \mathbf{o}_\mathbf{F}^*$ als auch $\pi^{-m}b \in \mathbf{o}_\mathbf{F}^*$ gelten muß; was unerfüllbar ist, da $m > 0$. Die gleiche Bedingung erhält man für $g = g_m j$ bzw. $g = \tilde{g}_m j$. Somit gilt für $v(b) = 0$ unter Verwendung der Volumina aus Satz 2.19:

$$\begin{aligned} O_t^G(\mathbf{1}_{IjI}) &= \frac{vol_G(I)}{vol_T(T\cap I)} + \frac{vol_G(jIj^{-1})}{vol_T(T\cap jIj^{-1})} + 0 \\ &= 2\cdot\frac{1}{q+1}\cdot\frac{q+1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Für $v(b) > 0$ ist das Integral gleich 0.

2.Fall: Sei $n > 0$. Dann hat man

$$Ij_nI = \begin{pmatrix} \pi^{-n+1}\mathbf{o}_\mathbf{F} & \pi^{-n}\mathbf{o}_\mathbf{F}^* \\ \pi^{-n+2}\mathbf{o}_\mathbf{F} & \pi^{-n+1}\mathbf{o}_\mathbf{F} \end{pmatrix}.$$

Für $g = \mathrm{id}$ bzw. $g = k_\xi$ liest man, damit $g^{-1}tg \in IjI$ ist, aus der zweiten Komponente ab, daß $b \in \pi^{-n}\mathbf{o}_\mathbf{F}^*$. Das ist ein Widerspruch zu $b \in \mathbf{o}_\mathbf{F}$. Im Falle $g = g_m$, bzw. $g = \tilde{g}_m$ folgt ebenfalls aus der zweiten Komponente, daß $\pi^m b \in \pi^{-n}\mathbf{o}_\mathbf{F}^*$ sein müßte, was wieder nicht möglich ist. Bisher ist also $g^{-1}tg \notin Ij_nI$. Für $g = g_m j$ bzw. $g = \tilde{g}_m j$ jedoch ist

$$g^{-1}tg = \begin{pmatrix} a & -(\epsilon^{-1})\pi^{-m}b \\ -(\epsilon)\pi^m bA & a \end{pmatrix} \in Il_nI$$

genau dann erfüllt, wenn $\pi^{-m}b \in \pi^{-n}\mathbf{o}_\mathbf{F}^*$, d.h. wenn $v(b) = m - n$. (Ist dies erfüllt, so auch die übrigen Forderungen an a und b.) Man erhält also nach Satz 2.19

$$\begin{aligned} O_t^G(\mathbf{1}_{Ij_nI}) &= 2\cdot\frac{vol_G(g_{v(b)+n}jIj^{-1}g_{v(b)+n}^{-1})}{vol_T(T\cap g_{v(b)+n}jIj^{-1}g_{v(b)+n}^{-1})} \\ &= 2\cdot\frac{1}{q+1}\cdot\frac{q+1}{2}q^{v(b)+n-1} \\ &= q^{v(b)+n-1}. \end{aligned}$$

3.Fall: Sei $n = -r < 0$. Dann ist

$$Ij_nI = \begin{pmatrix} \pi^{-r}\mathbf{o}_\mathbf{F} & \pi^{-r}\mathbf{o}_\mathbf{F} \\ \pi^{-r}\mathbf{o}_\mathbf{F}^* & \pi^{-r}\mathbf{o}_\mathbf{F} \end{pmatrix}.$$

Dann ergibt sich bei $g = \mathrm{id}$ bzw. $g = k_\xi$ für $g^{-1}tg \in Ij_nI$ in der dritten Komponente die Bedingung b bzw. $b(1-\xi^2 A) \in \pi^{-r}\mathbf{o}_\mathbf{F}^*$, im Widerspruch zu $b, b(1-\xi^2 A) \in \mathbf{o}_\mathbf{F}$. Ebenso erhält man diesmal für $g = g_m j$, bzw. $g = \tilde{g}_m j$, daß $\pi^m b \in \pi^{-r}\mathbf{o}_\mathbf{F}^*$. In diesen Fällen ist also $g^{-1}tg \notin Ij_nI$. Aber für $g = g_m$ oder $g = \tilde{g}_m$ gilt nun:

$$g^{-1}tg = \begin{pmatrix} a & (\epsilon)\pi^m bA \\ (\epsilon^{-1})\pi^{-m}b & a \end{pmatrix} \in Ij_nI$$

genau dann, wenn $\pi^{-m}b \in \pi^{-r}\mathbf{o}_\mathbf{F}^*$, also wenn $v(b) = m+n$. Somit ergibt sich das Integral diesmal zu

$$\begin{aligned} O_t^G(\mathbf{1}_{Ij_nI}) &= 2 \cdot \frac{vol_G(g_{v(b)-n} I g_{v(b)-n}^{-1})}{vol_T(T \cap g_{v(b)-n} I g_{v(b)-n}^{-1})} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{q+1} \cdot \frac{q+1}{2} q^{v(b)-n} \\ &= q^{v(b)-n}. \end{aligned}$$

2.2.2 Orbitalintegrale $O_t^G(\mathbf{1}_{IwI})$ für $t \in \tilde{T}$

Nun sollen auch noch die Orbitalintegral für $t \in \tilde{T}$ und die charakteristischen Funktionen $\mathbf{1}_{IwI}$ berechnet werden. Dies geschieht in weitestgehender Analogie zur Vorgehensweise im Fall des anderen Torus $T = T_1$.

Die Zerlegung $\tilde{T}\backslash G/I$

Satz 2.21. *Die Elemente*

$$g_m = \begin{pmatrix} \pi^{-m/2} & 0 \\ 0 & \pi^{m/2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}_m = l \cdot \begin{pmatrix} \pi^{-m/2} & 0 \\ 0 & \epsilon\pi^{m/2} \end{pmatrix},$$

$$g_m j = \begin{pmatrix} 0 & \pi^{-m/2} \\ -\pi^{m/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}_m j = l \cdot \begin{pmatrix} 0 & \pi^{-m/2} \\ -\epsilon\pi^{m/2} & 0 \end{pmatrix},$$

für $m = 0, 2, 4, 6 \ldots$ und $l \in L = F(\sqrt{A}), \epsilon \in \mathbf{o}_\mathbf{F}^* \backslash {\mathbf{o}_\mathbf{F}^*}^2$ so, daß $N(l)\epsilon = 1$, bilden ein Vertretersystem Ψ der Doppelnebenklassen $\tilde{T}\backslash G/K$.

Beweis: Man hat durch Satz 2.2(c) ein Vertretersystem Φ bestehend aus den g_m und $\tilde{g}_m$ von $\tilde{T}\backslash G/K$ gegeben und aus Lemma 2.14 weiß man, daß

$$j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad k_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix}$$

für $\xi \in \kappa_F$ ein Vertretersystem von K/I bilden. Nun ist zu prüfen, wie die Vertreter sich $g_m j$, $g_m k_\xi$ bzw. $\tilde{g}_m j$, $\tilde{g}_m k_\xi$ auf die Doppelnebenklassen $\tilde{T} g_m k I$ bzw. $\tilde{T}\tilde{g}_m k I$ verteilen. Dazu benutzt man wieder die Bijektion aus dem Beweis von Satz 1.7(b):

$$(\tilde{T} \cap gKg^{-1})/(\tilde{T} \cap gkIk^{-1}g^{-1}) \xrightarrow{\sim} A = \{xI \mid gxI \subset \tilde{T}gkI\}.$$

Zu untersuchen sind für die verschiedenen Vertreter also die Terme des Quotienten $(\tilde{T} \cap gKg^{-1})/(\tilde{T} \cap gkIk^{-1}g^{-1})$. Dabei unterscheiden sich die auftretenden Terme für $\tilde{g}_m$ und g_m nur um Faktoren $\epsilon^{\pm 1}$. Diese werden wie im vorigen Abschnitt in Klammern gesetzt, um die beiden Fälle g_m und $\tilde{g}_m$ gleichzeitig behandeln zu können.

Für den oberen Term des Quotienten hat man in Beobachtung 2.10 schon festgestellt, daß $\tilde{T} \cap g_m K g_m^{-1} = T_{m+1} = \{t = a + b\sqrt{A} | v(b) \geq m+1\}$ gilt. Gleiches gilt für $\tilde{g}_m$ statt g_m. Nun soll der untere Term des Quotienten $\tilde{T} \cap g_m k I k^{-1} g_m^{-1}$ für $m \geq 0$ betrachtet werden, zunächst für $k = j$: Gleichbedeutend zu $t \in \tilde{T} \cap g_m j I j^{-1} g_m^{-1}$ ist für $t \in \tilde{T}$:

$$j^{-1} g_m^{-1} t g_m j = \begin{pmatrix} a & -\pi^{-m-1} b(\epsilon^{-1}) \\ -\pi^{m+1} b A(\epsilon) & a \end{pmatrix} \in I.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $v(b) \geq m+1$. Also ist $\tilde{T} \cap g_m j I j^{-1} g_m^{-1} = T_{m+1}$, und in $\tilde{T} g_m j I$ liegen außer $g_m j I$ keine weiteren Nebenklassen $g_m k I$.
Sei nun $k = k_\xi$: Dann erhält man für $t \in \tilde{T} \cap g_m k_\xi I k_\xi^{-1} g_m^{-1}$ die Bedingung

$$k_\xi^{-1} g_m^{-1} t g_m k_\xi = \begin{pmatrix} a + \xi \pi^{m+1} b A(\epsilon) & \pi^{m+1} b A(\epsilon) \\ \pi^{-m-1} b(\epsilon^{-1}) - \xi^2 \pi^{m+1} b A(\epsilon) & a - \xi \pi^{m+1} b A(\epsilon) \end{pmatrix} \in I.$$

Damit diese Bedingung erfüllt ist, muß diesmal $v(b) > m+1$ gelten. Man hat also $\tilde{T} \cap g_m k_\xi I k_\xi^{-1} g_m^{-1} = T_{m+2}$. Das heißt, daß $[(\tilde{T} \cap g_m K g_m^{-1}) : (\tilde{T} \cap g_m k_\xi I k_\xi^{-1} g_m^{-1})] = [T_{m+1} : T_{m+2}] = q$, nach Lemma 2.15. Es fallen q Nebenklassen $g_m k_\xi I$ in eine Doppelnebenklasse. Sie fallen also alle zusammen: $g_m k_\xi I \subset T g_m I$ für alle $\xi \in \kappa_F$. Man hat somit bewiesen: Die $g_m, g_m j$ und $\tilde{g}_m, \tilde{g}_m j$ mit $m \in 2\mathbb{N}_0$ bilden ein vollständiges Vertretersystem von $\tilde{T} \backslash G / I$.

Benötigte Volumina

Zunächst sollen die Ergebnisse des vorigen Abschnitts über die Volumina festgehalten werden.

Satz 2.22.
(a) $vol_G(I)^{-1} = q+1$
(b) $vol_{\tilde{T}}(\tilde{T} \cap gIg^{-1})^{-1} = \frac{q+1}{2} \cdot q^{m+1}$ *für* $g = g_m$ *und* $\tilde{g}_m$.
(c) $vol_{\tilde{T}}(\tilde{T} \cap gjIj^{-1}g^{-1})^{-1} = \frac{q+1}{2} \cdot q^m$ *für* $g = g_m$ *und* $\tilde{g}_m$.

Beweis: (a) hatte man schon als Satz 2.19(a).
Zu (b): Man hat $vol_{\tilde{T}}(\tilde{T} \cap g_m I g_m^{-1})^{-1} = vol_{\tilde{T}}(\tilde{T} \cap g_m K g_m^{-1})^{-1} \cdot [(\tilde{T} \cap g_m K g_m^{-1}) : (\tilde{T} \cap g_m I g_m^{-1})]$. Der erste Faktor ist nach Satz 2.11 gleich $\frac{q+1}{2} \cdot q^m$; der zweite Faktor nach Lemma 2.15 gleich q.
Zu (c): Hier gilt $vol_{\tilde{T}}(\tilde{T} \cap gjIj^{-1}g^{-1})^{-1} = vol_{\tilde{T}}(\tilde{T} \cap g_m K g_m^{-1})^{-1} = \frac{q+1}{2} \cdot q^m$, wie man aus (b) abliest.

Auswertung der Integralformel

Die Argumentation bei der Berechnung der Orbitalintegrale überträgt sich fast wörtlich aus dem Fall des anderen Torus $T = T_1$:

Satz 2.23. *Es sei F ein lokaler Körper der Restklassencharakteristik $\neq 2$ und es sei $L = F(\sqrt{A})$ eine unverzweigte Erweiterung von F, also o.E. $A \in \mathbf{o_F^*} \backslash \mathbf{o_F^*}^2$. Sei weiter $G = \mathbf{SL}(2,F)$, $K = \mathbf{SL}(2,\mathbf{o_F})$, I die Standard-Iwahorigruppe und $\tilde{T} \cong N_L^1$ der Torus der Form*

$$\tilde{T} = \left\{ \begin{pmatrix} a & bA\pi \\ b\pi^{-1} & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a^2 - b^2 A = 1 \right\}.$$

Dann nehmen die Orbitalintegrale für reguläre $t = a + b\sqrt{A} \in \tilde{T}$ auf den Erzeugern der Iwahori-Hecke-Algebra $\mathbf{1}_{IwI}$, wobei $w \in W^{\mathrm{aff}}$, folgende Werte an:
(a) Sei $w = l_n = \begin{pmatrix} \pi^{-n} & 0 \\ 0 & \pi^n \end{pmatrix}$. Dann gilt für $n = 0$, also für $IwI = I$:

$$O^G_{t\in\tilde{T}}(\mathbf{1}_I) = \frac{q^{v(b)} - 1}{q - 1}.$$

(b) Für $n \neq 0$ ist

$$O^G_{t\in\tilde{T}}(\mathbf{1}_{Il_nI}) = 0.$$

(c) Sei $w = j_n = \begin{pmatrix} 0 & \pi^{-n} \\ -\pi^n & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &O^G_{t\in\tilde{T}}(\mathbf{1}_{Ij_0I}) = 0, \\ &O^G_{t\in\tilde{T}}(\mathbf{1}_{Ij_nI}) = q^{v(b)+n-1} \quad \textit{für } n > 0, \ \textit{bzw.} \\ &O^G_{t\in\tilde{T}}(\mathbf{1}_{Ij_nI}) = q^{v(b)-n} \quad \textit{für } n < 0. \end{aligned}$$

Beweis: Man muß noch prüfen, welche $g \in \Psi$ von Null verschiedene Beiträge zum Integral liefern. Das heißt, wann $g^{-1}tg \in IwI$ gilt. Zur Übersicht sollen die $g^{-1}tg$ auch hier noch einmal aufgelistet werden:
$g = g_m$ bzw. $\tilde{g}_m$:

$$g^{-1}tg = \begin{pmatrix} a & (\epsilon)\pi^{m+1}bA \\ (\epsilon^{-1})\pi^{-m-1}b & a \end{pmatrix}$$

$g = g_m j$ bzw. $\tilde{g}_m j$:

$$g^{-1}tg = \begin{pmatrix} a & -(\epsilon^{-1})\pi^{-m-1}b \\ -(\epsilon)\pi^{m+1}bA & a \end{pmatrix}$$

(a) und (b): Sei $w = l_n$. Dann ist

$$IwI = \begin{pmatrix} \pi^{-n}\mathbf{o_F^*} + \pi^{n+1}\mathbf{o_F} & \pi^{-n}\mathbf{o_F} + \pi^n\mathbf{o_F} \\ \pi^{-n+1}\mathbf{o_F} + \pi^{n+1}\mathbf{o_F} & \pi^{-n+1}\mathbf{o_F} + \pi^n\mathbf{o_F^*} \end{pmatrix}.$$

1. Fall: Sei $n > 0$. Dann ist

$$Il_nI = \begin{pmatrix} \pi^{-n}\mathbf{o}_\mathbf{F}^* & \pi^{-n}\mathbf{o}_\mathbf{F} \\ \pi^{-n+1}\mathbf{o}_\mathbf{F} & \pi^{-n+1}\mathbf{o}_\mathbf{F} \end{pmatrix}.$$

Um zu prüfen wann $g^{-1}tg \in Il_nI$, betrachtet man für alle $g \in \Psi$ die erste Komponente: Da $a \in \mathbf{o}_\mathbf{F}$, also insbesondere nie in $\pi^{-n}\mathbf{o}_\mathbf{F}^*$, kann nie $g^{-1}tg \in Il_nI$ gelten. Es ist also $\mathbf{1}_{Il_nI}(g^{-1}tg) = 0$, und damit ist auch $O_t^G(\mathbf{1}_{Il_nI}) = 0$.

2.Fall: Sei $n = -r < 0$. Dann ergibt sich

$$Il_nI = \begin{pmatrix} \pi^{-r+1}\mathbf{o}_\mathbf{F} & \pi^{-r}\mathbf{o}_\mathbf{F} \\ \pi^{-r+1}\mathbf{o}_\mathbf{F} & \pi^{-r}\mathbf{o}_\mathbf{F}^* \end{pmatrix}.$$

Für alle $g \in \Psi$ betrachtet man die vierte Komponente: Damit man Beiträge erhält, müßte $a \in \pi^{-r}\mathbf{o}_\mathbf{F}^*$ gelten, im Widerspruch zu $a \in \mathbf{o}_\mathbf{F}$. Somit ist das Integral $O_t^G(\mathbf{1}_{Il_nI}) = 0$.

3.Fall: Sei $n = 0$. Dann ist

$$Il_0I = I = \begin{pmatrix} \mathbf{o}_\mathbf{F}^* & \mathbf{o}_\mathbf{F} \\ \wp_F & \mathbf{o}_\mathbf{F}^* \end{pmatrix}.$$

Für $g = g_m$ bzw. $g = \tilde{g}_m$ erhält man

$$g^{-1}tg = \begin{pmatrix} a & (\epsilon)\pi^{m+1}bA \\ (\epsilon^{-1})\pi^{-m-1}b & a \end{pmatrix} \in I$$

genau dann, wenn $v(b) > m+1$. Und für $g = g_mj$ bzw. $g = \tilde{g}_mj$ ist

$$g^{-1}tg = \begin{pmatrix} a & -(\epsilon^{-1})\pi^{-m-1}b \\ -(\epsilon)\pi^{m+1}bA & a \end{pmatrix} \in I$$

gleichbedeutend mit $v(b) \geq m+1$. Demnach erhält man mit der bekannten Formel:

$$\begin{aligned} O_t^G(\mathbf{1}_I) &= \sum_{m=0,2,4,\ldots}^{2[\frac{v(b)-2}{2}]} \left(\frac{vol_G(g_mIg_m^{-1})}{vol_T(T \cap g_mIg_m^{-1})} + \frac{vol_G(\tilde{g}_mI\tilde{g}_m^{-1})}{vol_T(T \cap \tilde{g}_mI\tilde{g}_m^{-1})} \right) \\ &\quad + \sum_{m=0,2,4,\ldots}^{2[\frac{v(b)-1}{2}]} \left(\frac{vol_G(g_mjIj^{-1}g_m^{-1})}{vol_T(T \cap g_mjIj^{-1}g_m^{-1})} + \frac{vol_G(\tilde{g}_mjIj^{-1}\tilde{g}_m^{-1})}{vol_T(T \cap \tilde{g}_mjIj^{-1}\tilde{g}_m^{-1})} \right). \end{aligned}$$

Ist $v(b) = 0$, so sind diese Summen leer. Dann ist also $O_t^G(\mathbf{1}_I) = 0$. Für $v(b) > 0$ benützt man die Volumenbeiträge aus Satz 2.22, und erhält:

$$\begin{aligned} O_t^G(\mathbf{1}_I) &= 2 \cdot \sum_{m=0,2,4,\ldots}^{2[\frac{v(b)-2}{2}]} \frac{q+1}{2} \cdot q^{m+1} \cdot \frac{1}{q+1} \quad + \quad 2 \cdot \sum_{m=0,2,4,\ldots}^{2[\frac{v(b)-1}{2}]} \frac{q+1}{2} \cdot q^m \cdot \frac{1}{q+1} \\ &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{v(b)-1} \\ &= \frac{q^{v(b)} - 1}{q-1}. \end{aligned}$$

(c) Sei nun $w = j_n$. Dann ist

$$IwI = \begin{pmatrix} \pi^{-n+1}\mathbf{o_F} + \pi^n\mathbf{o_F} & \pi^{-n}\mathbf{o_F^*} + \pi^n\mathbf{o_F} \\ \pi^n\mathbf{o_F^*} + \pi^{-n+2}\mathbf{o_F} & \pi^{-n+1}\mathbf{o_F} + \pi^n\mathbf{o_F} \end{pmatrix}.$$

1.Fall: Sei $n = 0$. Dann ist

$$IjI = \begin{pmatrix} \mathbf{o_F} & \mathbf{o_F^*} \\ \mathbf{o_F^*} & \mathbf{o_F} \end{pmatrix}.$$

Damit $g^{-1}tg \in IjI$, muß für $g = g_m, \tilde{g}_m$ aufgrund des zweiten Eintrags in $g^{-1}tg$ gelten: $\pi^{m+1}bA(\epsilon) \in \mathbf{o_F^*}$, im Widerspruch zu $bA(\epsilon) \in \mathbf{o_F}$. Für $g = g_m j, \tilde{g}_m j$ erhält man denselben Widerspruch, wenn man die dritte Komponente betrachtet. Also ist $O_t^G(\mathbf{1}_{IjI}) = 0$ für beliebige $t \in \tilde{T}$.

2.Fall: Sei $n > 0$. Dann hat man

$$Ij_nI = \begin{pmatrix} \pi^{-n+1}\mathbf{o_F} & \pi^{-n}\mathbf{o_F^*} \\ \pi^{-n+2}\mathbf{o_F} & \pi^{-n+1}\mathbf{o_F} \end{pmatrix}.$$

Für $g^{-1}tg \in Ij_nI$ erhält man jetzt mit $g = g_m, \tilde{g}_m$ aus dem zweiten Eintrag die unerfüllbare Bedingung $\pi^{m+1}bA(\epsilon) \in \pi^{-n}\mathbf{o_F^*}$. Aber mit $g = g_m j, \tilde{g}_m j$ kann die Bedingung erfüllt werden, denn es muß gelten: $-\pi^{-m-1}b(\epsilon^{-1}) \in \pi^{-n}\mathbf{o_F^*}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $v(b) = m - n + 1$. Somit ergibt sich für das Orbitalintegral mit Hilfe von Satz 2.22:

$$\begin{aligned} O_t^G(\mathbf{1}_{Ij_nI}) &= 2 \cdot \frac{1}{q+1} \cdot \frac{q+1}{2} \cdot q^{v(b)+n-1} \\ &= q^{v(b)+n-1}. \end{aligned}$$

3.Fall: Sei $n = -r < 0$. Dann ist

$$Ij_nI = \begin{pmatrix} \pi^{-r}\mathbf{o_F} & \pi^{-r}\mathbf{o_F} \\ \pi^{-r}\mathbf{o_F^*} & \pi^{-r}\mathbf{o_F} \end{pmatrix}.$$

Wieder muß man prüfen, wann $g^{-1}tg \in Ij_nI$. Dafür erhält man mit $g = g_m j, \tilde{g}_m j$ einen Widerspruch in der dritten Komponente: $-\pi^{m+1}bA(\epsilon) \in \pi^{-r}\mathbf{o_F^*}$. Mit $g = g_m, \tilde{g}_m$ jedoch hat man die Bedingung erfüllt, wenn $\pi^{-m-1}b(\epsilon^{-1}) \in \pi^{-r}\mathbf{o_F^*}$ gilt, also wenn $v(b) = n + m + 1$. Somit ergibt sich hier das Orbitalintegral zu:

$$\begin{aligned} O_t^G(\mathbf{1}_{Ij_nI}) &= 2 \cdot \frac{1}{q+1} \cdot \frac{q+1}{2} \cdot q^{v(b)-n} \\ &= q^{v(b)-n}. \end{aligned}$$

2.2.3 Zusammenfassung

Als wichtigstes Ergebnis dieses Kapitels wird festgehalten:
Wie man aus den Sätzen 2.20 und 2.23 entnimmt, ist das Orbitalintegral

$$O_t^G(\mathbf{1}_I) = \frac{q^{v(b)} - 1}{q - 1}$$

für die beiden nicht konjugierten Einbettungen T_1 und T_π des Zentralisators T des Elements $t = a + b\sqrt{A}$, $b \neq 0$, in die $\mathbf{SL}(2,F)$ gleich. Es definiert somit ein stabiles Orbitalintegral, d.h. eines, das unabhängig von der Wahl des maximalen Torus ist.

Kapitel 3

Integrale für die $\mathbf{GSp}(4, F)$

Im folgenden sollen weitere Orbitalintegrale berechnet werden. Dazu sei weiterhin F ein lokaler Körper der Restklassencharakteristik ungleich 2. Die zugrunde liegende Gruppe sei nun die generelle symplektische Gruppe $G = \mathbf{GSp}(4, F)$. Es gilt also für $g \in G$:

$$g^T \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix} g = \lambda(g) \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch $K := \mathbf{GSp}(4, \mathbf{o_F})$ wird eine maximal kompakte Untergruppe von G definiert. Es sei $I \leq K \leq G$ die Iwahorigruppe

$$I = \mathbf{GSp}(4, \mathbf{o_F}) \cap \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ \wp_F & * & * & * \\ \wp_F & \wp_F & * & \wp_F \\ \wp_F & \wp_F & * & * \end{pmatrix} \right\}$$

Insbesondere muß für ein Element aus I gelten, daß alle seine Diagonalelemente in $\mathbf{o_F^*}$ liegen. Desweiteren sei H die Untergruppe von $G = \mathbf{GSp}(4, F)$ bestehend aus den Elementen der Form

$$(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 \\ \gamma_1 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix},$$

definiert durch Elemente

$$h_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

aus $\mathbf{GL}(2, F)$ mit der Eigenschaft $\det h_1 = \det h_2$. Die Gruppe H ist also isomorph zur Gruppe $(\mathbf{GL}(2, F) \times \mathbf{GL}(2, F))^0$, wobei der Exponent 0 die Determinantenbedingung andeuten soll. Diese Isomorphie wird im folgenden sehr oft ausgenutzt, und deshalb werden die beiden Gruppen meist miteinander identifiziert.
Nun sei $L = F(\sqrt{A})$ wieder eine unverzweigte quadratische Erweiterung von F und ohne Einschränkung $v(A) = 0$. Der Torus

$$T = (L^* \times L^*)^0 = \{(t_1, t_2) \in L^* \times L^* \mid \operatorname{Norm} t_1 = \operatorname{Norm} t_2\}$$

kann in H bzw. G eingebettet werden, und sein Bild definiert einen maximalen Torus von G. Für $\theta \in F$ bezeichne $\phi_{\theta^2 A}$ die Einbettung von L^* in $\mathbf{GL}(2,F)$, die $t = a + b\sqrt{A} \in L^*$ abbildet auf

$$\phi_{\theta^2 A}(t) = \begin{pmatrix} a & \theta bA \\ b\theta^{-1} & a \end{pmatrix}.$$

Unter den Einbettungen $(\phi_{\theta_1^2 A}, \phi_{\theta_2^2 A})$ von T in G gibt es genau zwei in G nichtkonjugierte Klassen maximaler Tori. Diese werden repräsentiert durch (ϕ_A, ϕ_A) und $(\phi_A, \phi_{\pi^2 A})$. Kommt es auf eine Unterscheidung der Einbettungen nicht an, so wird das Bild von T in G wieder mit T bezeichnet.
Bevor zur Betrachtung des Orbitalintegrals übergegangen wird, hier noch einige oft benutzte Bezeichnungen: Für entsprechende Gruppen der Dimension 2 schreibt man z.B. $K(2,F) = \mathbf{GL}(2, \mathbf{o_F})$. Dies ist eine maximal kompakte Untergruppe der $\mathbf{GL}(2,F)$. Genauso bezeichnet $I(2,F)$ eine ihrer Iwahorigruppen, die Gruppe der modulo $\wp_F$ oberen Dreicksmatrizen. Weiter sei

$$K_0 := H \cap K = (K(2, \mathbf{o_F}) \times K(2, \mathbf{o_F}))^0,$$

$$I_0 := H \cap I = (I(2,F) \times I(2,F))^0 \quad \text{und}$$

$$\mathbf{o_T} := (\mathbf{o_L^*} \times \mathbf{o_L^*})^0 \subset T.$$

Nun sei $\eta = (s, s') = (a + b\sqrt{A}, a' + b'\sqrt{A}) \in \mathbf{o_T} \subset T$. Hier soll das Orbitalintegral

$$O_\eta^G(\mathbf{1}_I) = \int_{T\backslash G} \mathbf{1}_I(g^{-1}\eta g)\, d\dot{g}$$

berechnet werden. Dazu führt man es der Methode in [W2] folgend auf Orbitalintegrale über H zurück: Es seien

$$G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H v_i I, \quad H = \bigcup_{j \in J} T h_j$$

disjunkte Zerlegungen von G und H. Dann ist auch

$$G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}, j \in J_i} T h_j v_i I$$

eine disjunkte Zerlegung von G für gewisse $J_i \subset J$, und aus Satz 1.7 weiß man

$$O_\eta^G(\mathbf{1}_I) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_i} \frac{vol_G(h_j v_i I v_i^{-1} h_j^{-1})}{vol_T(T \cap h_j v_i I v_i^{-1} h_j^{-1})} \cdot \mathbf{1}_I(v_i^{-1} h_j^{-1} \eta h_j v_i).$$

Nun ist für alle $i \in \mathbb{N}$

$$H v_i I = \bigcup_{j \in J_i} T h_j v_i I,$$

also

$$H = \bigcup_{j\in J_i} Th_j(v_i I v_i^{-1} \cap H).$$

Daraus sieht man:

$$O_\eta^H(\mathbf{1}_{H\cap v_i I v_i^{-1}}) = \sum_{j\in J_i} \frac{vol_H(H\cap v_i I v_i^{-1})}{vol_T(T\cap h_j v_i I v_i^{-1} h_j^{-1})} \cdot \mathbf{1}_I(v_i^{-1}h_j^{-1}\eta h_j v_i),$$

und man erhält

$$O_\eta^G(\mathbf{1}_I) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{vol_G(I)}{vol_H(H\cap v_i I v_i^{-1})} O_\eta^H(\mathbf{1}_{H\cap v_i I v_i^{-1}}).$$

Desweiteren gilt mit einem Vertretersystem $\{r_l\}$ von $T\backslash H/I_0$:

$$\int_H f(h)\ dh = \sum_l vol_T(T\cap r_l I_0 r_l^{-1})^{-1} \int_T \int_{I_0} f(t r_l k)\ dk\ dt,$$

also

$$\int_{T\backslash H} f(h)\ d\dot{h} = \sum_l vol_T(T\cap r_l I_0 r_l^{-1})^{-1} \int_{I_0} f(r_l k)\ dk.$$

Da das Integral auf G invariant unter inneren Automorphismen ist, kann man $H\cap v_i I v_i^{-1}$ durch irgendeine in G konjugierte Untergruppe ersetzten, ohne den Wert des Integrals zu verändern. Es sei nun angenommen, daß ein $g = g(i) \in G$ existiert, so daß $g(H\cap v_i I v_i^{-1})g^{-1} \subset I_0$.
Aus später verständlichen ästhetischen Gründen normiert man die Haarschen Maße so, daß gilt:

$vol_G(K) = \frac{1}{2}(q+1)$,

$vol_H(K_0) = 1$ und

$vol_T(\mathbf{o_T}) = 1$.

Damit erhält man eine handhabbare Form des Orbitalintegrals:

$$O_\eta^G(\mathbf{1}_I) = \frac{1}{2}(q^2+1)\sum_i \frac{[K_0 : I_0][I_0 : I_i]}{[K : I]} \sum_l [\mathbf{o_T} : (T\cap I_i)] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_i}((r_l k)^{-1}\eta r_l k)\ dk.$$

Die Berechnung des Orbitalintegrals $O_\eta^G(\mathbf{1}_I)$ gliedert sich also in die Schritte:

- Bestimmung eines Vertretersystems von $H\backslash G/I$
- Finden von Injektionen $H\cap v_i I v_i^{-1} \hookrightarrow I_0$
- Bestimmung eines Vertretersystems von $T\backslash H/I_0$
- Bestimmung der Integrale $\int_{I_0} \mathbf{1}_{I_i}((r_l k)^{-1}\eta r_l k)\ dk$
- Summation über alle diese Komponenten

3.1 Die Zerlegung $H\backslash G/I$

Nach M. Schröder (s. [W3], S. 2) hat man ein System von Doppelnebenklassenvertretern von

$$H\backslash G/K,$$

wobei K die maximal kompakte Untergruppe $\mathbf{GSp}(4,\mathbf{o_F})$ bezeichnet. Es wird gebildet von der Identität und den Elementen r_i, $i \in \mathbb{N}$ der Form

$$r_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pi^{-i} \\ 0 & 1 & \pi^{-i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Vereinfachung wird im folgenden oft $r_0 = id$ gesetzt.
Um daraus ein Vertretersystem von $H\backslash G/I$ zu erhalten, muß man die Restklassenbildung verfeinern und benötigt zunächst ein Vertretersystem von K/I. Wieder genügt es, alles modulo $\wp_F$ zu betrachten. Man sucht also Vertreter von $G(\mathbb{F}_q)/B(\mathbb{F}_q)$. Dabei ist $\kappa_F \cong \mathbb{F}_q$, $G(\mathbb{F}_q) = \mathbf{GSp}(4,\mathbb{F}_q)$ und $B(\mathbb{F}_q)$ die Borelgruppe, das heißt die Gruppe der Matrizen aus $\mathbf{GSp}(4,\mathbb{F}_q)$ der Form

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & \lambda A^{T-1} \end{pmatrix},$$

mit einer oberen Dreiecksmatrix A und einer Matrix C so, daß

$$C^T A^{T-1} - A^{-1}C = 0.$$

Für $G(\mathbb{F}_q)$ hat man die Bruhat-Tits-Zerlegung

$$G(\mathbb{F}_q) = \bigcup_{w \in W} B(\mathbb{F}_q) w B(\mathbb{F}_q).$$

Die disjunkte Vereinigung läuft über die affine Weylgruppe W, dem semidirekten Produkt der sphärischen Weylgruppe W^0, die isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist, und einer zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ isomorphen Translationsgruppe S. Insbesondere wird W von einer Spiegelung $s_1 \in W^0$ und einer Translation $s_2 \in S$ erzeugt. Man wählt für W die Einbettung

$$s_1 \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$s_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die übrigen 5 nichttrivialen Elemente von W erhält man dann durch Multiplikation. Es sind s_1s_2, s_2s_1, $s_1s_2s_1$, $s_2s_1s_2$ und $s_1s_2s_1s_2$. Durch die Bruhat-Tits-Zerlegung

spalten sich die Nebenklassen $G(\mathbb{F}_q)$ nach $B(\mathbb{F}_q)$ auf in die der Zellen $B(\mathbb{F}_q)wB(\mathbb{F}_q)$, für die schon früher (vgl. Beweis zu Satz 1.7 (b)) die Bijektion

$$\begin{array}{rcl} B(\mathbb{F}_q)wB(\mathbb{F}_q)/B(\mathbb{F}_q) & \longrightarrow & B(\mathbb{F}_q)/(B(\mathbb{F}_q)\cap wB(\mathbb{F}_q)w^{-1}) \\ xwB(\mathbb{F}_q) & \longmapsto & x(B(\mathbb{F}_q)\cap wB(\mathbb{F}_q)w^{-1}) \end{array}$$

gefunden wurde. Diese wertet man für alle nichttrivialen Elemente von W aus:

Sei $\underline{w = s_1}$: $s_1B(\mathbb{F}_q)s_1^{-1}$ ergibt sich als die Untergruppe von $G(\mathbb{F}_q)$ der Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

wobei A eine untere Dreiecksmatrix, B eine obere Dreiecksmatrix ist. Also sind die Matrizen in $B(\mathbb{F}_q)\cap s_1B(\mathbb{F}_q)s_1^{-1}$ der Gestalt

$$\begin{pmatrix} D & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

(D sei eine Diagonalmatrix), so daß man für $B(\mathbb{F}_q)/(B(\mathbb{F}_q)\cap s_1B(\mathbb{F}_q)s_1^{-1})$ Vertreter

$$x_{s_1}(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix},$$

$a \in \mathbb{F}_q$, wählen kann. Die Vertreter von $B(\mathbb{F}_q)s_1B(\mathbb{F}_q)/B(\mathbb{F}_q)$ ergeben sich dann als $x_{s_1}(a)s_1$:

$$x_{s_1}(a)s_1 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}.$$

Sei $\underline{w = s_2}$. Hier besteht $s_2B(\mathbb{F}_q)s_2^{-1}$ aus den Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix},$$

also $B(\mathbb{F}_q)\cap s_2B(\mathbb{F}_q)s_2^{-1}$ aus Matrizen

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & \lambda A^{T-1} \end{pmatrix},$$

wobei A eine obere Dreiecksmatrix ist und C eine Dreiecksmatrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}.$$

Demnach erhält man als Vertreter für $B(\mathbb{F}_q)/(B(\mathbb{F}_q) \cap s_2 B(\mathbb{F}_q) s_2^{-1})$

$$x_{s_2}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$a \in \mathbb{F}_q$. Also sind die Vertreter von $(B(\mathbb{F}_q)s_2(B(\mathbb{F}_q)/(B(\mathbb{F}_q)$ die

$$x_{s_2}(a)s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei $\underline{w = s_1 s_2}$, d.h.

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrizen in $wB(\mathbb{F}_q)w^{-1}$ haben die Gestalt

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

und damit müssen die Elemente aus $B(\mathbb{F}_q) \cap wB(\mathbb{F}_q)w^{-1}$ von der Form

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & \lambda A^{T-1} \end{pmatrix}$$

sein, wobei A eine untere Dreiecksmatrix ist und C eine Dreiecksmatrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Und damit erhält man Vertreter

$$x_{s_1 s_2}(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix},$$

$a,b \in \mathbb{F}_q$, von $B(\mathbb{F}_q)/(B(\mathbb{F}_q) \cap wB(\mathbb{F}_q)w^{-1})$. Die Vertreter von $B(\mathbb{F}_q)wB(\mathbb{F}_q)/B(\mathbb{F}_q)$ sind dann

$$x_{s_1s_2}(a,b)s_1s_2 = \begin{pmatrix} a & b & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei $\underline{w = s_2s_1}$:

$$s_2s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt in $wB(\mathbb{F}_q)w^{-1}$ Matizen der Form

$$\begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix},$$

und damit können die Elemente von $B(\mathbb{F}_q) \cap wB(\mathbb{F}_q)w^{-1}$ nur das folgende Aussehen haben:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

So daß man für $B(\mathbb{F}_q)/B(\mathbb{F}_q) \cap wB(\mathbb{F}_q)w^{-1}$ die Vertreter

$$x_{s_2s_1}(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$a,b \in \mathbb{F}_q$, erhält, also für $B(\mathbb{F}_q)wB(\mathbb{F}_q)/B(\mathbb{F}_q)$ die Vertreter

$$x_{s_2s_1}(a,b)s_2s_1 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $\underline{w = s_1s_2s_1}$,

$$s_1s_2s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Elemente von $wB(\mathbb{F}_q)w^{-1}$ sind von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

somit sind die Elemente von $B(\mathbb{F}_q) \cap wB(\mathbb{F}_q)w^{-1}$ von der Form

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Damit ergeben sich Nebenklassenvertreter von $B(\mathbb{F}_q)/(B(\mathbb{F}_q) \cap wB(\mathbb{F}_q)w^{-1})$ als

$$x_{s_1s_2s_1}(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix},$$

$a, b, c \in \mathbb{F}_q$. Dem entsprechend berechnen sich die Vertreter von $B(\mathbb{F}_q)wB(\mathbb{F}_q)/B(\mathbb{F}_q)$ zu

$$x_{s_1s_2s_1}(a,b,c)s_1s_2s_1 = \begin{pmatrix} b & a & -1 & c \\ c & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei $\underline{w = s_2s_1s_2}$,

$$s_2s_1s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann hat man in $wB(\mathbb{F}_q)w^{-1}$ nur Matrizen, die aussehen wie

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix},$$

mit einer oberen Dreiecksmatrix A und einer unteren Dreiecksmatrix B. Folglich dürfen in $B(\mathbb{F}_q) \cap wB(\mathbb{F}_q)w^{-1}$ nur Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \lambda A^{T-1} \end{pmatrix},$$

A wie oben, liegen, und es ergeben sich Vertreter von $B(\mathbb{F}_q)/(B(\mathbb{F}_q)\cap wB(\mathbb{F}_q)w^{-1})$ als

$$x_{s_2s_1s_2}(a,b,c)=\begin{pmatrix}1&0&b&a\\0&1&a&c\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$a,b,c\in\mathbb{F}_q$. Daraus erhält man die Vertreter

$$x_{s_2s_1s_2}(a,b,c)s_2s_1s_2=\begin{pmatrix}a&b&0&-1\\c&a&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

von $B(\mathbb{F}_q)wB(\mathbb{F}_q)/B(\mathbb{F}_q)$.

Sei schließlich $\underline{w=s_1s_2s_1s_2}$,

$$s_1s_2s_1s_2=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Die Elemente von $wB(\mathbb{F}_q)w^{-1}$ haben die Gestalt

$$\begin{pmatrix}A&0\\C&B\end{pmatrix},$$

wobei diesmal A eine untere Dreiecksmatrix, B eine obere Dreiecksmatrix ist. Dann dürfen die Elemente in $B(\mathbb{F}_q)\cap wB(\mathbb{F}_q)w^{-1}$ nur Diagonalmatrizen sein:

$$\begin{pmatrix}D&0\\0&D\end{pmatrix}.$$

Damit ergeben sich Vertreter von $B(\mathbb{F}_q)/(B(\mathbb{F}_q)\cap wB(\mathbb{F}_q)w^{-1})$ von der Form

$$x_{s_1s_2s_1s_2}(a,b,c,d)=\begin{pmatrix}1&-d&a&b\\0&1&b+cd&c\\0&0&1&0\\0&0&d&1\end{pmatrix},$$

$a,b,c,d\in\mathbb{F}_q$, also Vertreter von $B(\mathbb{F}_q)wB(\mathbb{F}_q)/B(\mathbb{F}_q)$:

$$x_{s_1s_2s_1s_2}(a,b,c,d)s_1s_2s_1s_2=\begin{pmatrix}a&b&-1&d\\b+cd&c&0&-1\\1&0&0&0\\d&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Mit den $q^4+2q^3+2q^2+2q+1=(q^2+1)(q+1)^2$ Elementen $x_w w$, $w\in W$, hat man ein Vertretersystem von $K=\mathbf{GSp}(4,\mathbf{o_F})$ nach der Iwahorigruppe I gefunden. Daraus erhält man Vertreter der Doppelnebenklassen $H\backslash G/I$, indem man mit dem Vertretersystem r_i, $i\in\mathbb{N}_0$, der Doppelnebenklassen $H\backslash G/K$ multipliziert. Von den dadurch erhaltenen Vertretern liegen jedoch viele in derselben Doppelnebenklasse:

Satz 3.1. *Das Vertretersystem der Doppelnebenklassen $H\backslash G/I$ spaltet sich auf in vier Ausnahmeklassen vertreten durch*

$$v_{00}=\mathrm{id},\quad v_{01}=s_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$v_{02}=x_{s_1}(1)s_1=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix},\ v_{03}=x_{s_1s_2}(1,0)s_1s_2=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-1&1&0\end{pmatrix},$$

und in vier generische Familien für $i=1,2,3,\ldots$:

$$v_{i0}=r_i=\begin{pmatrix}1&0&0&\pi^{-i}\\0&1&\pi^{-i}&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ v_{i1}=r_is_2=\begin{pmatrix}1&\pi^{-i}&0&0\\0&0&\pi^{-i}&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$v_{i2}=r_is_2s_1=\begin{pmatrix}\pi^{-i}&1&0&0\\0&0&-1&\pi^{-i}\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ v_{i3}=r_is_2s_1s_2=\begin{pmatrix}\pi^{-i}&0&0&-1\\0&\pi^{-i}&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Bemerkung 3.2. *Es überrascht, daß die Klassen sich nicht für alle i in dieselben Familien aufspalten, denn die von M.Schröder gefundenen Doppelnebenklassenvertreter r_i würden dies nahelegen, definiert doch*

$$\tilde{r}_0=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

die Klasse der Identität: $H\tilde{r}_0I=H\,\mathrm{id}\,I$. Wie man jedoch aus dem untenstehenden Beweis ablesen kann, wird bei den generischen Familien intensiv ausgenutzt, daß π^i in $\wp_F$ liegt. Dies impliziert den Sonderfall $i=0$. Es erklärt jedoch nicht, weshalb die Zerlegung innerhalb dieses Ausnahmefalls derart zerrissen ist, daß nicht einmal ganze Vertreterfamilien $x_w(a,b,c,d)w$ geschlossen bleiben. Einige Einsicht in dieses Verhalten könnte die Zellmultiplikationsregel geben: Ist sw ein längeres Wort als w, also $l(sw)>l(w)$, so gilt

$$IsI\cdot IwI=IswI.$$

Insbesondere gilt für die Mächtigkeiten

$$\sharp(IswI) = \sharp(IsI/I) \cdot \sharp(IwI/I).$$

Da natürlich $x_s s x_w w I \subset IswI$*, bilden die Produkte* $x_s s x_w w$ *der Vertreter von* IsI/I *und* IwI/I *ein Vertretersystem von* $IswI/I$*. Ist nun* $s \in W$ *ein Element so, daß* $H \,\mathrm{id}\, I = H x_s s I$*, so gilt wann immer* $HwI = Hw'I$ *auch* $HwI = Hx_s sw'I$*. Jedoch wurde die Zellmultiplikationsregel schon bei der Darstellung der* $x_w(a,b,c,d)w$ *nicht benutzt, weil sie für die weitere Rechnung äußerst unbequeme Abhängigkeiten in den Variablen von* x_w *erzeugt.*
Die Zerlegung in die vier Klassen für $i > 0$ *ist einsichtiger, schon weil hier alle Familien* $x_w w$ *zusammenbleiben (s. Beweis). Dann ist es ein leichtes zu sehen, daß* $Hr_iI = Hr_is_1I$ *und somit* $Hr_iwI = Hr_is_1w'I$ *gilt, wann immer* $Hr_iwI = Hr_iw'I$ *gegeben ist.*

Der Beweis von Satz 3.1

Um dieses Vertretersystem zu überprüfen, muß man untersuchen, wann zwei der gefundenen Vertreter dieselbe Nebenklasse definieren, also wann

$$Hr_i x_w w I = Hr_i x_{w'} w' I$$

erfüllt ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn ein $h \in H$ existiert, so daß

$$(x_w w)^{-1} r_i^{-1} h r_i x_{w'} w' \in I.$$

Dieses Argument wird nun auf alle Vertreter angewand:

Der Ausnahmefall $i = 0$

Zunächst wird gezeigt, daß die Doppelnebenklassen, die zu den vier in Satz 3.1 angegebenen Vertretern v_{0j} gehören, wirklich disjunkt sind: Es gilt nämlich für

$$h = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 \\ \gamma_1 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix} \in H :$$

$$h x_{s_1}(a) s_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 a & \alpha_1 & 0 & \beta_1 \\ \alpha_2 & 0 & \beta_2 & -\beta_2 a \\ \gamma_1 a & \gamma_1 & 0 & \delta_1 \\ \gamma_2 & 0 & \delta_2 & -\delta_2 a \end{pmatrix} \notin I,$$

weil die Einträge (22) und (33) nicht in $\mathbf{o}_\mathbf{F}^*$ liegen. Ebenso erhält man

$$h x_{s_1 s_2}(1,0) s_1 s_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & -\alpha_1 \\ \alpha_2 & -\beta_2 & \beta_2 & 0 \\ \gamma_1 & \delta_1 & 0 & -\gamma_1 \\ \gamma_2 & -\delta_2 & \delta_2 & 0 \end{pmatrix} \notin I.$$

Also sind diese Vertreter nicht in $H\,\mathrm{id}\,I$. Weiter ist

$$s_1^{-1}hx_{s_1}(1)s_1 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & \beta_2 & -\beta_2 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & 0 & \beta_1 \\ \gamma_2 & 0 & \delta_2 & -\delta_2 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 0 & \delta_1 \end{pmatrix} \notin I,$$

weil aus dem Eintrag (33) folgen würde, daß $\delta_2 \in \mathbf{o}_\mathbf{F}^*$, aber aus (34), daß $\delta_2 \in \wp_F$, und

$$s_1^{-1}hx_{s_1s_2}(1,0)s_1s_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & -\beta_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 0 & -\alpha_1 \\ \gamma_2 & -\delta_2 & \delta_2 & 0 \\ \gamma_1 & \delta_1 & 0 & -\gamma_1 \end{pmatrix} \notin I,$$

weil dafür $\delta_2 \in \mathbf{o}_\mathbf{F}^*$ und $\delta_2 \in \wp_F$ gelten müßte. Analog erhält man

$$(x_{s_1}(1)s_1)^{-1}hx_{s_1s_2}(1,0)s_1s_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & -\beta_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_1-\alpha_2 & \beta_1+\beta_2 & -\beta_2 & -\alpha_1 \\ \gamma_1+\gamma_2 & \delta_1-\delta_2 & \delta_2 & -\gamma_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 & 0 & -\gamma_1 \end{pmatrix} \notin I,$$

weil $\gamma_1 \in \mathbf{o}_\mathbf{F}^* \cap \wp_F$ nicht erfüllt werden kann. Also sind auch die Klassen Hs_1I, $Hx_{s_1}(1)s_1$ und $Hx_{s_1s_2}(1,0)s_1s_2I$ disjunkt.

Nun werden die übrigen Klassen auf diese vier disjunkten aufgeteilt:

Klassen, die mit $\underline{H\,\mathrm{id}\,I}$ zusammenfallen:
In die Klasse $H\,\mathrm{id}\,I$ liegen noch die Vertreter $x_2(a)s_2$ und $x_{s_1s_2s_1}(0,b,0)s_1s_2s_1$ sowie $x_{s_1s_2s_1s_2}(a,0,c,0)s_1s_2s_1s_2$, denn:

$$x_{s_2}(a)s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist offensichtlich in H, ebenso

$$x_{s_1s_2s_1}(0,b,0)s_1s_2s_1 = \begin{pmatrix} b & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$$

und

$$x_{s_1s_2s_1s_2}(a,0,c,0) = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 & 0 \\ 0 & c & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in H.$$

Es liegen also $1+q+q+q^2=(q+1)^2$ der $x_w w$ in $H\,\mathrm{id}\,I$.

Klassen, die mit $\underline{Hs_1I}$ zusammenfallen:
In die Klasse $\underline{Hs_1I}$ fallen die Vertreter $x_{s_1s_2}(0,b)s_1s_2$ und $x_{s_2s_1}(0,b)s_2s_1$ sowie $x_{s_2s_1s_2}(0,b,c)s_2s_1s_2$. Insgesamt sind das $1+2q+q^2=(q+1)^2$ der $x_w w$: Mit

$$h=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&-b&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\in H$$

ist nämlich

$$s_1^{-1}hx_{s_1s_2}(0,b)s_1s_2=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\in I,$$

und für

$$h=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&-b\end{pmatrix}\in H$$

hat man

$$s_1^{-1}hx_{s_2s_1}(0,b)s_2s_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\in I.$$

Außerdem erhält man mit

$$h=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&-b&0\\0&1&0&-c\end{pmatrix}\in H:$$

$$s_1^{-1}hx_{s_2s_1s_2}(0,b,c)s_2s_1s_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\in I.$$

Klassen, die mit $\underline{Hx_{s_1}(1)s_1I}$ zusammenfallen:
In $Hx_{s_1}(1)s_1I$ liegen die Vertreter $x_{s_1}(a)s_1$ für $a\neq 0$, $x_{s_2s_1}(a,b)s_2s_1$ für $a\neq 0$, $x_{s_1s_2s_1}(0,b,c)s_1s_2s_1$ fur $c\neq 0$ und $x_{s_1s_2s_1s_2}(a,0,c,d)s_1s_2s_1s_2I$ mit $d\neq 0$, das sind

insgesamt $(q-1)+2q(q-1)+q^2(q-1)=(q+1)^2(q-1)$ der $x_w w$. Man erhält nämlich für $a\neq 0$ mit

$$h=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\in H:$$

$$(x_{s_1}(1)s_1)^{-1}hx_{s_1}(a)s_1=\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&a\end{pmatrix}\in I.$$

Sowie mit

$$h=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&a\\0&0&a&0\\0&-1&0&b\end{pmatrix}\in H:$$

$$(x_{s_1}(1)s_1)^{-1}hx_{s_1}(a)s_1=\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&a\end{pmatrix}\in I$$

und für $c\neq 0$ findet man mit

$$h=\begin{pmatrix}0&0&c&0\\0&1&0&0\\1&0&-b&0\\0&0&0&-c\end{pmatrix}\in H,$$

daß

$$(x_{s_1}(1)s_1)^{-1}hx_{s_1s_2s_1}(0,b,c)s_1s_2s_1=\begin{pmatrix}c&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&-1&c\end{pmatrix}\in I.$$

Und setzt man falls $d\neq 0$

$$h=\begin{pmatrix}0&0&d&0\\0&0&0&1\\1&0&-a&0\\0&d&0&-cd\end{pmatrix}\in H,$$

so erhält man

$$(x_{s_1}(1)s_1)^{-1}hx_{s_1s_2s_1s_2}(a,0,c,d)s_1s_2s_1s_2=\begin{pmatrix}d&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&-1&d\end{pmatrix}\in I.$$

Klassen, die mit $\underline{Hx_{s_1s_2}(1,0)s_1s_2I}$ zusammenfallen:
Schließlich sind jeweils für $a \neq 0$ die Vertreter $x_{s_1s_2}(a,b)s_1s_2$ und $x_{s_1s_2s_1}(a,b,c)s_1s_2s_1$ sowie $x_{s_2s_1s_2}(a,b,c)s_2s_1s_2$ in $Hx_{s_1s_2}(1,0)s_1s_2I$ enthalten, ebenso wie für $b \neq 0$ die Vertreter $x_{s_1s_2s_1s_2}(a,b,c,d)s_1s_2s_1s_2$: Denn wenn $a \neq 0$, dann findet man

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H,$$

so daß

$$(x_{s_1s_2}(1,0)s_1)^{-1}hx_{s_1s_2}(a,b)s_1s_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in I.$$

Desweiteren ist dann für

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^{-1} \\ 1 & 0 & -b & 0 \\ 0 & -a & 0 & -c \end{pmatrix} \in H$$

das Produkt

$$(x_{s_1s_2}(1,0)s_1)^{-1}hx_{s_1s_2s_1}(a,b,c)s_1s_2s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a^{-1} \\ 0 & a & -1 & c \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^{-1} \end{pmatrix} \in I.$$

Setzt man

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -c \end{pmatrix} \in H,$$

so erhält man

$$(x_{s_1s_2}(1,0)s_1)^{-1}hx_{s_2s_1s_2}(a,b,c)s_2s_1s_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in I.$$

Zuletzt findet man noch falls $b \neq 0$

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -c \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & d & 0 & -(b+cd) \end{pmatrix} \in H,$$

für das

$$(x_{s_1s_2}(1,0)s_1s_2)^{-1}hx_{s_1s_2s_1s_2}(a,b,c,d)s_1s_2s_1s_2 = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & -1 \\ 0 & b & -1 & d \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in I.$$

Das heißt in $Hx_{s_1s_2}(1,0)s_1s_2I$ liegen $q(q-1)+2q^2(q-1)+q^3(q-1) = q^4+q^3-q^2-q$ der Vertreter $x_w w$. Summiert man die Anzahl aller behandelten Vertreter auf, so erhält man $(q^2+1)(q+1)^2$ Stück, d.h. man hat alle auftretenden Nebenklassenvertreter verteilt.

Der generische Fall $i > 0$

Sei nun $i > 0$. Die vier Klassen $Hr_iI, Hr_is_2I, Hr_is_2s_1I$ und $Hr_is_2s_1s_2I$ sind disjunkt. Es gilt nämlich:

$$r_i^{-1}hr_is_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & (\alpha_1-\delta_2)\pi^{-i} & \beta_1-\gamma_2\pi^{-2i} & \gamma_2\pi^{-i} \\ -\gamma_1\pi^{-i} & \beta_2-\gamma_1\pi^{-2i} & (\alpha_2-\delta_1)\pi^{-i} & -\alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_1\pi^{-i} & \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 & \gamma_2\pi^{-i} & -\gamma_2 \end{pmatrix} \notin I,$$

denn aus dem Eintrag (44) folgt $\gamma_2 \in \mathbf{o}_\mathbf{F}^*$ im Widerspruch zu (43): $\gamma_2 \in \wp_F^i$. Also ist $Hr_iI \neq Hr_is_2I$. Auch ist

$$r_i^{-1}hr_is_2s_1 = \begin{pmatrix} (\alpha_1-\delta_2)\pi^{-i} & \alpha_1 & \gamma_2\pi^{-i} & \beta_1-\gamma_2\pi^{-2i} \\ \beta_2-\gamma_1\pi^{-2i} & -\gamma_1\pi^{-i} & -\alpha_2 & (\alpha_2-\delta_1)\pi^{-i} \\ \gamma_1\pi^{-i} & \gamma_1 & 0 & \delta_1 \\ \delta_2 & 0 & -\gamma_2 & \gamma_2\pi^{-i} \end{pmatrix} \notin I,$$

weil (33): $0 \in \mathbf{o}_\mathbf{F}^*$ nicht erfüllt werden kann. D.h. $Hr_iI \neq Hr_is_2s_1I$. Mit der gleichen Begründung gilt

$$r_i^{-1}hr_is_2s_1s_2 = \begin{pmatrix} (\alpha_1-\delta_2)\pi^{-i} & \beta_1-\gamma_2\pi^{-2i} & \gamma_2\pi^{-i} & -\alpha_1 \\ \beta_2-\gamma_1\pi^{-2i} & (\alpha_2-\delta_1)\pi^{-i} & -\alpha_2 & \gamma_1\pi^{-i} \\ \gamma_1\pi^{-i} & \delta_1 & 0 & -\gamma_1 \\ \delta_2 & \gamma_2\pi^{-i} & -\gamma_2 & 0 \end{pmatrix} \notin I,$$

also $Hr_iI \neq Hr_is_2s_1s_2I$. Weiter findet man

$$s_2^{-1}r_i^{-1}hr_is_2s_1 = \begin{pmatrix} (\alpha_1-\delta_2)\pi^{-i} & \alpha_1 & \gamma_2\pi^{-i} & \beta_1-\gamma_2\pi^{-2i} \\ \delta_2 & 0 & -\gamma_2 & \gamma_2\pi^{-i} \\ \gamma_1\pi^{-i} & \gamma_1 & 0 & \delta_1 \\ -(\beta_2-\gamma_1\pi^{-2i}) & \gamma_1\pi^{-i} & \alpha_2 & -(\alpha_2-\delta_1)\pi^{-i} \end{pmatrix} \notin I$$

und

$$s_2^{-1}r_i^{-1}hr_is_2s_1s_2 = \begin{pmatrix} (\alpha_1-\delta_2)\pi^{-i} & \beta_1-\gamma_2\pi^{-2i} & \gamma_2\pi^{-i} & -\alpha_1 \\ \delta_2 & \gamma_2\pi^{-i} & -\gamma_2 & 0 \\ \gamma_1\pi^{-i} & \delta_1 & 0 & -\gamma_1 \\ -(\beta_2-\gamma_1\pi^{-2i}) & -(\alpha_2-\delta_1)\pi^{-i} & \alpha_2 & -\gamma_1\pi^{-i} \end{pmatrix} \notin I,$$

d.h. $Hr_is_2I \neq Hr_is_2s_1I$ und $Hr_is_2I \neq Hr_is_2s_1s_2I$. Schließlich ist

$$(s_2s_1)^{-1}r_i^{-1}hr_is_2s_1s_2 = \begin{pmatrix} \delta_2 & \gamma_2\pi^{-i} & -\gamma_2 & 0 \\ (\alpha_1-\delta_2)\pi^{-i} & \beta_1-\gamma_2\pi^{-2i} & \gamma_2\pi^{-i} & -\alpha_1 \\ -(\beta_2-\gamma_1\pi^{-2i}) & -(\alpha_2-\delta_1)\pi^{-i} & \alpha_2 & -\gamma_1\pi^{-i} \\ \gamma_1\pi^{-i} & \delta_1 & 0 & -\gamma_1 \end{pmatrix} \notin I,$$

da wiederum aus (44) folgt, daß $\gamma_1 \in \mathbf{o}_\mathbf{F}^*$, aber aus (34), daß $\gamma_1 \in \wp_F^{i+1}$. Somit ist auch $Hr_is_2s_1I \neq Hr_is_2s_1s_2I$.

Jetzt können die übrigen Vertreter auf diese vier Klassen wie folgt aufgeteilt werden:

Klassen, die mit $\underline{Hr_iI}$ zusammenfallen:
In die Klasse Hr_iI fallen noch die Vertreter $r_ix_{s_1}(a)s_1$, denn mit

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi^{-i} & 0 \\ 0 & a & 0 & \pi^{-i} \\ \pi^i & 0 & a & 0 \\ 0 & \pi^i & 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$$

ist

$$r_i^{-1}hr_ix_{s_1}(a)s_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a\pi^i & \pi^i & 1 & 0 \\ \pi^i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in I.$$

Klassen, die mit $\underline{Hr_is_2I}$ zusammenfallen:
In die Klasse Hr_is_2I fallen die Vertreter $r_ix_{s_2}(a)s_2$ und $r_ix_{s_1s_2}(a,b)s_1s_2$. Denn man findet mit

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H,$$

daß

$$s_2^{-1}r_i^{-1}hr_ix_{s_2}(a)s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in I.$$

Nimmt man für $r_i x_{s_1 s_2}(a,b) s_1 s_2$ mit $a \neq 0$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & (\pi^{-i} - \frac{b}{a}) \\ \pi^i & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H,$$

so erhält man

$$s_2^{-1} r_i^{-1} h r_i x_{s_1 s_2}(a,b) s_1 s_2 = \begin{pmatrix} a & b & 0 & -1 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ a\pi^i & b\pi^i & 1 & -\pi^i \\ 0 & 0 & \frac{b}{a} & 1 \end{pmatrix} \in I,$$

und für $r_i x_{s_1 s_2}(0,b) s_1 s_2$ nimmt man

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi^{-i} & 0 \\ 0 & b\pi^i & 0 & \pi^{-i} \\ \pi^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi^i & 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$$

und erhält

$$s_2^{-1} r_i^{-1} h r_i x_{s_1 s_2}(0,b) s_1 s_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \pi^i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b\pi^i & 1 & -\pi^i \\ -b\pi^i & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in I.$$

Klassen, die mit $\underline{Hr_i s_2 s_1 I}$ zusammenfallen:
In der Klasse $Hr_i s_2 s_1 I$ liegen zusätzlich die Vertreter $r_i x_{s_2 s_1}(a,b) s_2 s_1$ ebenso wie $r_i x_{s_1 s_2 s_1}(a,b,c) s_1 s_2 s_1$. Man kann für $r_i x_{s_2 s_1}(a,b) s_2 s_1$ nämlich

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 + a\pi^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + a\pi^i \end{pmatrix} \in H$$

wählen, und erhält

$$(s_2 s_1)^{-1} r_i^{-1} h r_i x_{s_2 s_1}(a,b) s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 + a\pi^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + a\pi^i \end{pmatrix} \in I.$$

Für $r_i x_{s_1 s_2 s_1}(a,b,c) s_1 s_2 s_1$ wählt man

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c + \pi^{-i} & 0 \\ 0 & a & 0 & c + \pi^{-i} \\ \pi^i & 0 & a - b\pi^i & 0 \\ 0 & \pi^i & 0 & 0 \end{pmatrix} \in H,$$

so daß

$$(s_2s_1)^{-1}r_i^{-1}hr_ix_{s_1s_2s_1}(a,b,c)s_1s_2s_1 = \begin{pmatrix} 1+c\pi^i & \pi^i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a\pi^i & -\pi^i & 1+c\pi^i \end{pmatrix} \in I.$$

Klassen, die mit $\underline{Hr_is_2s_1s_2I}$ zusammenfallen:
Schließlich liegen in $Hr_is_2s_1s_2I$ die Vertreter $r_ix_{s_2s_1s_2}(a,b,c)s_2s_1s_2$ sowie die Vertreter $r_ix_{s_1s_2s_1s_2}(a,b,c,d)s_1s_2s_1s_2$: Für $r_ix_{s_2s_1s_2}(a,b,c)s_2s_1s_2$ sieht man das, indem man

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1+a\pi^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+a\pi^i \end{pmatrix} \in H$$

setzt und damit

$$(s_2s_1s_2)^{-1}r_i^{-1}hr_ix_{s_2s_1s_2}(a,b,c)s_2s_1s_2 = \begin{pmatrix} 1+a\pi^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a\pi^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in I$$

erhält. Für $r_ix_{s_1s_2s_1s_2}(a,b,c,d)s_1s_2s_1s_2$ nimmt man

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b+\pi^{-i} & 0 \\ 0 & -d & 0 & (b+cd)+\pi^{-i} \\ \pi^i & 0 & -d+a(\pi^{2i}-\pi^i) & 0 \\ 0 & \pi^i & 0 & -c\pi^i \end{pmatrix} \in H,$$

damit man

$$(s_2s_1s_2)^{-1}r_i^{-1}hr_ix_{s_1s_2s_1s_2}(a,b,c,d)s_1s_2s_1s_2 = \begin{pmatrix} 1+b\pi^i & 0 & 0 & -\pi^i \\ a\pi^{2i} & 1+b\pi^i & -\pi^i & d\pi^i \\ a\pi^i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in I$$

erreicht.
Nun hat man alle Nebenklassen überprüft, d.h. Satz 3.1 ist bewiesen.

3.2 Die Isomorphismen $H \cap v_{ij}Iv_{ij}^{-1} \longrightarrow I_{ij}$

Nun sollen die Integrale $O_\eta^H(\mathbf{1}_{H\cap v_{ij}Iv_{ij}^{-1}})$ in eine Form gebracht werden, mit der man besser arbeiten kann. Wie bereits gesehen, darf man dazu die Gruppen $H \cap v_{ij}Iv_{ij}^{-1}$ mit Elementen $g \in G$ konjugieren. Diese g sollen so gewählt werden, daß Untergruppen von $H \cap I$ entstehen.

Der Fall $i=0$

Es sei

$$I_0 := H \cap v_{00} I v_{00}^{-1} = H \cap I.$$

Daß $h \in H \cap v_{01} I v_{01}^{-1}$, ist gleichbedeutend zu

$$v_{01}^{-1} h v_{01} = s_1^{-1} h s_1 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \beta_1 \\ \gamma_2 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \delta_1 \end{pmatrix} \in I,$$

das heißt $h \in H \cap I$. Somit ist

$$H \cap v_{01} I v_{01}^{-1} = H \cap I = I_0.$$

Für $v_{02} = x_{s_1}(1) s_1$ ist $h \in H \cap v_{02} I v_{02}^{-1}$ gleichbedeutend zu

$$v_{02}^{-1} h v_{02} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & \beta_2 & -\beta_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_1 & -\beta_2 & \beta_1 + \beta_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 & \gamma_1 & \delta_2 & \delta_1 - \delta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & 0 & \delta_1 \end{pmatrix} \in I$$

für $h \in H$. Dazu muß also $h = (h_1, h_2) \in H \cap I$ sein und zusätzlich $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \bmod \wp_F$ sowie $\delta_1 \equiv \delta_2 \bmod \wp_F$. Dies heißt nichts anderes als daß

$$h_1 h_2^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \delta_1^{-1}(\beta_1 - \beta_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod \wp_F.$$

Also ist

$$H \cap v_{02} I v_{02}^{-1} \cong I_{02} := \left\{ (h_1, h_2) \in H \cap I \mid h_1 h_2^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod \wp_F \right\}.$$

Mit $v_{03} = x_{s_1 s_2}(1,0)$ erhält man für $h \in H$ die Bedingung

$$v_{03}^{-1} h v_{03} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & -\beta_2 & \beta_2 & 0 \\ \gamma_1 & \delta_1 & 0 & -\gamma_1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 & \delta_1 - \delta_2 & \delta_2 & -\gamma_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 & -\beta_1 - \beta_2 & \beta_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} \in I.$$

Dies ist gleichbedeutend zu $h \in H \cap I$ und

$$h \equiv \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix} \right) \bmod \wp_F.$$

Konjugiert man h mit

$$g = (g_1, g_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \in G,$$

so ist dies gleichbedeutend zu

$$h_1 g_2 h_2^{-1} g_2^{-1} \equiv \mathbf{1}_2 \bmod \wp_F$$

und

$$H \cap v_{03} I v_{03}^{-1} \cong I_{03} := \left\{ (h_1, h_2) \in H \cap I \mid h_1 h_2^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod \wp_F \right\}.$$

Der Fall $i>0$

Von R. Weissauer [W3], S. 18, holt man sich die hier benötigten Isomorphismen (und modifiziert sie gleichzeitig ein bißchen): Zunächst wird mit

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi^i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi^i & 0 \end{pmatrix}\right) \in H$$

konjugiert, danach in der ersten Komponente mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}:$$

Man erhält

$$(h_1,h_2) \mapsto \left(\begin{pmatrix} \delta_1 & \gamma_1\pi^{-i} \\ \beta_1\pi^i & \alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta_2 & \gamma_2\pi^{-i} \\ \beta_2\pi^i & \alpha_2 \end{pmatrix}\right) =: \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right),$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto (k_1,k_2) = \left(\begin{pmatrix} d_1 & c_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right).$$

Nun betrachtet man die $H \cap v_{ij} I v_{ij}^{-1}$:
Für $h \in H$ ist $h \in v_{i0} I v_{i0}^{-1} = r_i I r_i^{-1}$ gleichbedeutend zu

$$v_{i0}^{-1} h v_{i0} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\gamma_2\pi^{-i} & \beta_1-\gamma_2\pi^{-2i} & (\alpha_1-\delta_2)\pi^{-i} \\ -\gamma_1\pi^{-i} & \alpha_2 & (\alpha_2-\delta_1)\pi^{-i} & \beta_2-\gamma_1\pi^{-2i} \\ \gamma_1 & 0 & \delta_1 & \gamma_1\pi^{-i} \\ 0 & \gamma_2 & \gamma_2\pi^{-i} & \delta_2 \end{pmatrix} \in I.$$

Daraus schließt man Bedingungen für (k_1,k_2): $a_l, d_l \in \mathbf{o_F^*}$, $b_1 \in \wp_F$, $b_2 \in \mathbf{o_F}$, $a_1 \equiv d_2 \bmod \wp_F^i$, $a_2 \equiv d_1 \bmod \wp_F^i$, $b_1 \equiv c_2 \bmod \wp_F^i$ und $b_2 \equiv c_1 \bmod \wp_F^i$. Daraus folgt:

$$(k_1,k_2) \in H \cap I$$

und

$$\begin{aligned} k_1 k_2^{-1} &= \frac{1}{a_2d_2-b_2c_2} \begin{pmatrix} d_1d_2-c_1c_2 & c_1a_2-d_1b_2 \\ b_1d_2-a_1c_2 & a_1a_2-b_1b_2 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod \wp_F^i. \end{aligned}$$

Sind andererseits diese beiden Bedingungen erfüllt, so ist auch $h \in H \cap v_{i0} I v_{i0}^{-1}$, denn man erhält aus dem Eintrag (21) von $k_1k_2^{-1}$: $c_2 \equiv b_1 \frac{d_2}{a_1} \bmod \wp_F^i$, und aus (22), daß $a_2(d_2-a_1) \equiv b_2(c_2-b_1) \bmod \wp_F^i$. Dies zusammengesetzt ergibt $d_2 \equiv a_1 \bmod \wp_F^i$ und $c_2 \equiv b_1 \bmod \wp_F^i$. Auf die gleiche Weise erhält man aus (12) und (11) die Bedingungen $d_1 \equiv a_2 \bmod \wp_F^i$ und $c_1 \equiv b_2 \bmod \wp_F^i$. Somit hat man gezeigt:

$$H \cap v_{i0} I v_{i0}^{-1} \xrightarrow{\sim} \quad I_{i0} := \left\{(h_1,h_2) \in H \cap I \mid h_1 h_2^{-1} \equiv 1_2 \bmod \wp_F^i\right\}.$$

Für $h \in H \cap v_{i1} I v_{i1}^{-1}$ hat man die Bedingung

$$v_{i1}^{-1} h v_{i1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & (\alpha_1-\delta_2)\pi^{-i} & \beta_1-\gamma_2\pi^{-2i} & \gamma_2\pi^{-i} \\ 0 & \delta_2 & \gamma_2\pi^{-i} & -\gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_1\pi^{-i} & \delta_1 & 0 \\ \gamma_1\pi^{-i} & -(\beta_2-\gamma_1\pi^{-2i}) & -(\alpha_2-\delta_1)\pi^{-i} & \alpha_2 \end{pmatrix} \in I.$$

Dies sind die Bedingungen für $h \in H \cap v_{i0} I v_{i0}^{-1}$ zusammen mit der zusätzlichen Bedingung $\beta_2 - \gamma_1\pi^{-2i} \in \wp_F$, also $c_2 \equiv b_1 \bmod \wp_F^{i+1}$. Das bedeutet für den Eintrag (12) von $k_1 k_2^{-1}$: $b_1 d_2 - a_1 c_2 \in b_1 a_1 + b_1 \wp_F^i - a_1 b_1 + a_1 \wp_F^{i+1}$, was, da $b_1 \in \wp_F$, gleichbedeutend zu $b_1 d_2 - a_1 c_2 \equiv 0 \bmod \wp_F^{i+1}$ ist. Die übrigen Komponenten geben keine weiteren Einschränkungen, so daß folgt:

$$H \cap v_{i1} I v_{i1}^{-1} \xrightarrow{\sim} \quad I_{i1} := \left\{ (h_1,h_2) \in I_{i0} \mid h_1 h_2^{-1} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \bmod \wp_F^{i+1} \right\}.$$

Für $H \cap v_{i2} I v_{i2}^{-1}$ hat man die Bedingung

$$v_{i2}^{-1} h v_{i2} = \begin{pmatrix} \delta_2 & 0 & -\gamma_2 & \gamma_2\pi^{-i} \\ (\alpha_1-\delta_2)\pi^{-i} & \alpha_1 & \gamma_2\pi^{-i} & \beta_1-\gamma_2\pi^{-2i} \\ -(\beta_2-\gamma_1\pi^{-2i}) & \gamma_1\pi^{-i} & \alpha_2 & -(\alpha_2-\delta_1)\pi^{-i} \\ \gamma_1\pi^{-i} & \gamma_1 & 0 & \delta_1 \end{pmatrix} \in I.$$

Dies liefert die Bedingungen für $(k_1,k_2) \in H \cap I$ und die zusätzlichen Bedingungen $d_1 \equiv a_2 \bmod \wp_F^{i+1}$, $d_2 \equiv a_1 \bmod \wp_F^{i+1}$ und $c_2 \equiv a_1 \bmod \wp_F^{i+1}$. Für $k_1 k_2^{-1}$ folgt daraus:

$$k_1 k_2^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod \wp_F^{i+1}.$$

Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt für ein $(k_1,k_2) \in H \cap I$, so folgt in gleicher Weise wie bei v_{i0}, daß das zugehörige $h \in H \cap v_{i2} I v_{i2}^{-1}$ ist. Man hat also:

$$H \cap v_{i2} I v_{i2}^{-1} \xrightarrow{\sim} \quad I_{i2} := \left\{ (h_1,h_2) \in I_{i0} \mid h_1 h_2^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \bmod \wp_F^{i+1} \right\}.$$

Schließlich findet man für $h \in H \cap v_{i3} I v_{i3}^{-1}$ die Bedingung

$$v_{i3}^{-1} h v_{i3} = \begin{pmatrix} \delta_2 & \gamma_2\pi^{-i} & -\gamma_2 & 0 \\ \gamma_1\pi^{-i} & \delta_1 & 0 & -\gamma_1 \\ -(\beta_2-\gamma_1\pi^{-2i}) & -(\alpha_2-\delta_1)\pi^{-i} & \alpha_2 & -\gamma_1\pi^{-i} \\ -(\alpha_1-\delta_2)\pi^{-i} & -(\beta_1-\gamma_2\pi^{-2i}) & -\gamma_2\pi^{-i} & \alpha_1 \end{pmatrix} \in I.$$

Dies impliziert gerade die Bedingungen für $(k_1,k_2) \in I_{i+1,0}$, so daß gilt:

$$H \cap v_{i3} I v_{i3}^{-1} \xrightarrow{\sim} \quad I_{i3} := \left\{ (h_1,h_2) \in I_{i0} \mid h_1 h_2^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod \wp_F^{i+1} \right\} = I_{i+1,0}.$$

Bemerkung 3.3. *Mit den Gruppen I_{ij} hat man eine Filtrierung von $I_0 = H \cap I$ gefunden:*

$$I_0 = I_{01} \supset I_{02} \supset I_{03} = I_{10} \supset I_{11} \supset I_{12} \supset I_{13} = I_{20} \supset I_{21} \ldots$$

3.3 Die Zerlegung $T\backslash H/I_0$

Mit den früheren Bezeichnungen ist $I_0 = (I(2,\mathbf{o_F}) \times I(2,\mathbf{o_F}))^0 \subset H$, und $H = (\mathbf{GL}(2,F) \times \mathbf{GL}(2,F))^0$. Das heißt die Tupel (h,h') aus H erfüllen die Bedingung $\det hh'^{-1} = 1$. Um ein Vertretersystem von $T\backslash H/I_0$ anzugeben, kann man zuerst Vertretersysteme für beide Komponenten suchen und diese dann mit der Determinantenbedingung verknüpfen. In Satz 2.2 hat man bereits eine Zerlegung für die $\mathbf{GL}(2,F)$ gefunden:

$$\mathbf{GL}(2,F) = \bigcup_{f\in\mathbb{N}_0} L^* \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^{f-v(\theta)} \end{pmatrix} \cdot K(2,F).$$

Die Vertreter seien im folgenden mit r_f bezeichnet. $K(2,F) = \mathbf{GL}(2,\mathbf{o_F})$ ist eine maximal kompakte Untergruppe von $\mathbf{GL}(2,F)$. Für L^* ist dabei eine Einbettung $\phi_{\theta^2 A}$ in die $\mathbf{GL}(2,F)$ derart zu wählen, daß

$$L^* \xrightarrow{\sim} T_{\theta^2 A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & \theta bA \\ \theta^{-1}b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a^2 - b^2 A \in F \right\}.$$

Außerdem wird mit Lemma 2.14 ein Vertretersystem von $K(2,F)/I(2,F)$ gegeben. Es wird gebildet von den $(q+1)$ Elementen

$$j := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k_\xi := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix},$$

mit $\xi \in \kappa_F$. Damit findet man als Vertretersystem von $T_{\theta^2 A}\backslash\mathbf{GL}(2,F)/I(2,F)$ die Elemente id, r_f, $r_f j$, für $f \in \mathbb{N}$. Was man wie folgt sieht: Wählt man nämlich

$$t = \begin{pmatrix} 1 & -\xi\theta^2 A\pi^{f-v(\theta)} \\ -\xi\pi^{f-v(\theta)} & 1 \end{pmatrix} \in T,$$

so erhält man

$$r_f^{-1} t r_f k_\xi = \begin{pmatrix} 1-\xi^2 A\theta^2\pi^{2(f-v(\theta))} & -\xi A\theta\pi^{2(f-v(\theta))} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in I(2,F),$$

also ist $r_f k_\xi \in T_{\theta^2 A} r_f I(2,F)$. Damit $r_f j \in T_{\theta^2 A} r_f I(2,F)$ gilt, muß für ein

$$t = \begin{pmatrix} a & bA\theta^2 \\ b\theta^{-1} & a \end{pmatrix} \in T_{\theta^2 A}$$

das Produkt $r_f^{-1} t r_f j$ in $I(2,F)$ liegen, also

$$r_f^{-1} t r_f j = \begin{pmatrix} bA\theta\pi^{f-v(\theta)} & -a \\ a & -b\theta^{-1}\pi^{-(f-v(\theta))} \end{pmatrix} \in I(2,F).$$

Um dies zu erfüllen, braucht man einerseits $b \in \mathbf{o_F^*}$ und andererseits $b \in \wp_F^f$. Dies kann nur für $f = 0$ der Fall sein. Dann setzt man

$$t = \begin{pmatrix} 0 & A\theta \\ \theta^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

und hat die obige Bedingung erfüllt. Zur Vereinfachung der Notation wird im folgenden $\Theta = \theta\pi^{-v(\theta)} \in \mathbf{o}_\mathbf{F}^*$ gesetzt.
Für die Doppelnebenklassenzerlegung $T\backslash H/I_0$ hat man bis jetzt folgendes gewonnen: Ein Element $(h,h') \in H$ besitzt Darstellungen für seine Komponenten $h = \phi_A(l)r_f j^n k$ beziehungsweise $h' = \phi_{\theta^2 A}(l')r_{f'}j^{n'}k'$ mit $n,n' \in \{0,1\}$, $l,l' \in L^*$, $k,k' \in I(2,F)$. Dabei sind (f,f') und (n,n') eindeutig durch (h,h') bestimmt.
Aus $\det h = \det h'$ folgt nun zunächst, daß

$$\frac{\det k}{\det k'} \in N(L^*)\pi^{f'-f-v(\theta)} \cap \mathbf{o}_\mathbf{F}^*$$

sein muß. Da L/F unverzweigt ist, muß also zwingend

$$f' - f - v(\theta) \equiv 0 \bmod 2$$

gelten. Um zu erreichen, daß $(k,k') \in I_0$ und somit auch $(\phi_A(l), \phi_{\theta^2 A}(l')) \in T$ gilt, muß man nun die Gleichheit der Determinanten erzwingen. Dazu darf man k bzw. k' nur um Elemente aus $j^{-n}\phi_{\pi^{2f}A}(L^*)j^n \cap I(2,F)$ bzw. $j^{-n'}\phi_{\pi^{2f'}\Theta^2 A}(L^*)j^{n'} \cap I(2,F)$ abändern. Das heißt (s. Beobachtung 3.5) $\frac{\det k}{\det k'}$ darf nur um einen Faktor aus $N_L(\mathbf{o}_\mathbf{L}^*(f+(1-n))\mathbf{o}_\mathbf{L}^*(f'+(1-n')))$ abgeändert werden, wenn man mit $\mathbf{o}_\mathbf{L}(i)$ die Ordnungen $\mathbf{o}_\mathbf{F} + \sqrt{A}\wp_F^i$ für $i > 0$ bezeichnet. Die letzte Gruppe ist offensichtlich gleich ${\mathbf{o}_\mathbf{F}^*}^2$. Demnach ist für die Vertreter der Doppelnebenklassen $T\backslash H/I_0$ ein weiterer Faktor zur Unterscheidung dieser Quadratklassen notwendig, und man erhält

Satz 3.4. *Die Gruppe H besitzt die disjunkte Zerlegung*

$$H = \bigcup_{\psi\in\Psi} T \cdot r(\psi) \cdot I_0,$$

mit $\Psi \subset \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbf{o}_\mathbf{F}^*/{\mathbf{o}_\mathbf{F}^*}^2 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ und der zusätzlichen Eigenschaft $f' - f - v(\theta) \equiv 0 \bmod 2$ für $\psi = (n,n',\epsilon,f,f') \in \Psi$. Außerdem ist für $f = 0$ bzw. $f' = 0$ auch $n = 0$ bzw. $n' = 0$. Die Vertreter $r(n,n',\epsilon,f,f')$ haben die Form

$$(\phi_A(\pi^{-[f/2]}), \phi_{\theta^2 A}(\pi^{-[(f'-v(\theta))/2]}\epsilon')) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^f \end{pmatrix} j^n, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^{f'-v(\theta)}\epsilon \end{pmatrix} j^{n'} \right),$$

mit $\epsilon' \in L^*$ so, daß $N(\epsilon') = \epsilon^{-1}$.

3.3.1 Die Indices $[\mathbf{o}_\mathbf{T} : (T \cap rI_0r^{-1})]$

Es sei für $i > 0$

$$\mathbf{o}_\mathbf{L}(i) := \mathbf{o}_\mathbf{F} + \sqrt{A}\wp_F^i$$

eine i-te Ordnung von $\mathbf{o}_\mathbf{L}$, und es sei $\mathbf{o}_\mathbf{L}^*(i)$ ihre Einheitengruppe.

Beobachtung 3.5. *Für $r = r(n,n',\epsilon,f,f')$ gilt*

$$T \cap rI_0r^{-1} = \{(x,x') \in T \mid x \in \mathbf{o}_\mathbf{L}^*(f+(1-n)), x' \in \mathbf{o}_\mathbf{L}^*(f'+(1-n'))\}.$$

Beweis: $(x,x') = (a+b\sqrt{A}, a'+b'\sqrt{A}) \in T \cap rI_0r^{-1}$ heißt $r^{-1}(x,x')r \in I_0$ für $(x,x') \in T$. Komponentenweise Betrachtung liefert für $n'=0$

$$r_{f'}^{-1}\phi_{\theta^2 A}^{-1}(\pi^{-[f'/2]})x'\phi_{\theta^2 A}(\pi^{-[f'/2]})r_{f'} = \begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{\Theta\epsilon\pi^{f'}}(\Theta\epsilon\pi^{f'})^2 A \\ \frac{b'}{\Theta\epsilon\pi^{f'}} & a' \end{pmatrix} \in I(2,F),$$

was genau dann erfüllt ist, wenn $a' \in \mathbf{o_F^*}$, $b' \in \wp_F^{f'+1}$ und $v(b')+f' > 0$. Dabei wurde wieder $\Theta = \theta\pi^{-v(\theta)} \in \mathbf{o_F^*}$ gesetzt. Für $n'=1$ erhält man:

$$j^{-1}r_{f'}^{-1}\phi_{\theta^2 A}^{-1}(\pi^{-[f'/2]})x'\phi_{\theta^2 A}(\pi^{-[f'/2]})r_{f'}j = \begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{\Theta\epsilon\pi^{f'}} \\ \frac{b'}{\Theta\epsilon\pi^{f'}}(\Theta\epsilon\pi^{f'})^2 A & a' \end{pmatrix} \in I(2,F),$$

was gleichbedeutend ist mit $a' \in \mathbf{o_F^*}$, $b' \in \wp_F^{f'}$. Die Bedingungen für x sind genau dieselben, was man aus den obigen abliest, indem man $\Theta\epsilon = 1$ setzt. Die Behauptung ergibt sich somit aus der Definition von $\mathbf{o_L^*}(f'+n')$.

Satz 3.6. *Für $r = r(n,n',\epsilon,f,f')$ gilt*

$$[o_T : (T \cap rI_0r^{-1})] = \frac{1}{2}\left(\frac{q+1}{q}\right)^2 \cdot q^{f+(1-n)} \cdot q^{f'+(1-n')}.$$

Beweis: Nach [W2] Appendix 1, gilt:

$$\begin{aligned}[o_T : (T \cap rI_0r^{-1})] &= [\mathbf{o_L^*} : \mathbf{o_L^*}(f+(1-n))] \cdot [\mathbf{o_L^*} : \mathbf{o_L^*}(f'+(1-n'))] \\ &\quad \cdot [N(\mathbf{o_L^*}) : N(\mathbf{o_L^*}(\min\{f+(1-n), f'+(1-n')\}))] \\ &= \frac{q+1}{q}q^{f+(1-n)} \cdot \frac{q+1}{q}q^{f'+(1-n')} \cdot \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dabei beachte man, daß für $f=0$ (bzw. $f'=0$) auch $n=0$ (bzw. $n'=0$) sein muß, also $f+(1-n) > 0$ (bzw. $f'+(1-n') > 0$) immer erfüllt ist.

3.4 Die Integrale $[I_0 : I_{ij}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{ij}}(k^{-1}r^{-1}\eta rk)\, dk$

Im folgenden sei $\eta = (\phi_A(a+b\sqrt{A}), \phi_{\theta^2 A}(a'+b'\sqrt{A})) \in T$ regulär, das heißt es seien b und b' von null verschieden. Für $r = r(n,n',\epsilon,f,f')$ aus dem Vertretersystem von $T\backslash H/I_0$ aus Satz 3.4 setzen wir zur Abkürzung

$$\eta_r := (s_r, s_r') := r^{-1}\eta r = (j^{-n}\phi_{\pi^{2f}A}(a+b\sqrt{A})j^n, j^{-n'}\phi_{\Theta^2\pi^{2f'}A}(a'+b'\sqrt{A})j^{n'}).$$

Dann schreibt man

$$\eta_r = \left(j^{-n}\begin{pmatrix} a & \tilde{b}B \\ \tilde{b} & a \end{pmatrix}j^n, j^{-n'}\begin{pmatrix} a' & \tilde{b}'B' \\ \tilde{b}' & a' \end{pmatrix}j^{n'}\right),$$

wobei man setzt:

$$\tilde{b} = \frac{b}{\pi^f},\ B = A\pi^{2f},$$

$$\tilde{b'} = \frac{b'}{\Theta\epsilon\pi^{f'}},\ B' = (\Theta\epsilon\pi^{2f'})^2 A.$$

Das Integral

$$[I_0 : I_{ij}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{ij}}(k^{-1}\eta_r k)\ dk$$

auswerten heißt, die Nebenklassen $kI_{ij} \subset I_0$ zu zählen, für die

$$k^{-1}\eta_r k \in I_{ij}. \quad (*)$$

Somit ergibt sich mit Beobachtung 3.5 sofort:

$$[I_0 : I_0] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_0}(k^{-1}\eta_r k)\ dk = 1,$$

falls $v(b) \geq f + (1-n)$ und $v(b') \geq f' + (1-n')$. Ansonsten verschwindet das Integral. Diese Bedingung muß auch erfüllt sein, damit irgendein anderes Integral von null verschieden ist, schließlich wird über I_0 integriert. Für die Berechnung aller anderen Integrale hilft folgende Überlegung: Da die Bedingung $(*)$ unabhängig von der Wahl des Vertreters $k \in kI_{ij}$ ist, kann man ohne Einschränkung $k = (y, \mathrm{id})$ mit einem geeigneten $y \in \mathbf{SL}(2,F) \cap I(2,F)$ wählen. Mit diesem y erhält man dann mit den Definitionen der I_{i0}:

$$k^{-1}\eta_r k \in I_{i0} \Longleftrightarrow y^{-1}s_r y \equiv s'_r \bmod \wp_F^i.$$

Für I_{i1} und I_{i2} muß zusätzlich zu dieser Bedingung noch

$$y^{-1}s_r y \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} s'_r \bmod \wp_F^{i+1},$$

beziehungsweise

$$y^{-1}s_r y \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s'_r \bmod \wp_F^{i+1}$$

erfüllt sein. Um diese Bedingungen besser handhaben zukönnen, verlagert man die Fallunterscheidungen $n = 0, 1$ und $n' = 0, 1$ von s_r, s'_r nach y: Es bezeichne $s_r(n) = j^{-n}\phi_{\pi^{2f}A}(a + b\sqrt{A})j^n$ und $s'_r(n) = j^{-n'}\phi_{\Theta^2\pi^{2f'}A}(a' + b'\sqrt{A})j^{n'}$. Es ist also $s_r(1) = j^{-1}s_r(0)j$ und $s'_r(1) = j^{-1}s'_r(0)j$.
Sei $\underline{n = n' = 1}$: Es gilt mit $D \in \mathbf{SL}(2, \mathbf{o_F})$:

$$y^{-1}s_r(1)y \equiv Ds_r(1) \Longleftrightarrow j^{-1}y^{-1}js_r(0)j^{-1}yj \equiv j^{-1}Djs'_r(0).$$

Statt $y \in \mathbf{SL}(2,F) \cap I(2,F)$ zu suchen, kann man hier also ebenso gut $y \in j^{-1}(\mathbf{SL}(2,F) \cap I(2,F))j = \mathbf{SL}(2,F) \cap I^T(2,F)$ suchen mit der Eigenschaft

$$y^{-1}s_r(0)y \equiv j^{-1}Djs'_r(0).$$

Genauso sucht man für $\underline{n=0,n'=1}$ solche $y=\tilde{y}j$ mit der Eigenschaft

$$y^{-1}s_r(0)y \equiv j^{-1}Djs'_r(0),$$

und für $\underline{n=1,n'=0}$ die $y=j\tilde{y}$ mit

$$y^{-1}s_r(0)y \equiv Ds'_r(0).$$

Für $n \neq n'$ werden die $\tilde{y}$ des Vertretersystems also nach links bzw. rechts um j translatiert. Ab jetzt sei

$$s_r := s_r(0) \quad \text{bzw.} \quad s'_r := s'_r(0).$$

Ist es klar, welches $r(0,0,\epsilon,f,f')$ gemeint ist, so wird oft auch dieser Index fortgelassen:

$$s = s_r \quad \text{und} \quad s' = s'_r.$$

3.4.1 Auswertung der Integrale

Im folgenden sei stets $v(b) \geq f+(1-n)$ und $v(b') \geq f'+(1-n')$ erfüllt. Dies waren die Bedingungen dafür, daß es überhaupt von Null verschiedene Integrale gibt. Für $n=0$ (bzw. $n'=0$) impliziert das $v(\tilde{b})>0$ (bzw. $v(\tilde{b}')>0$). Die auftretenden Integrale sollen nun für die verschiedenen Nebenklassenvertreter $r=r(n,n',\epsilon,f,f')$ ausgewertet werden. Dazu muß man die Anzahl der Lösungen in den verschiedenen Kongruenzen zählen, die soeben eingführt wurden.
Man setzt wie früher (s. Abschnitt 3.4)

$$\eta_r = (s,s') = \left(\begin{pmatrix} a & \tilde{b}B \\ \tilde{b} & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & \tilde{b}'B' \\ \tilde{b}' & a' \end{pmatrix} \right),$$

$$\tilde{b} = \frac{b}{\pi^f},\ B = A\pi^{2f},$$

$$\tilde{b}' = \frac{b'}{\Theta\epsilon\pi^{f'}},\ B' = (\Theta\epsilon\pi^{2f'})^2 A.$$

Weiter weiß man nach Satz 3.4, daß mit $n>0$ (bzw. $n'>0$) auch $f>0$ (bzw. $f'>0$) gilt, so daß B (bzw. B') in $\wp_F$ liegen.
Man unterscheidet grundlegend nach der Größe von i:

Der Fall $i = 0$

Zunächst benötigt man ein Vertretersystem von I_0/I_{02}. Ohne Einschränkung kann man diese Vertreter schreiben als (y, id) mit $y \in \mathbf{SL}(2, \mathbf{o_F}) \cap I(2,F)$. Zwei Elemente (y, id) und (z, id) definieren genau dann dieselbe Nebenklasse, wenn gilt:

$$y^{-1}z \equiv \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod \wp_F.$$

Da sich jedes Element aus $\mathbf{SL}(2, \mathbf{o_F}) \cap I(2,F)$ modulo $\wp_F$ eindeutig zerlegen läßt in

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mit $\lambda \neq 0$ und β aus κ_F, bilden die

$$y = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \kappa_F^*,$$

ein Vertretersystem von I_0/I_{02}.
Betrachte zunächst die Integrale für $n' = 0$. Auszuwerten ist dann die Kongruenz

$$y^{-1}sy \equiv \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s' \bmod \wp_F,\ \beta \in \mathbf{o_F}.$$

Mit s und s' wie oben ist dies ist gleichbedeutend zu

$$y^{-1}sy \equiv \begin{pmatrix} a' + \beta\tilde{b}' & \tilde{b}'B' + \beta a' \\ \tilde{b}' & a' \end{pmatrix} \bmod \wp_F.$$

Sei nun $n = n' = 0$. Dann sucht man die Vertreter y , die die obige Kongruenz erfüllen. Da hier $v(\tilde{b}), v(\tilde{b}') > 0$ sind, vereinfacht sich die Kongruenz $y^{-1}sy \equiv Ds'$ nun zu einer von λ, das heißt von y, unabhängigen Bedingung

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a' & \beta a' \\ 0 & a' \end{pmatrix} \bmod \wp_F.$$

Das heißt wenn $a \equiv a' \bmod \wp_F$ ist, so hat man keine Einschränkungen für y, denn man kann $\beta = 0$ setzen.
Sei jetzt $n = 1$, $n' = 0$. Das heißt $f > 0$, also $B = A\pi^{2f} \in \wp_F$ und $v(\tilde{b}') > 0$. Gesucht sind nun die jy, so daß die Kongruenz

$$y^{-1}j^{-1}sjy \equiv \begin{pmatrix} a & -\tilde{b}\lambda^{-2} \\ 0 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a' & \beta a' \\ 0 & a' \end{pmatrix} \bmod \wp_F.$$

erfüllt ist. Da man β geeignet wählen kann, muß dazu wieder nur $a \equiv a' \bmod \wp_F$ gelten.
Nun zu den Integralen für $n' = 1$: Hier ist die Kongruenz

$$y^{-1}sy \equiv j^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} js' \bmod \wp_F,\ \beta \in \kappa_F$$

auszuwerten.
Im Fall $n = n' = 1$ muß $f, f' > 0$ gelten, also sind B und B' in $\wp_F$. Gesucht sind hier die Vertreter $y = j^{-1}yj$, die die Kongruenz

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ \tilde{b}\lambda^2 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a' & 0 \\ \beta a' + \tilde{b}' & a' \end{pmatrix} \bmod \wp_F$$

lösen. Das liefert mit geeignetem β nur die Forderung $a \equiv a' \bmod \wp_F$.
Falls $n = 0$ und $n' = 1$, so ist $B' \in \wp_F$ und $v(\tilde{b}) > 0$. Gesucht sind die y, die folgende Kongruenz erfüllen:

$$j^{-1}y^{-1}syj \equiv \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a' & 0 \\ \beta a' + \tilde{b}' & a' \end{pmatrix} \bmod \wp_F.$$

Auch hier findet man nur die Bedingung $a \equiv a' \bmod \wp_F$. Somit erhält man zusammenfassend:

$$[I_0 : I_{02}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{02}}(k^{-1}\eta_r k)\, dk = \sharp \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \mid \lambda \in \kappa_F^* \right\} = q - 1,$$

falls $a \equiv a' \bmod \wp_F$. Ist dies nicht der Fall, so ist das Integral gleich 0.

Der Fall $0 < i \leq v(b) - f$ **und** $0 < i \leq v(b') - f'$

Zunächst benötigt man Vertretersysteme von I_0/I_{ij} für $i > 0$. Zwei Elemente (y, id) und (z, id) aus I_0 definieren genau dann dieselbe Nebenklasse von I_0/I_{i0}, wenn

$$y^{-1}z \equiv \mathbf{1}_2 \bmod \wp_F^i,$$

das heißt wenn y und z modulo $\wp_F^i$ gleich sind. Es bezeichne nun

$$R_i := \mathbf{o_F}/(\mathbf{o_F}\pi^i)$$

den i-ten Restklassenring von $\mathbf{o_F}$. Im folgenden werden (in Analogie zu $\kappa_F = R_1$) die Elemente von $\mathbf{o_F}$ oft mit ihren Restklassen in R_i identifiziert.
Mit dieser Definition erhält man $\mathbf{SL}(2, R_i) \cap I(2, R_i)$ als Vertretersystem von I_0/I_{i0}. Für I_{i0}/I_{ij}, $j = 1, 2$, gilt:

$$(y, \mathrm{id})I_{ij} = (z, \mathrm{id})I_{ij} \Longleftrightarrow y^{-1}z \equiv \begin{pmatrix} 1+\alpha & \beta \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} \bmod \wp_F^{i+1}, \alpha, \beta \in \wp_F^i,$$

wobei für $j = 2$ obiges $\alpha = 0$ zusetzen ist. Demnach gilt:

Lemma 3.7. *Die Elemente*

$$(\mathbf{SL}(2, R_i) \cap I(2, R_i)) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix}, \mu \in \wp_F^i/\wp_F^{i+1},$$

bilden ein Vertretersystem von I_0/I_{i1} *und die Elemente*

$$(\mathbf{SL}(2, R_i) \cap I(2, R_i)) \cdot \begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 \\ \mu & 1-\lambda \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \wp_F^i/\wp_F^{i+1},$$

bilden eines von I_0/I_{i2}.

Nun zur Auswertung der Integrale: Man setzt

$$y = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix},$$

so daß man für $y^{-1}sy \equiv s'$ schreiben kann

$$\begin{pmatrix} a+\tilde{b}(Bzw-vu) & \tilde{b}(Bz^2-v^2) \\ \tilde{b}(u^2-w^2B) & a-\tilde{b}(Bzw-vu) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a' & \tilde{b}'B' \\ \tilde{b}' & a' \end{pmatrix}.$$

(Wieder sind s und s' die Komponenten von $\eta_r = (s,s')$.)
Es sei $0 < i \leq v(b) + f$, also $v(\tilde{b}) \geq i$. Dann folgt aus der Forderung

$$y^{-1}sy \equiv s' \bmod \wp_F^i$$

auch $v(\tilde{b}') \geq i$. Ist dies andererseits erfüllt, so folgt daraus auch sofort $v(\tilde{b}) \geq i$. In diesem Fall sind also sowohl s als auch s' modulo $\wp_F^i$ diagonal. Sie sind genau dann modulo $\wp_F^i$ konjugiert , wenn $a \equiv a' \bmod \wp_F^i$. Also ergibt sich

$$[I_0 : I_{i0}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{i0}}(k^{-1}\eta_r k)\, dk = \sharp(\mathbf{SL}(2,R_i) \cap j^n I(2,R_i) j^{-n'}),$$

falls $a \equiv a' \bmod \wp_F^i$ und 0 sonst.

Damit die Integrale von $\mathbf{1}_{I_{i1}}$ und $\mathbf{1}_{I_{i2}}$ nicht verschwinden, muß zunächst das Integral von $\mathbf{1}_{I_{i0}}$ von Null verschieden sein. Also gilt immer $v(\tilde{b}) \geq i$ und $v(\tilde{b}') \geq i$ und $v(a-a') \geq i$.

Man betrachtet zuerst den Fall $n' = 0$: Hier müssen die

$$\tilde{y} = y \begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 \\ \mu & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

mit $y \in \mathbf{SL}(2,R_i) \cap j^n I(2,R_i)$ gefunden werden, für die

$$\tilde{y}^{-1}s\tilde{y} \equiv \begin{pmatrix} 1+\alpha & \beta \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} s' \bmod \wp_F^{i+1}$$

erfüllt werden kann mit α und β aus $\wp_F^i$. Im Fall von $\mathbf{1}_{I_{i2}}$ ist $\alpha = 0$. Durch Ausmultiplizieren erhält man die Kongruenz

$$\begin{pmatrix} a+\tilde{b}(Bzw-vu) & \tilde{b}(Bz^2-v^2) \\ \tilde{b}(u^2-w^2B) & a-\tilde{b}(Bzw-vu) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (1+\alpha)a' & \tilde{b}'B'+\beta a' \\ \tilde{b}' & (1-\alpha)a' \end{pmatrix} \bmod \wp_F^{i+1}.$$

Insbesondere hängt dies nicht von λ und μ ab.

Sei nun $n = n' = 0$. Hier gilt für die Komponenten von y, daß $w \in \wp_F$ und $u, z \in \mathbf{o_F^*}$. Da $v(\tilde{b}), v(\tilde{b}'), v(a-a') \geq i$, vereinfacht sich obige Kongruenz zu

$$\begin{pmatrix} -\tilde{b}vu & \tilde{b}(Bz^2-u^2) \\ \tilde{b}u^2 & \tilde{b}vu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_1+\alpha a & \tilde{b}'B'+\beta a \\ \tilde{b}' & a_1-\alpha a \end{pmatrix} \bmod \wp_F^{i+1}.$$

Aus den Einträgen (11) und (22) zieht man zunächst $a_1 \equiv 0$, also $a \equiv a' \bmod \wp_F^{i+1}$. Dann unterscheidet man nach $v(\tilde{b})$: Ist $v(\tilde{b}) > i$, so ist auch $v(\tilde{b}') > i$, wegen (21). Dann erhält man mit $\alpha = \beta = 0$ eine Lösung der Kongruenz. Ist $v(\tilde{b}) = v(\tilde{b}') = i$, so muß man $u^2 \equiv \frac{\tilde{b}'}{\tilde{b}} \bmod \wp_F$ lösen. Wenn dies möglich ist, so kann man für I_{i1} die Zahlen α und β geeignet anpassen. Für I_{i2} muß $\alpha = 0$ sein, und man erhält die zusätzliche Forderung $v \in \wp_F$.

Somit ergibt sich für $\underline{n = n' = 0 \text{ falls } v(a-a') \geq i+1}$:

$$[I_0 : I_{i1}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{i1}}(k^{-1}\eta_r k)\, dk =$$

$$\begin{cases} \sharp(\mathbf{SL}(2,R_i) \cap I(2,R_i)) \cdot q, \text{ falls } (i < v(b) - f \text{ und } i < v(b') - f') \\ \sharp\{y \in \mathbf{SL}(2,R_i) \mid u^2 \equiv \frac{\tilde{b}}{\tilde{b}'} \bmod \wp_F, w \in \wp_F\} \cdot q, \text{ falls } i = v(b) - f = v(b') - f' \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$[I_0 : I_{i2}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{i2}}(k^{-1}\eta_r k)\, dk =$$

$$\begin{cases} \sharp(\mathbf{SL}(2,R_i) \cap I(2,R_i)) \cdot q^2, \text{ falls } (i < v(b) - f \text{ und } i < v(b') - f') \\ \sharp\{y \in \mathbf{SL}(2,R_i) \mid u^2 \equiv \frac{\tilde{b}}{\tilde{b}'} \bmod \wp_F, v, w \in \wp_F\} \cdot q^2, \text{falls } i = v(b) - f = v(b') - f' \\ 0 \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei nun $n = 1$, $n' = 0$: Dann ist $u \in \wp_F$, weil $y \in \mathbf{SL}(2,R_i) \cap jI(2,R_i)$, und es ist $B \in \wp_F$. Die Bedingung $\tilde{y}^{-1}s\tilde{y} \equiv Ds'$ schreibt sich nun als

$$\begin{pmatrix} a & -\tilde{b}v^2 \\ 0 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (1+\alpha)a' & \tilde{b}'B'+\beta a' \\ \tilde{b}' & (1-\alpha)a' \end{pmatrix} \bmod \wp_F^{i+1}.$$

Sie ist wegen (21) nur dann lösbar, wenn $\tilde{b}'$ in $\wp_F^{i+1}$ liegt. Aus (11) und (22) folgt außerdem $a \equiv a' \bmod \wp_F^{i+1}$ und $\alpha = 0$. In (12) kann man β geeignet wählen.

Also erhält man für $\underline{n = 1 \text{ und } n' = 0}$, wenn $\underline{v(a-a') \geq i+1 \text{ und } i < v(b') - f'}$ erfüllt sind:

$$[I_0 : I_{i1}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{i1}}(k^{-1}\eta_r k)\, dk = \sharp(\mathbf{SL}(2,R_i) \cap I(2,R_i)) \cdot q$$

und

$$[I_0 : I_{i2}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{i2}}(k^{-1}\eta_r k)\, dk = \sharp(\mathbf{SL}(2,R_i) \cap I(2,R_i)) \cdot q^2.$$

Sind obige Bedingungen nicht erfüllt, so verschwinden die Integrale.

Betrachte nun den Fall $n' = 1$. Dann muß man die

$$\tilde{y} = y \cdot j^{-1} \begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 \\ \mu & 1-\lambda \end{pmatrix} j$$

mit $y \in \mathbf{SL}(2,R_i) \cap j^n I(2,R_i) j$ finden, die die Kongruenz

$$\tilde{y}^{-1} s \tilde{y} \equiv \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ \beta & 1-\alpha \end{pmatrix} s' \bmod \wp_F^{i+1}$$

für α und β in $\wp_F^i$ lösen. Für das Integral von $\mathbf{1}_{I_{i2}}$ muß dies schon mit $\alpha = 0$ möglich sein. Wieder setzt man

$$y = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}.$$

Da hier $f' > 0$, also $B \in \wp_F$ gilt, erhält man durch Ausmultiplizieren

$$\begin{pmatrix} a + \tilde{b}(Bzw - vu) & \tilde{b}(Bz^2 - v^2) \\ \tilde{b}(u^2 - w^2 B) & a - \tilde{b}(Bzw - vu) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (1+\alpha)a' & 0 \\ \beta a' + \tilde{b}' & (1-\alpha)a' \end{pmatrix} \bmod \wp_F^{i+1}.$$

Sei nun zunächst $n = n' = 1$. Dies impliziert $v \equiv 0 \bmod \wp_F$ und $v(B) > 0$, so daß man vereinfachen kann:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ \tilde{b}u^2 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (1+\alpha)a' & 0 \\ \beta a' + \tilde{b}' & (1-\alpha)a' \end{pmatrix} \bmod \wp_F^{i+1}.$$

Aus (11) und (22) folgt $a \equiv a' \bmod \wp_F^{i+1}$ und $\alpha = 0$. In (21) kann man β passend wählen.

Man erhält also für $\underline{n = n' = 1 \text{ falls } v(a - a') \geq i+1}$:

$$[I_0 : I_{i1}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{i1}}(k^{-1}\eta_r k)\, dk = \sharp(\mathbf{SL}(2,R_i) \cap I^T(2,R_i)) \cdot q$$

bzw.

$$[I_0 : I_{i2}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{i2}}(k^{-1}\eta_r k)\, dk = \sharp(\mathbf{SL}(2,R_i) \cap I^T(2,R_i)) \cdot q^2.$$

Sei nun $n = 0$ und $n' = 1$. Dann ist $z \equiv 0 \bmod \wp_F$ und v eine Einheit, und man muß die Kongruenz

$$\begin{pmatrix} a - \tilde{b}vu & -\tilde{b}v^2 \\ \tilde{b}(u^2 - w^2B) & a + \tilde{b}vu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (1+\alpha)a' & 0 \\ \beta a' + \tilde{b}' & (1-\alpha)a' \end{pmatrix} \bmod \wp_F^{i+1}$$

erfüllen. Dies ist nur dann möglich, wenn $\tilde{b}$ in $\wp_F^{i+1}$ liegt. Außerdem folgt aus (11) und (22) wiederum $a \equiv a' \bmod \wp_F^{i+1}$ und $\alpha = 0$.

Also gilt für $\underline{n = 0 \text{ und } n' = 1}$:

$$[I_0 : I_{i1}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{i1}}(k^{-1}\eta_r k)\, dk = \sharp(\mathbf{SL}(2,R_i) \cap I(2,R_i)j) \cdot q$$

und

$$[I_0 : I_{i2}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{i2}}(k^{-1}\eta_r k)\, dk = \sharp(\mathbf{SL}(2,R_i) \cap I(2,R_i)j) \cdot q^2,$$

falls $\underline{v(a-a') \geq i+1 \text{ und } i < v(b) - f}$. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so verschwinden die Integrale.

Der Fall $i > v(b) - f$ **und** $i > v(b') - f'$

Es sei $i > v(b) - f$. Als Nebenresultat des vorigen Falls weiß man, daß dann auch $i > v(b') - f'$ gelten muß, damit die Integrale nicht von vornherein verschwinden. Nun seien wieder s und s' die Komponenten von $\eta_r = (s, s')$, d.h.

$$s = \begin{pmatrix} a & \tilde{b}B \\ \tilde{b} & a \end{pmatrix}, \quad s' = \begin{pmatrix} a' & \tilde{b}'B' \\ \tilde{b}' & a' \end{pmatrix}.$$

Man benutzt folgende Lemmata:

Lemma 3.8. *Der Zentralisator* $\mathbf{SL}(2,R_i)_s$ *von* s *mit* $v(\tilde{b}) < i$ *in* $\mathbf{SL}(2,R_i)$ *ist die Gruppe aller Matrizen*

$$y = \begin{pmatrix} u & vB + \tilde{g} \\ v & u + \tilde{g}' \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2,R_i),$$

wobei $\tilde{g}, \tilde{g}' \in \wp_F^{i-v(\tilde{b})}/\wp_F^i$ *liegen. Diese* y *besitzen eine eindeutige Produktzerlegung*

$$y = \begin{pmatrix} u & vB \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1+g' \end{pmatrix}$$

mit $g, g' \in \wp_F^{i-v(\tilde{b})}/\wp_F^i$.

Es sei N_B die Gruppe der Elemente

$$u^2 - v^2 B \in R_i^*.$$

Lemma 3.9. *Die Elemente s und s' werden modulo $\wp_F^i$ genau dann von einem Element $y \in \mathbf{SL}(2,R_i)$ konjugiert, wenn sie von einer Matrix*

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(2,R_i)$$

konjugiert werden mit $\xi \in N_B \subset R_i^*$. Das heißt wenn gilt $a \equiv a' \bmod \wp_F^i$, $\tilde{b}'\xi \equiv \tilde{b} \bmod \wp_F^i$ und $\tilde{b}'B' \equiv \tilde{b}B\xi \bmod \wp_F^i$.

Beweis der Lemmata: [W2], Lemma 2 und 3.

Nun soll das Integral von $\mathbf{1}_{i0}$ für $i > 0$ berechnet werden. Wie im vorigen Abschnitt gesehen, muß man dazu die $y \in \mathbf{SL}(2,R_i) \cap j^n I(2,R_i) j^{n'}$ zählen, für die $y^{-1}sy \equiv s' \bmod \wp_F$ erfüllt ist. Lemma 3.9 sagt aus, daß dazu zunächst folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

$$a \equiv a' \bmod \wp_F^i,$$

$$v(b) - f = v(b') - f'$$

und

$$\text{ex. } \xi \in N_{A\pi^{2f}} \subset R_i^* : \tfrac{b'}{\Theta\epsilon\pi^{f'}}\xi \equiv \tfrac{b}{\pi^f} \wedge b'\Theta\epsilon\pi^{f'}A \equiv b\pi^f A\xi \bmod \wp_F^i.$$

Ein Element aus $\mathbf{SL}(2,R_i)$ erhält man dann, indem man das $\tilde{y}$ aus Lemma 3.9 mit einem Element $x = \phi_B(\xi^{-1})$ multipliziert, denn x vertauscht mit s. Alle weiteren Elemente y, die $y^{-1}sy \equiv s' \bmod \wp_F$ erfüllen, entstehen dann daraus, indem man noch ein Element $z \in \mathbf{SL}(2,R_i)_s$ dazu multipliziert: Es sei

$$x = \begin{pmatrix} e & dB \\ d & e \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} u & vB + \tilde{g} \\ v & u + \tilde{g}' \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$y = xz\tilde{y} = \begin{pmatrix} eu + dvB & \xi e(vB + \tilde{g}) + \xi dB(u + \tilde{g}') \\ du + ev & \xi d(vB + \tilde{g}) + \xi e(u + \tilde{g}') \end{pmatrix}.$$

Seien nun zunächst $f, f' > 0$. Dann ist $N_{A\pi^{2f}} = R_i^{*2}$, also muß $\xi = \frac{\tilde{b}}{\tilde{b}'}$ ein Quadrat sein. (Dies ist für genau eines der $\epsilon \in \mathbf{o_F^*}/\mathbf{o_F^*}^2$ erfüllt.) O.B.d.E. kann man dann

$$x = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

wählen mit $e = \sqrt{\xi}^{-1}$. Jetzt kann man die Bedingungen für y in Abhängigkeit von n und n' auswerten: Wenn $n = n' = 0$, dann ist $y \in \mathbf{SL}(2,R_i) \cap I(2,R_i)$. Also muß $v \equiv 0 \bmod \wp_F$ sein, und man erhält

$$\sharp\{y\} = \sharp\{z\} = \sharp(\mathbf{SL}(2,R_i)_s \cap I(2,R_i)).$$

Für $n = n' = 1$ liegt y in $\mathbf{SL}(2,R_i) \cap I^T(2,R_i)$. Also muß $\xi e(vB + \tilde{g}) \equiv 0 \bmod \wp_F$ gelten. Dies gilt aber immer, da $v(B), v(\tilde{g}) > 0$. Demnach gilt

$$\sharp\{y\} = \sharp\{z\} = \sharp\mathbf{SL}(2,R_i)_s.$$

Ist $n = 1$ und $n' = 0$, so liegt y in $\mathbf{SL}(2,R_i) \cap jI(2,R_i)$. Das heißt hier müßte $eu \in \wp_F$ gelten, im Widerspruch dazu, daß wie gerade gesehen $\xi e(vB + \tilde{g}) \equiv 0 \bmod \wp_F$ gilt. Also gilt hier

$$\sharp\{y\} = 0.$$

Für $n = 0$ und $n' = 1$ muß $y \in \mathbf{SL}(2,R_i) \cap I(2,R_i)j$ liegen, also $\xi e(u + \tilde{g}') \in \wp_F$. Dies steht wieder im Widerspruch zu $\xi e(vB + \tilde{g}) \equiv 0 \bmod \wp_F$. Somit ist auch hier

$$\sharp\{y\} = 0.$$

Daraus liest man nun für $\underline{f, f' > 0}$ ab:

$$[I_0 : I_{i0}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{i0}}(k^{-1}\eta_r k)\, dk = \begin{cases} \sharp(\mathbf{SL}(2,R_i)_s \cap I(2,R_i)) & \text{falls } n = n' = 0 \\ \sharp\mathbf{SL}(2,R_i)_s & \text{falls } n = n' = 1 \\ 0 & \text{falls } n \neq n' \end{cases}.$$

Sei nun $f = 0$. Dann implizieren die beiden Bedingungen

$$b'\Theta\epsilon\pi^{f'} \equiv b\pi^f\xi \bmod \wp_F^i$$

und

$$\frac{b'}{\Theta\epsilon\pi^{f'}}\xi \equiv \frac{b}{\pi^f} \bmod \wp_F^i$$

die Kongruenz

$$\xi^2 \equiv (\Theta\epsilon\pi^{f'})^2 \bmod \wp_F^{i+f'-v(b')}.$$

Dies kann nur dann erfüllt werden, wenn auch $f' = 0$ gesetzt wird. Auf die gleiche Weise sieht man, daß $f' = 0$ auch $f = 0$ impliziert. Also kann man nur für $f = f' = 0$ und $n = n' = 0$ noch ein von null verschiedenes Integral von $\mathbf{1}_{I_{i0}}$ erhalten. Für $f = 0$ ist $N_{A\pi^{2f}} = R_i^*$. Ist ξ trotzdem ein Quadrat, so geht man genauso vor wie im Fall $f, f' > 0$ und erhält

$$\sharp\{y\} = \sharp\{z\} = \sharp(\mathbf{SL}(2,R_i)_s \cap I(2,R_i)).$$

Ist ξ kein Quadrat, so muß d eine Einheit sein. Man unterscheidet nach e:
1. Fall: Es kann $e \equiv 0 \bmod \wp_F$ gewählt werden. Dann muß $du \equiv 0 \bmod \wp_F$ sein, was $u \equiv 0 \bmod \wp_F$ erzwingt. Dann liest man aus Lemma 3.8 ab

$$\sharp\{y\} = \sharp\{z\} = \sharp(\mathbf{SL}(2,R_i)_s \cap jI(2,R_i)) = 0.$$

2. Fall: Es ist auch e Einheit. Dann folgt aus $ev + du \equiv 0 \bmod \wp_F$, daß $v \equiv -\frac{d}{e}u$. Somit gilt

$$1 = det\ z \equiv u^2(1 - \frac{d^2}{e^2}B) \bmod \wp_F.$$

Also ist $1-\frac{d^2}{e^2}B$ ein Quadrat. Das ist aber ein Widerspruch dazu, daß

$$\xi^{-1} = det\ x = e^2(1-\frac{d^2}{e^2}B).$$

kein Quadrat ist. Demnach gibt es in diesem Fall keine solchen y.

Faßt man die Aussagen für $\underline{f=f'=0}$ zusammen, so erhält man:

$$[I_0 : I_{i0}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{i0}}(k^{-1}\eta_r k)\ dk = \begin{cases} \sharp(\mathbf{SL}(2,R_i)_s \cap I(2,R_i)) & \text{falls } \xi \in \mathbf{o_F^*}^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Nun benötigt man noch die Integrale von $\mathbf{1}_{I_{i1}}$ und $\mathbf{1}_{I_{i2}}$. Damit diese nicht veschwinden, muß zunächst das Integral von $\mathbf{1}_{I_{i0}}$ von Null verschieden sein. Somit beschränkt sich die Betrachtung auf die Fälle $n=n'$.
Sei zuerst $n=n'=0$. Dann haben die Vertreter y von I_0/I_{ij} die Form (s. Lemma 3.7)

$$y = xz\tilde{y}\begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 \\ \mu & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $x=\phi_B(\xi^{-1})$, $\tilde{y}$ wie in Lemma 3.9 und $z \in \mathbf{SL}(2,R_i)_s \cap I(2,R_i)$. Nach Lemma 3.8 hat man für z eine eindeutige Zerlegung $z=\tilde{z}z'$ mit

$$\tilde{z} = \begin{pmatrix} u & vB \\ v & u \end{pmatrix}, \quad z' = \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1+g' \end{pmatrix},$$

wobei $g, g' \in \wp_F^{i-v(\tilde{b})}$ modulo $\wp_F^{i+1-v(\tilde{b})}$ eindeutig bestimmt sind. Die Elemente x und $\tilde{z}$ kommutieren mit s in $\mathbf{SL}(2,\mathbf{o_F})$. Also schreibt sich $y^{-1}sy \equiv As' \bmod \wp_F^{i+1}$ als

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -\mu & 1+\lambda \end{pmatrix}\tilde{y}^{-1}z'^{-1}sz'\tilde{y}\begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 \\ \mu & 1-\lambda \end{pmatrix} \equiv As' \bmod \wp_F^{i+1}.$$

Ausmultipliziert und gekürzt ergibt das:

$$\begin{pmatrix} a-\tilde{b}g & (1+g')\xi\tilde{b}B \\ (1+g')\xi^{-1}\tilde{b} & a+\tilde{b}g \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (1+\alpha)a' & \tilde{b}'B'+\beta a' \\ \tilde{b}' & (1-\alpha)a' \end{pmatrix} \bmod \wp_F^{i+1}.$$

Diese (insbesondere von λ und μ unabhängige) Bedingung wertet man nun aus: Die Einträge (11) und (22) sind äquivalent zu den Forderungen $a \equiv a' \bmod \wp_F^{i+1}$ und $-\tilde{b} \equiv \alpha a' \bmod \wp_F^{i+1}$. Letztere legt α durch g fest. Im Fall von $\mathbf{1}_{I_{i2}}$, d.h. $\alpha=0$, muß dann $g \in \wp_F^{i+1-v(\tilde{b})}$ liegen. Den Beitrag (21) wertet man aus mit Hilfe von $\xi^i\tilde{b}=\tilde{b}'$. Dann ergibt sich aus ihm die Bedingung: $g' \in \wp_F^{i+1-v(\tilde{b})}$. Im Eintrag (12) paßt man einfach β an.

Nun kann man die Integrale hinschreiben: Für $\underline{n = n' = 0}$ gilt falls $\underline{v(a-a') \geq i+1}$:

$$[I_0 : I_{i1}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{i1}}(k^{-1}\eta_r k)\, dk =$$

$$\sharp\{z \in \mathbf{SL}(2,R_i)_s \cap I(2,R_i) \mid g' \equiv 0 \bmod \wp_F^{i+1-(v(b)-f)}\} \cdot q$$

und

$$[I_0 : I_{i2}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{i2}}(k^{-1}\eta_r k)\, dk =$$

$$\sharp\{z \in \mathbf{SL}(2,R_i)_s \cap I(2,R_i) \mid g, g' \equiv 0 \bmod \wp_F^{i+1-(v(b)-f)}\} \cdot q^2.$$

Ist $v(a-a') = i$, so verschwinden die Integrale.
Sei nun $n = n' = 1$: Hier müssen nicht die Vertreter von I_0/I_{ij} betrachtet werden, sondern die etwas modifizierten Elemente

$$y = xz\tilde{y}j^{-1} \begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 \\ \mu & 1-\lambda \end{pmatrix} j,$$

mit x, z und $\tilde{y}$ wie oben. Dann schreibt sich die Bedingung $y^{-1}sy \equiv As' \bmod \wp_F^{i+1}$ als

$$\begin{pmatrix} a-\tilde{b}(g-\mu\xi^{-1}) & \xi\tilde{b}B \\ (1-2\lambda-g')\xi^{-1}\tilde{b} & a+\tilde{b}(g-\mu\xi^{-1}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (1+\alpha)a' & \tilde{b}'B' \\ \beta a' + (1-\alpha)b' & (1-\alpha)a' \end{pmatrix}.$$

Der Eintrag (12) fordert $\xi\tilde{b}B \equiv \tilde{b}'B' \bmod \wp_F^{i+1}$, und (11) und (22) implizieren $a \equiv a' \bmod \wp_F^{i+1}$. Falls $v(\tilde{b}) = v(\tilde{b}') > 0$, so impliziert (11), daß $\tilde{b}g \equiv -\alpha a' \bmod \wp_F^{i+1}$. Im Fall von I_{i2}, d.h. $\alpha = 0$, muß also $g \in \wp_F^{i+1-v(\tilde{b})}/\wp_F^i$ liegen. Im Fall I_{i1} kann man α und β wie gewünscht anpassen. Ist $v(\tilde{b}) = v(\tilde{b}') = 0$, so ist $g = 0$, also muß für $\alpha = 0$ zusätzlich $\mu = 0$ gelten. Somit erhält man:

Für $\underline{n = n' = 1}$ gilt, falls $\underline{v(a-a') \geq i+1}$ und $\underline{\xi b\pi^f A \equiv b'\Theta\epsilon\pi^{f'}A \bmod \wp_F^{i+1}}$:

$$[I_0 : I_{i1}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{i1}}(k^{-1}\eta_r k)\, dk = \sharp\mathbf{SL}(2,R_i)_s \cdot q$$

und

$$[I_0 : I_{i2}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{i2}}(k^{-1}\eta_r k)\, dk =$$

$$\begin{cases} \sharp\{z \in \mathbf{SL}(2,R_i)_s \mid g \equiv 0 \bmod \wp_F^{i+1-(v(b)-f)}\} \cdot q^2 & \text{falls } v(b)-f > 0 \\ \sharp\mathbf{SL}(2,R_i)_s \cdot q & \text{falls } v(b)-f = 0 \end{cases}.$$

Ist $v(a-a') = i$ oder $\xi b\pi^f A \not\equiv b'\Theta\epsilon\pi^{f'}A \bmod \wp_F^{i+1}$, so verschwinden die Integrale.

3.4.2 Benötigte Untergruppen von $\mathbf{SL}(2,R_i)\cap I(2,R_i)$

Die Berechnung der Integrale wurde auf das Zählen von Elementen y in gewissen Teilmengen der $\mathbf{SL}(2,F)$ zurückgeführt. Die Mächtigkeiten dieser Teilmengen sollen hier berechnet werden.
Für $i>0$ sei R_i definiert als der Restklassenring $\mathbf{o_F}/\wp_F^i$. Weiter sei

$$y=\begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}.$$

Dann erhält man

Lemma 3.10. *Es ist*

$$\sharp\left(\mathbf{SL}(2,R_i)\cap I(2,R_i)\right)=(q-1)q^{3i-2}.$$

Für $0\neq x\in R_i$ gilt, falls die Kongruenz $u^2\equiv x \bmod \wp_F$ lösbar ist,

$$\sharp\{y\in\mathbf{SL}(2,R_i)\cap I(2,R_i)\mid u^2\equiv x \bmod \wp_F\}=2q^{3i-2} \quad \textit{bzw.}$$

$$\sharp\{y\in\mathbf{SL}(2,R_i)\cap I(2,R_i)\mid u^2\equiv x \bmod \wp_F, v\equiv 0 \bmod \wp_F\}=2q^{3i-3}.$$

Beweis: Es sei

$$y=\begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}\in\mathbf{SL}(2,R_i)\cap I(2,R_i).$$

Nun zählt man die Möglichkeiten für die Koeffizienten: Da $w\in\wp_F/\wp_F^i$, erhält man $u,z\not\equiv 0 \bmod \wp_F$, und

$$uz-vw\equiv\left(\sum_{j=0}^{i-1}u_j\pi^j\right)\left(\sum_{k=0}^{i-1}z_k\pi^k\right)-vw\equiv 1 \bmod \wp_F^i,$$

mit $u_j,z_k\in\kappa_F$. Durch u_0 ist z_0 eindeutig bestimmt. Ist $v\equiv 0 \bmod \wp_F^i$, so ist sogar ganz z durch u eindeutig bestimmt, und für $w\in\wp_F/\wp_F^i$ erhält man keine weiteren Einschränkungen. Sei $v\in\wp_F^l/\wp_F^i$, aber $v\notin\wp_F^{l+1}/\wp_F^i$ für $0\leq l<i$. Das sind $(q-1)q^{i-l-1}$ Möglichkeiten für v. Um $\det=1$ zu erreichen, kann man uz durch vw ab der Stelle π^{l+1} anpassen. Davor sind die z_k durch die u_j eindeutig bestimmt. Also erhält man:

$$\begin{aligned}\sharp\mathbf{SL}(2,R_i)\cap I(2,R_i) &= q^{i-1}(q-1)q^{i-1}+\sum_{l=0}^{i-1}(q-1)q^{i-l-1}q^l(q-1)q^{i-1}q^{i-l-1}\\ &= (q-1)q^{3i-2}.\end{aligned}$$

Die anderen beiden Aussagen folgen sofort, indem man die Möglichkeiten für u und v wie gefordert einschränkt.

Da die Multiplikation mit $j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ innerhalb von $\mathbf{SL}(2,R_i)$ eine Translation beschreibt, ist

$$\sharp(\mathbf{SL}(2,R_i) \cap I(2,R_i)) = \sharp(\mathbf{SL}(2,R_i) \cap j^n I(2,R_i) j^{n'}).$$

Sei nun

$$s = \begin{pmatrix} a & bA\pi^f \\ b\pi^{-f} & a \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2,R_i).$$

Lemma 3.11. *Ist $f > 0$, so gilt für die Ordnung des Zentralisators von s:*

$$\sharp\mathbf{SL}(2,R_i)_s = 2q^{i+2(v(b)-f)}.$$

Für $f \geq 0$ ist

$$\sharp(\mathbf{SL}(2,R_i)_s \cap I(2,R_i)) = 2q^{i-1+2(v(b)-f))}.$$

Beweis: Aus Lemma 3.8 liest man ab:

$$\sharp\mathbf{SL}(2,R_i)_s = (\sharp \operatorname{kern} N_B) \cdot q^{2(v(b)-f)}.$$

Da $f > 0$, ist $v(B) = 2f > 0$. Dann ist $u \equiv \pm 1 \bmod \wp_F$ und im übrigen durch v festgelegt. Also: $\sharp \operatorname{kern} N_B = 2q^i$. Für $\sharp(\mathbf{SL}(2,R_i)_s \cap I(2,R_i))$ darf man in $\operatorname{kern} N_B$ nur Elemente mit $v \equiv 0 \bmod \wp_F$ nehmen, das sind $2q^{i-1}$ Stück.

Setzt man nun wieder

$$z = \begin{pmatrix} u & vB \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1+g' \end{pmatrix},$$

so kann man aus Lemma 3.11 sofort ablesen, daß für $f > 0$ und $v(\tilde{b}) = v(b) - f > 0$ gilt

$$\sharp\{z \in \mathbf{SL}(2,R_i)_s \mid g \in \wp_F^{i+1-v(\tilde{b})}\} = 2q^{i-1+2(v(b)-f)}.$$

Für $f \geq 0$ ist $v(\tilde{b}) > 0$ immer erfüllt, also

$$\sharp\{z \in \mathbf{SL}(2,R_i)_s \cap I(2,R_i) \mid g' \in \wp_F^{i+1-v(\tilde{b})}\} = 2q^{i-2+2(v(b)-f))} \quad \text{und}$$
$$\sharp\{z \in \mathbf{SL}(2,R_i)_s \cap I(2,R_i) \mid g, g' \in \wp_F^{i+1-v(\tilde{b})}\} = 2q^{i-3+2(v(b)-f))}.$$

3.5 Berechnung von $O_\eta^G(\mathbf{1}_I)$

3.5.1 Summationsbedingungen

Die Summation über die Parameter $i \geq 0$ und $j = 0,1,2,3$ sowie $(n,n',\epsilon,f,f') \in \Psi$ der Vertretersysteme $H\backslash G/I$ (s. Satz 3.1) bzw. $T\backslash H/I_0$ (s. Satz 3.4) ist in Wirklichkeit eine über endliche Teilmengen. Diese Einschränkungen sind bereits in den letzten Abschnitten gemacht worden und werden hier zusammengestellt, so daß man im folgenden auf diese Liste zurückgreifen kann. Die Bezeichnungen entnimmt man aus Kapiel 3.4. Es sei $\chi := v(a-a')$. Es muß gelten:

$$\chi = v(a-a') \geq i,$$

für die Integrale der I_{i1} und I_{i2} sogar $\chi > i$, wie man dem Abschnitt 3.4.1 entnimmt. Es empfiehlt sich, über die verschiedenen (n,n') separat zu summieren.

0. Fall: $i = 0$
Die Bedingung $\eta \in (T \cap rI_0r^{-1})$ liefert

$$v(b) \geq f + (1-n) \text{ und } v(b') \geq f' + (1-n').$$

Außerdem erzwingt $f = 0$ bzw. $f' = 0$, daß auch $n = 0$ bzw. $n' = 0$. Das heißt es muß stets

$$v(b) > 0, \quad v(b') > 0$$

gelten. Diese Einschränkung resultiert aus dem Vertretersystem $\{r(x) \mid x \in \Psi\}$ in Satz 3.4. Dort findet man auch die Bedingung

$$f - f' \equiv v(\theta) \bmod 2.$$

Alle diese Bedingungen müssen auch für alle anderen Fälle erfüllt sein.

I. Fall: (Bereich kleiner i) $0 < i \leq \min\{v(b)-f, v(b')-f'\}$
Hier hat man die Bedingung $\chi > 0$, die sich aber automatisch aus dem II. Fall ergibt. Die verschiedene Werte der Integrale empfehlen eine weitere Unterscheidung nach $i = v(b)-f$ oder $i = v(b')-f'$ oder $i < \min\{v(b)-f, v(b')-f'\}$.

II. Fall: $v(b)-f = v(b')-f' < i \leq \chi - (v(b)-f)$
Es ist

$$\xi = \frac{b\Theta\epsilon\pi^{f'}}{b'\pi^f} \in \mathbf{o}_\mathbf{F}^{*\,2}$$

zu erfüllen, was für genau eine der beiden Restklassen $\epsilon \in \mathbf{o}_\mathbf{F}^*/\mathbf{o}_\mathbf{F}^{*\,2}$ der Fall ist. Außerdem treten nur die Fälle

$$n = n'$$

auf.

(a) Bereich mittelgroßer i: $v(b)-f<i\leq\min\{v(b)+f,v(b')+f'\}$
Hier ist

$$v(b)-f=v(b')-f'.$$

(b) Bereich großer i: $v(b)+f<i\leq\chi-(v(b)-f)$
Hier muß gelten

$$v(b)=v(b')\ \text{ und }\ f=f'.$$

Den II. Fall sieht man folgendermaßen ein: Für $v(b)-f<i$ und $v(b')-f'<i$ müssen nach Lemma 3.9 die Bedingungen

$$b'\xi\equiv b\Theta\epsilon\pi^{f'-f}\bmod\wp_F^i$$

und

$$b'(\Theta\epsilon\pi^{f'})A\equiv b\pi^f A\xi\bmod\wp_F^i$$

erfüllt sein für ein $\xi\in{\mathbf{o}_\mathbf{F}^*}^2$. Dies ist für höchstens eines der ϵ der Fall. Aus der ersten Bedingung folgt $v(b)-f=v(b')-f'$. Aus der zweiten zieht man die Fallunterscheidung (a): $b\pi^fA\equiv 0$ bzw. (b): $b\pi^fA\not\equiv 0$. Der Fall (a) heißt $i\leq v(b)+f$ und impliziert $i\leq v(b')+f'$. Im Fall (b) erhält man $v(b)+f=v(b')+f'$, also $v(b)=v(b')$ und $f=f'$. Die Verkoppelung der zwei Bedingungen liefert

$$b^2-b'^2\equiv 0\bmod\wp_F^{i+v(b)-f}.$$

Nach Lemma 3.12 gilt $0<\chi=v(b^2-b'^2)$, also

$$i\leq\chi-(v(b)-f).$$

Ist insbesondere $0<\chi=2\min\{v(b),v(b')\}$, so tritt der Fall II.(b) nicht auf.
In diesem Zusammenhang kann man auch die Bedingung $\xi b\pi^fA\equiv b'\Theta\epsilon\pi^{f'}A\bmod\wp_F^{i+1}$, die für das Auftreten der Integrale von I_{i1} und I_{i2} für $n=n'=1$ im Fall $i>v(b)-f$ notwendig ist (sie steht am Schluß des Abschnitts 3.4.1), besser darstellen. Sie bedeutet nach obigem

$$i\leq\chi-1-(v(b)-f).$$

Lemma 3.12. *Es sei* $0<\chi=v(a-a')$. *Dann gilt*

$$\chi=v(b^2-b'^2).$$

Beweis: Ist $0<\chi=v(a-a')$, so kann man a' schreiben als $a'=a+a_1\pi^\chi$ mit einem $a_1\in\mathbf{o}_\mathbf{F}^*$. Dann folgt aus der Gleichheit der Normen $a^2-b^2A=a'^2-b'^2A$, daß $(b'^2-b^2)A=2aa_1\pi^\chi+a_1^2\pi^{2\chi}$. Daraus liest man die Behauptung ab, weil $v(A)=0$.

3.5.2 Die Auswertung in den einfachsten Fällen

Zur Anschauung und um die erhaltenen Formeln auf etwaige Fehler zu überprüfen, sollen nun die einfachsten Fälle des Integrals explizit berechnet werden, d.h. es soll

$$O_\eta^G(\mathbf{1}_I) = \frac{vol_G(I)}{vol_H(I_0)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{3} \sum_{n,n',\epsilon,f,f'} [\mathbf{o_T} : (T \cap rI_0r^{-1})][I_0 : I_{ij}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{ij}}(k^{-1}\eta_r k)\, dk$$

ausgewertet werden. Dabei wurde kurz $r = r(n, n', \epsilon, f, f')$ geschrieben.
Der Vorfaktor wird durch die Normierung der Maße bestimmt. Er hat den schönen Wert

$$\frac{vol_G(I)}{vol_H(I_0)} = \frac{1}{2}(q^2+1)\frac{[K_0 : I_0]}{[K : I]} = \frac{(q+1)^2(q^2+1)}{2(q^2+1)(q+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

Der Fall $v(b) = v(b') = 1$ und $\chi = 0$

Die einfachste Möglichkeit, ein reguläres Element η des Torus T zu wählen, für das das Integral nicht verschwindet, ist $\eta = (a + b\sqrt{A}, a' + b'\sqrt{A})$ mit $v(b) = v(b') = 1$ und $\chi = v(a - a') = 0$, also zum Beispiel $\eta = (a + \pi b_1\sqrt{A}, -a + \pi b_1\sqrt{A})$ mit $a, a', b_1 \in \mathbf{o_F^*}$. Dies impliziert sofort $i = 0$ und $j = 0, 1$.
Sei nun zunächst die Einbettung des Torus für $\theta = 1$ betrachtet, d.h. es muß die Bedingung

$$f - f' \equiv 0 \bmod 2$$

erfüllt werden. Dann erhält man die Beiträge für die verschiedenen Tupel (n, n') wie folgt:
$n = n' = 0$: Die Bedingungen $v(b) \geq f + (1 - n)$ und $v(b') \geq f' + (1 - n')$ liefern $f = f' = 0$. Das Integral von $\mathbf{1}_{I_0}$ erhält man nun zweimal wegen der verschiedenen ϵ und diese wiederum zweimal, weil auch $I_{01} = I_0$.
Für $n = 0, n' = 1$ ist zwingend $f = 0$ und $f' = 1$, was mit $f - f' \equiv 0 \bmod 2$ nicht vereinbar ist. Ebenso gibt es für $n = 1$ und $n' = 0$ keine Möglichkeiten für f und f'.
Für $n = n' = 1$ erhält man $f = f' = 1$ und auch hier viermal das Integral von $\mathbf{1}_{I_0}$.
Die Indices liest man aus Satz 3.6 ab und erhält:

$$O_\eta^G(\mathbf{1}_I) = \frac{1}{2}\left(4\frac{1}{2}(q+1)^2 + 4\frac{1}{2}(q+1)^2\right) = 2(q+1)^2.$$

Das Orbitalintegral für die zweite, nicht konjugierte Toruseinbettung mit $\theta = \pi$, also

$$f - f' \equiv 1 \bmod 2,$$

erhält man analog:
Hier liefern die Fälle $n = n'$ keinen Beitrag, da sie $f = f'$ erzwingen. Der Fall $n = 0$ und $n' = 1$ fordert $f = 0$ und $f' = 1$. Der Fall $n = 1$ und $n' = 0$ fordert $f = 1$ und $f' = 0$. Es tritt wieder viermal pro (n, n') das Integral von $\mathbf{1}_{I_0}$ auf, und man erhält:

$$O_{\eta'}^G(\mathbf{1}_I) = \frac{1}{2}\left(4\frac{1}{2}(q+1)^2 + 4\frac{1}{2}(q+1)^2\right) = 2(q+1)^2.$$

Dann ergibt sich die Differenz der beiden Orbitalintegrale zu

$$O_\eta^G(\mathbf{1}_I) - O_{\eta'}^G(\mathbf{1}_I) = 0.$$

Der Fall $v(b) = v(b') = 1$ **und** $\chi = 2$

Die nächst einfachste Möglichkeit, η zu wählen, ist $\eta = (a + b\sqrt{A}, a' + b'\sqrt{A})$ mit $v(b) = v(b') = 1$ und $\chi = 2$, denn die Möglichkeit $\chi = v(a - a') = 1$ liefert nach Lemma 3.12 ein triviales Integral.
Da die Bedingungen für f und f' nur von $v(b)$, $v(b')$ und n bzw. n' abhängen, sind dies dieselben wie im vorhergehenden Fall. Die obere Schranke für i ist aber $\chi = 2$, also hat man nur $i = 0, 1, 2$ zu untersuchen. Zunächst soll wieder das Orbitalintegral zum Torus mit $\theta = 1$ berechnet werden:
Für $n = n' = 0$ hat man $f = f' = 0$. Im Fall $i = 0$ erhält man also wieder viermal das Integral von $\mathbf{1}_{I_0}$. Ebenso erhält man das Integral von $\mathbf{1}_{I_{02}}$ je einmal pro Nebenklasse $\mathbf{o}_\mathbf{F}^*/{\mathbf{o}_\mathbf{F}^*}^2$. Es ist gleich

$$[I_0 : I_{02}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{02}} = q - 1.$$

Der Bereich kleiner i, d.h. $0 < i \leq \min\{v(b) - f, v(b') - f'\}$, umfaßt hier nur $i = 1$. Dafür liest man aus den Abschnitten 3.4.1 und 3.4.2 ab: Das Integral $\mathbf{1}_{I_{10}}$ tritt für jede der Nebenklassen $\mathbf{o}_\mathbf{F}^*/{\mathbf{o}_\mathbf{F}^*}^2$ auf und das wiederum zweimal, weil es gleich dem Intergal von $\mathbf{1}_{I_{03}}$ ist. Es hat den Wert

$$[I_0 : I_{10}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{10}} = \sharp(\mathbf{SL}(2, R_1) \cap I(2, R_1)) = q(q-1).$$

Desweiteren erhält man die Integrale für $\mathbf{1}_{I_{11}}$ und $\mathbf{1}_{I_{12}}$ jeweils einmal, da die vorhandenen Bedingungen für genau eine der beiden Restklassen $\mathbf{o}_\mathbf{F}^*/{\mathbf{o}_\mathbf{F}^*}^2$ erfüllt werden können. Das sind

$$[I_0 : I_{11}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{11}} = \sharp\{y \in \mathbf{SL}(2, R_1) \mid u^2 \equiv x \bmod \wp_F, w \in \wp_F\} \cdot q = 2q^2$$

und

$$[I_0 : I_{10}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{10}} = \sharp\{y \in \mathbf{SL}(2, R_1) \mid u^2 \equiv x \bmod \wp_F, v, w \in \wp_F\} \cdot q^2 = 2q^2.$$

Für den Bereich großerer i gilt die Bedingung $v(b) - f = v(b') - f' < i \leq \chi - (v(b) - f)$, was gleichbedeutend ist zu $1 < i \leq 1$. Dies Bereich ist somit leer. Also hat man für $n = n' = 0$ den Beitrag

$$[\mathbf{o}_\mathbf{T} : (T \cap rI_0r^{-1})] \left(4 + 2(q-1) + 4q(q-1) + 2 \cdot 2q^2\right) = (4q^2 - q + 1)(q+1)^2.$$

Die Fälle $n \neq n'$ treten wieder nicht auf. Für $n = n' = 1$ hat man auch $f = f' = 1$. Die Beiträge für $i = 0$ ergeben sich genauso wie im Fall $n = n' = 0$. Im Bereich kleiner i gilt die Bedingung $0 < i \leq \min\{v(b) - f, v(b') - f'\}$, also $0 < i \leq 0$. Der Bereich ist demnach leer. Der Bereich großer i, d.h. $v(b) - f < i \leq \chi - (v(b) - f)$, gibt die Möglicheiten $i = 1, 2$. Da außerdem immer $i \leq v(b) + f = v(b') + f' = 2$ gilt, befinden wir uns im Fall mittelgroßer i. Man erhält jedes Integral nur für eine der beiden Restklassen $\mathfrak{o}_\mathbf{F}^*/{\mathfrak{o}_\mathbf{F}^*}^2$. Wie für $n = n' = 0$ muß man aber das Integral von $\mathbf{1}_{I_{i0}}$ doppelt zählen, weil $I_{i-1,3} = I_{i,0}$. Es hat hier den Wert

$$[I_0 : I_{i0}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{i0}} = \sharp\mathbf{SL}(2, R_i)_s = 2q^i.$$

Die Bedingung $\chi > i$ für die Integrale von $\mathbf{1}_{I_{i1}}$ und $\mathbf{1}_{I_{i2}}$ ist nur noch für $i = 1$ erfüllt. Die weitere Bedingung

$$\xi b \pi^f A \equiv b' \Theta \epsilon \pi^{f'} A \bmod \wp_F^{i+1}$$

ist nun gleichbedeutend zu

$$b^2 \equiv b'^2 \bmod \wp_F^2,$$

was wegen $v(b) = v(b') = 1$ natürlich gegeben ist. Somit erhält man jeweils einmal

$$[I_0 : I_{11}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{11}} = \sharp\mathbf{SL}(2, R_1)_s \cdot q = 2q^2.$$

und

$$[I_0 : I_{12}] \int_{I_0} \mathbf{1}_{I_{12}} = \sharp\mathbf{SL}(2, R_1)_s \cdot q = 2q^2.$$

Der Beitrag für $n = n' = 1$ ist hier also

$$[\mathfrak{o}_\mathbf{T} : (T \cap r I_0 r^{-1})] \left(4 + 2(q-1) + 2 \cdot 2q + 2 \cdot 2q^2 + 2 \cdot 2q^2\right) = (4q^2 + 3q + 1)(q+1)^2.$$

Damit erhält man das Orbitalintegral zu

$$O_\eta^G(\mathbf{1}_I) = \frac{1}{2}(q+1)^2 \left(4q^2 - q + 1 + 4q^2 + 3q + 1\right) = (q+1)^2(4q^2 + q + 1).$$

Nun zum Orbitalintegral mit dem getwisteten Torus, d.h. $\theta = \pi$. Diesmal erhält man für $n = n'$ keine Beiträge. Für $n \neq n'$ hat man: Falls $n = 0$, $n' = 1$, so sind $f = 0$ und $f' = 1$. Umgekehrt gilt falls $n = 1$ und $n' = 0$ auch $f = 1$ und $f' = 0$. Die Integrale für $i = 0$, also die von $\mathbf{1}_{I_0}$ bzw. $\mathbf{1}_{I_{02}}$, hat man wieder vier- bzw. zweimal pro (n, n'). Der Bereich kleiner i, also $0 < i \leq \min\{v(b) - f, v(b') - f'\} = 0$, ist leer. Das gleiche gilt für den Bereich großer i, weil es hier nur falls $n = n'$ Beiträge gibt. Also hat man für das Orbitalintegral:

$$O_{\eta'}^G(\mathbf{1}_I) = \frac{1}{4}(q+1)^2 \left(2 \cdot 4 + 2 \cdot 2(q-1)\right) = (q+1)^2(q+1).$$

Die Differenz der Orbitalintegrale zu den verschiedenen Tori ist

$$O_\eta^G(\mathbf{1}_I) - O_{\eta'}^G(\mathbf{1}_I) = (q+1)^2 \left(4q^2 + q + 1 - (q+1)\right) = 4(q+1)^2 q^2,$$

und die Summe ist

$$O_\eta^G(\mathbf{1}_I) + O_{\eta'}^G(\mathbf{1}_I) = (q+1)^2\left(4q^2+q+1+(q+1)\right) = 2(q+1)^2(2q^2+q+1).$$

Für allgemeinere andere Überlegungen soll das stabile Orbitalintegral noch in zwei weiteren Fällen ausgerechnet werden.

$O_\eta^G(\mathbf{1}_I) + O_{\eta'}^G(\mathbf{1}_I)$ im Fall $\chi = 0$

Es sei $\chi = 0$. Dann erhält man nur für $i = 0$ Beiträge zu den Orbitalintegralen. Für $O_\eta(\mathbf{1}_I) + O_{\eta'}(\mathbf{1}_I)$ heißt das:
Der Beitrag für $n = n' = 0$:

$$\sum_{f=0}^{v(b)-1}\sum_{f'=0}^{v(b')-1}\frac{1}{2}(q+1)^2 q^f q^{f'}\cdot 4.$$

Der Beitrag für $n = 0$, $n' = 1$:

$$\sum_{f=0}^{v(b)-1}\sum_{f'=1}^{v(b')}\frac{1}{2}(q+1)^2 q^f q^{f'-1}\cdot 4.$$

Der Beitrag für $n = 1$, $n' = 0$:

$$\sum_{f=1}^{v(b)}\sum_{f'=0}^{v(b')-1}\frac{1}{2}(q+1)^2 q^{f-1} q^{f'}\cdot 4.$$

Der Beitrag für $n = n' = 1$:

$$\sum_{f=1}^{v(b)}\sum_{f'=1}^{v(b')}\frac{1}{2}(q+1)^2 q^{f-1} q^{f'-1}\cdot 4.$$

Diese Terme aufsummiert und mit dem Normierungsfaktor $\frac{1}{2}$ versehen ergeben

$$\begin{aligned} O_\eta^G(\mathbf{1}_I) + O_{\eta'}^G(\mathbf{1}_I) &= \frac{1}{2}4\cdot 4\frac{1}{2}(q+1)^2\sum_{f=0}^{v(b)-1} q^f \sum_{f'=0}^{v(b')-1} q^{f'} \\ &= 4(q+1)^2\left(\frac{q^{v(b)}-1}{q-1}\right)\left(\frac{q^{v(b')}-1}{q-1}\right). \end{aligned}$$

$O_\eta^G(\mathbf{1}_I) + O_{\eta'}^G(\mathbf{1}_I)$ im Fall $m = 1$ und $\chi > 0$

Es sei nun $m = 1$ und $\chi > 0$. Dann impliziert Lemma 3.12 sofort $\chi \geq 2$. Ist $\chi = 0$, so findet man das Ergebnis im vorigen Abschnitt.
Der Beitrag von $i = 0$ ergibt sich genauso wie im vorhergehenden Fall für $\chi = 0$, nur daß man hier nicht den Gewichtungsfaktor 4 sondern den Faktor $2(2 + q - 1)$ benötigt, denn für $\chi > 0$ tritt das Integral zu I_{02} auf:

$$(q+1)^2 4(q+1)\left(\frac{q^{v(b)}-1}{q-1}\right)\left(\frac{q^{v(b')}-1}{q-1}\right).$$

Die im folgenden benötigten Integrale $[I_0 : I_{ij}]\int \mathbf{1}_{I_{ij}}$ schlägt man am besten im nachfolgenden Kapitel 3.5.3 nach, wo sie weitaus intensiver gebraucht und deshalb dort explizit angegeben werden.
Der Beitrag aus dem Bereich $0 < i \leq \min\{v(b) - f, v(b') - f'\}$ ergibt sich wie folgt: Es gilt zwingend $i = 1$, und damit ist die Bedingung für die Integrale zu I_{i1} und I_{i2} immer erfüllt.
Nun erhält man falls $v(b) = m = 1$, daß $f = 0$ ist, also auch $n = 0$. Demnach hat man für $n = n' = 0$:

$$\sum_{f'=0}^{v(b')-1} \frac{1}{2}(q+1)^2 q^{f'} 4(q-1)q + \frac{1}{2}(q+1)^2 q^{v(b')-1}(2q^{3-2}q + 2q^{3-3}q^2) =$$
$$2(q+1)^2 q(q^{v(b')} - 1) + 2(q+1)^2 q^{v(b')+1}.$$

Und für $n = 0$, $n' = 1$ erhält man den Beitrag

$$\sum_{f'=1}^{v(b')-1} \frac{1}{2}(q+1)^2 q^{f'-1} 4(q-1)q^{3-2} = 2(q+1)^2 q(q^{v(b')-1} - 1).$$

Falls $v(b') = m = 1$, so ist $f' = 0$ und somit auch $n' = 0$. Dann hat man als Beitrag für $n = n' = 0$:

$$\sum_{f=0}^{v(b)-1} \frac{1}{2}(q+1)^2 q^{f} 4(q-1)q + \frac{1}{2}(q+1)^2 q^{v(b)-1}(2q^{3-2}q + 2q^{3-3}q^2) =$$
$$2(q+1)^2 q(q^{v(b)} - 1) + 2(q+1)^2 q^{v(b)+1}.$$

Der Beitrag von $n = 1$, $n' = 0$ lautet:

$$\sum_{f=1}^{v(b)-1} \frac{1}{2}(q+1)^2 q^{f-1} 4(q-1)q^{3-2} = 2(q+1)^2 q(q^{v(b)-1} - 1).$$

Man kann also den Beitrag aus dem Bereich $0 < i \leq \min\{v(b) - f, v(b') - f'\}$ unabhängig davon, ob $m = v(b)$ oder $m = v(b')$, zusammenfassen zu

$$2(q+1)^2\left(2q^{v(b)+v(b')} + q^{v(b)+v(b')-1} - 2q^m\right).$$

Den Beitrag aus dem Bereich $v(b)-f=v(b')-f'<i\leq\chi-(v(b)-f)$ kann man sogar ganz dem nächsten Kapitel 3.5.3 entnehmen, da er dem entsprechenden Beitrag dort bis aufs Vorzeichen gleicht:

$$2(q+1)^2q^{v(b)+v(b')}\frac{(q^m-1)}{(q-1)q}(4q^{\chi+1-m}-2q^2-q-1).$$

Das gewünschte stabile Orbitalintegral erhält man nun wieder durch Aufsummieren unter Beachtung des Normierungsfaktors $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}&O_\eta^G(\mathbf{1}_I)+O_{\eta'}^G(\mathbf{1}_I)=\\&\frac{(q+1)^2}{(q-1)^2}2(q+1)(q^{v(b)}-1)(q^{v(b')}-1)+(q+1)^2(2q^{v(b)+v(b')}-2q^m)\\&+\frac{(q+1)^2}{(q-1)}q^{v(b)+v(b')-1}(4q^\chi-2q^2-2).\end{aligned}$$

Nutzt man $m=1$ und setzt $M=\max\{v(b),v(b')\}$, so kann man dies vereinfachen zu

$$O_\eta^G(\mathbf{1}_I)+O_{\eta'}^G(\mathbf{1}_I)=2\frac{(q+1)^2}{(q-1)}\left(2q^{\chi+M}-q^2-1\right).$$

Spezifiziert man nun auf $m=M=1$ und $\chi=2$, so erhält man das schon früher gefundene Ergebnis

$$O_\eta^G(\mathbf{1}_I)+O_{\eta'}^G(\mathbf{1}_I)=2(q+1)^2(2q^2+q+1).$$

Bemerkung 3.13. *An diesem einfachen Beispiel $m=1$ und $\chi>0$ kann man ablesen, daß sich die „naive“ Vermutung, das stabile Orbitalintegral ließe sich im wesentlichen, d.h. bis auf eine multiplikative Konstante, als Produkt von vier den positiven Wurzeln (des Wurzelsystems der $\mathbf{sl}(4)$) assoziierten Faktoren der Form*

$$\frac{q^{a_j}-1}{q-1}$$

schreiben, widerlegen.

Beweis: Nimmt man an, eine solche Produktschreibweise sei möglich, dürften in dem von der Variablen η abhängigen Teil

$$\left(2q^{\chi+M}-q^2-1\right)$$

des stabilen Orbitalintegrals nur (komplexe) Einheitswurzeln als Nullstellen auftreten, oder die Nullstellen müßten in allen stabilen Orbitalintegralen auftreten, das heißt auch im Spezialfall $m=M=1$ und $\chi=2$. Dessen Nullstellen sind $\alpha_{1/2}=\frac{1}{4}(-1\pm\sqrt{-7})$. Setzt man diese in den Ausdruck beliebiger M und χ ein, so erhält man

$$2(\alpha_{1/2})^{\chi+M}=-\frac{1}{2}(\alpha_{1/2}-1).$$

Ein Betragsvergleich beider Seiten liefert

$$2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\chi+M} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

was offenbar nur für $\chi + M = 3$ erfüllt werden kann. Also dürften nur Einheitswurzeln in $2q^{\chi+M} - q^2 - 1$ aufgehen, was wie gesehen schon im Fall $m = M = 1$ und $\chi = 2$ nicht der Fall ist.

3.5.3 Die Differenz $O^G_\eta(\mathbf{1}_I) - O^G_{\eta'}(\mathbf{1}_I)$

Im folgenden soll die Differenz

$$O^G_\eta(\mathbf{1}_I) - O^G_{\eta'}(\mathbf{1}_I)$$

berechnet werden. Für ihre Form existiert eine Vermutung von Langlands (vgl. Bem. 3.14), sodaß das Ergebnis einerseits diese Vermutung bestätigen kann, aber andererseits auch als eine Art Probe dienen kann, die die Korrektheit der bisherigen Rechnungen nahelegt.
Man hält sich an die Summationsbedingungen aus Abschnitt 3.5.1.
Immer hat man den Index

$$[\mathfrak{o}_\mathbf{T} : (T \cap rI_0r^{-1})] = \frac{1}{2}(q+1)^2 q^{f-n} q^{f'-n'}$$

zu berücksichtigen.
Durch die von n und n' abhängigen Bereiche $n \le f + (1-n) \le v(b)$ und $n' \le f' + (1-n') \le v(b')$ erhält man verschiedene Summationsgrenzen für f und f'.

Beiträge für $i = 0$

Das Integral von $\mathbf{1}_{I_0}$ erhält man mit der Multiplizität 2, weil $I_0 = I_{01}$; das Integral von $\mathbf{1}_{I_{20}}$ erhält man mit einem Faktor δ, wobei definiert wird: $\delta = 0$, falls $\chi = 0$ und $\delta = 1$, falls $\chi > 0$. Einen zusätzlichen Faktor 2 erhält man, weil man beide Quadratklassen $\mathfrak{o}_\mathbf{F}^*/{\mathfrak{o}_\mathbf{F}^*}^2$ berücksichtigen muß.
Der Beitrag für $n = n' = 0$:

$$\sum_{f=0}^{v(b)-1} \sum_{f'=0}^{v(b')-1} (-1)^{f+f'} \frac{1}{2}(q+1)^2 q^f q^{f'} 2(2 + \delta(q+1)).$$

Der Beitrag für $n = 0$, $n' = 1$:

$$\sum_{f=0}^{v(b)-1} \sum_{f'=1}^{v(b')} (-1)^{f+f'} \frac{1}{2}(q+1)^2 q^f q^{f'-1} 2(2 + \delta(q+1)) =$$

$$\sum_{f=0}^{v(b)-1} \sum_{f'=0}^{v(b')-1} (-1)^{f+f'+1} \frac{1}{2}(q+1)^2 q^f q^{f'} 2(2 + \delta(q+1)).$$

Die Summe dieser Beiträge ist offensichtlich gleich null. Ebenso findet man:
Der Beitrag für $n=1$, $n'=0$:

$$\sum_{f=1}^{v(b)}\sum_{f'=0}^{v(b')-1}(-1)^{f+f'}\frac{1}{2}(q+1)^2q^{f-1}q^{f'}2(2+\delta(q+1)).$$

Der Beitrag für $n=n'=1$:

$$\sum_{f=1}^{v(b)}\sum_{f'=1}^{v(b')}(-1)^{f+f'}\frac{1}{2}(q+1)^2q^{f-1}q^{f'-1}2(2+\delta(q+1)) =$$
$$\sum_{f=1}^{v(b)}\sum_{f'=0}^{v(b')-1}(-1)^{f+f'+1}\frac{1}{2}(q+1)^2q^{f-1}q^{f'}2(2+\delta(q+1)).$$

Auch diese beiden Beiträge heben sich gegeneinander weg. Demnach erhält man für $i=0$ keinen Beitrag zur Differenz $O^G_\eta(\mathbf{1}_I)-O^G_{\eta'}(\mathbf{1}_I)$.

Beiträge aus dem Bereich $0<i\leq\min\{v(b)-f,v(b')-f'\}$

Dieser Bereich tritt nur auf, wenn $\chi>0$ erfüllt ist. Auch hier hat man bei dem Integral von I_{i0} einen Faktor zwei, weil $I_{i-1,3}=I_{i0}$. Insgesamt erhält man für die beiden Quadratklassen $\mathbf{o}_\mathbf{F}^*/{\mathbf{o}_\mathbf{F}^*}^2$ einen weiteren Faktor 2. Zunächst sollen die auftretenden Integrale explizit aufgelistet werden. Man liest sie aus den Abschnitten 3.4.1 und 3.4.2 ab.
Für beliebige n und n' hat man:

$$[I_0:I_{i0}]\int\mathbf{1}_{I_{i0}}=(q-1)q^{3i-2}.$$

Für $n=n'=0$ und $i<\chi$ gilt:

$$[I_0:I_{i1}]\int\mathbf{1}_{I_{i1}}=\begin{cases}(q-1)q^{3i-2}q & \text{falls } (i<v(b)-f \text{ und } i<v(b')-f')\\ 2q^{3i-2}q & \text{falls } (i=v(b)-f=v(b')-f \text{ und } \xi\in{\mathbf{o}_\mathbf{F}^*}^2),\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$$[I_0:I_{i2}]\int\mathbf{1}_{I_{i2}}=\begin{cases}(q-1)q^{3i-2}q^2 & \text{falls } (i<v(b)-f \text{ und } i<v(b')-f')\\ 2q^{3i-3}q^2 & \text{falls } (i=v(b)-f=v(b')-f' \text{ und } \xi\in{\mathbf{o}_\mathbf{F}^*}^2).\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Für $n=0$, $n'=1$ und $i<\chi$ gilt:

$$[I_0:I_{i1}]\int\mathbf{1}_{I_{i1}}=\begin{cases}(q-1)q^{3i-2}q & \text{falls } i<v(b)-f\\ 0 & \text{sonst}\end{cases},$$

$$[I_0 : I_{i2}] \int \mathbf{1}_{I_{i2}} = \begin{cases} (q-1)q^{3i-2}q^2 & \text{falls } i < v(b) - f \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für $n = 1$, $n' = 0$ und $i < \chi$ gilt:

$$[I_0 : I_{i1}] \int \mathbf{1}_{I_{i1}} = \begin{cases} (q-1)q^{3i-2}q & \text{falls } i < v(b') - f' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$[I_0 : I_{i2}] \int \mathbf{1}_{I_{i2}} = \begin{cases} (q-1)q^{3i-2}q^2 & \text{falls } i < v(b') - f' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für $n = n' = 1$ und $i < \chi$ gilt:

$$[I_0 : I_{i1}] \int \mathbf{1}_{I_{i1}} = (q-1)q^{3i-2}q,$$

$$[I_0 : I_{i2}] \int \mathbf{1}_{I_{i2}} = (q-1)q^{3i-2}q^2.$$

Die unterschiedlichen Werte der Integrale legen eine weitere Unterteilung des Bereichs nahe:
Teilbereich (1): $i < v(b) - f$ und $i < v(b') - f'$
Teilbereich (2): $i = v(b) - f = v(b') - f'$
Teilbereich (3): $i = v(b) - f$ und $i < v(b') - f'$
Teilbereich (4): $i < v(b) - f$ und $i = v(b') - f'$
Diese Teilbereiche werden zuerst für

$$m := \min\{v(b), v(b')\} > 1$$

behandelt und anschließend gesondert für $m = 1$, um dauernde Fallunterscheidungen zu vermeiden.
Teilbereich (1): $i < v(b) - f$ und $i < v(b') - f'$
Zur Abkürzung sei

$$C := (q+1)^2(q-1)(2+q+q^2)q^{-2},$$

ein allen Beiträgen gemeinsamer Faktor.
Der Beitrag für $n = n' = 0$:
Da $0 \le f \le v(b) - 1$ und $0 \le f' \le v(b') - 1$ hat man für i mit $m - 1$ eine obere Schranke gegeben, und man erhält den Beitrag

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{f=0}^{v(b)-i-1} \sum_{f'=0}^{v(b')-i-1} C(-1)^{f+f'} q^f q^{f'} q^{3i}.$$

Der Beitrag für $n = 0$, $n' = 1$:
Hier folgt aus $0 \le f \le v(b)-1$ und $1 \le f' \le v(b')$, daß $i \le \min\{v(b)-1, v(b')-2\} =: m_{01}$, also:

$$\sum_{i=1}^{m_{01}} \sum_{f=0}^{v(b)-i-1} \sum_{f'=1}^{v(b')-i-1} C(-1)^{f+f'} q^f q^{f'-1} q^{3i}.$$

Der Beitrag für $n=1$, $n'=0$:
Der Bereich zulässiger i ergibt sich aus $1 \le f \le v(b)$ und $0 \le f' \le v(b')-1$ als $1 \le i \le \min\{v(b)-2, v(b')-1\} =: m_{10}$, und der Beitrag damit zu

$$\sum_{i=1}^{m_{10}} \sum_{f=1}^{v(b)-i-1} \sum_{f'=0}^{v(b')-i-1} C(-1)^{f+f'} q^{f-1} q^{f'} q^{3i}.$$

Der Beitrag für $n=n'=1$:
Aus $1 \le f \le v(b)$ und $1 \le f' \le v(b')$ folgt nun $i \le m-2$, also hat man

$$\sum_{i=1}^{m-2} \sum_{f=1}^{v(b)-i-1} \sum_{f'=1}^{v(b')-i-1} C(-1)^{f+f'} q^{f-1} q^{f'-1} q^{3i}.$$

Diese Terme werden nun zunächst bis $i=m-2$ addiert. (Ist $m=2$, so tritt dieser Teil also nicht auf.) Dazu kommen danach noch Restterme in Abhängigkeit von $v(b)$ und $v(b')$. In den Beiträgen für $n=0$ bleiben für $i \le m-2$ nur die Terme mit $f'=v(b')-i-1$ bestehen:

$$\sum_{i=1}^{m-2} \sum_{f=0}^{v(b)-i-1} C(-1)^{f+v(b')-i-1} q^{f} q^{v(b')-1} q^{2i}.$$

Dasselbe gilt für $n=1$:

$$\sum_{i=1}^{m-2} \sum_{f=0}^{v(b)-i-2} C(-1)^{v(b')-i-2} q^{f} q^{v(b')-1} q^{2i}.$$

Insgesamt erhält man damit den Beitrag

$$\sum_{i=1}^{m-2} C(-1)^{v(b)+v(b')} q^{v(b)+v(b')-2} q^{i}.$$

Nun zu den Resttermen:
1. Fall: $m=v(b)=v(b')$:
Dann erhält man für $n=n'=0$ noch einen Beitrag für $i=m-1$:

$$C(-1)^{v(b)+v(b')} q^{v(b)+v(b')-2} q^{m-1}.$$

2. Fall: $m=v(b)<v(b')$:
Dann hat man für $n=n'=0$ zusätzlich $i=m-1$, also

$$\sum_{f'=0}^{v(b')-m} C(-1)^{f'} q^{3m-3}.$$

Und für $n=0$, $n'=1$ und $i=m-1$ den Beitrag

$$\sum_{f'=0}^{v(b')-m-1} C(-1)^{f'+1} q^{3m-3}.$$

Auch hier ist also der auftretende Restterm gleich

$$C(-1)^{v(b)+v(b')}q^{v(b)+v(b')-2}q^{m-1}.$$

3. Fall: $m = v(b') < v(b)$:
Aus der Symmetrie zum 2. Fall erhält man nun Restterme für $n = n' = 0$ und $n = 1$, $n' = 0$. Diese addieren sich wieder zu

$$C(-1)^{v(b)+v(b')}q^{v(b)+v(b')-2}q^{m-1}.$$

Faßt man die Terme aus dem Hauptteil $1 \leq i \leq m-2$ und dem Rest $i = m-1$ zusammen, so ergibt sich als Beitrag des Teilbereichs (1):

$$(-1)^{v(b)+v(b')}(q+1)^2(2+q+q^2)q^{v(b)+v(b')-3}(q^{m-1}-1).$$

Teilbereich (2): $i = v(b) - f = v(b') - f'$
Der Beitrag für $n = n' = 0$:
Aus $0 \leq f \leq v(b) - 1$ und $0 \leq f' \leq v(b') - 1$ folgt $1 \leq i \leq m$. Also:

$$\frac{1}{2}(q+1)^2 \sum_{i=1}^{m} q^f q^{f'}(-1)^{f+f'}4(2q-1)q^{3i-2} =$$
$$(-q)^{v(b)+v(b')}2(q+1)^2(2q-1)\frac{q^m-1}{(q-1)q}.$$

Der Beitrag für $n = n' = 1$:
Aus $1 \leq f \leq v(b)$ und $1 \leq f' \leq v(b')$ folgt $1 \leq i \leq m-1$.

$$\frac{1}{2}(q+1)^2 \sum_{i=1}^{m-1} q^{f-1}q^{f'-1}2(q-1)(2+q+q^2)q^{3i-2} =$$
$$(-q)^{v(b)+v(b')}(q+1)^2(2+q+q^2)(q-1)\frac{q^{m-1}-1}{(q-1)q^3}.$$

Der Beitrag für $n = 0$, $n' = 1$:
Hier ist $0 \leq f \leq v(b)-1$ und $1 \leq f' \leq v(b')$. Im Fall $m = v(b')$ ist dann $1 \leq i \leq m-1$, und man erhält

$$\frac{1}{2}(q+1)^2 \sum_{i=1}^{m-1} q^f q^{f'-1}4(q-1)q^{3i-2} =$$
$$(-q)^{v(b)+v(b')}2(q+1)^2(q-1)\frac{q^{m-1}-1}{(q-1)q^2}.$$

Im Fall $m \neq v(b')$ ist $1 \leq i \leq m$, also

$$(-q)^{v(b)+v(b')}2(q+1)^2(q-1)\frac{q^m-1}{(q-1)q^2}.$$

Der Beitrag für $n=1$, $n'=0$:
Hier hat man $1 \leq f \leq v(b)$ und $0 \leq f' \leq v(b')-1$. Im Fall $m = v(b)$ ist also $1 \leq i \leq m-1$, und damit ist der Beitrag

$$\frac{1}{2}(q+1)^2\sum_{i=1}^{m-1} q^{f-1}q^{f'}4(q-1)q^{3i-2} =$$
$$(-q)^{v(b)+v(b')}2(q+1)^2(q-1)\frac{q^{m-1}-1}{(q-1)q^2}.$$

Im Fall $m \neq v(b)$ ist $1 \leq i \leq m$ und der Beitrag gleich

$$(-q)^{v(b)+v(b')}2(q+1)^2(q-1)\frac{q^m-1}{(q-1)q^2}.$$

Fast man die Beiträge für $n \neq n'$ zusammen, so erhält man

$$(-q)^{v(b)+v(b')-2}2(q+1)^2\left((q^{m-1}-1)+(q^{m'}-1)\right),$$

wobei $m'=m$ falls $v(b) \neq v(b')$ und $m'=m-1$ falls $v(b)=v(b)'$.

Teilbereich (3): $i = v(b)-f$ und $i < v(b')-f'$
Der Beitrag für $n=n'=0$:
Hier ist $m_{00} := \min\{v(b), v(b')-1\}$ die obere Schranke für i und $v(b')-i-1$ eine für f'. Dann hat man den Beitrag

$$\sum_{i=1}^{m_{00}}\sum_{f'=0}^{v(b')-i-1} 2(q+1)^2(q-1)q^{v(b)-2}(-1)^{v(b)-i+f'}q^{2i+f'}.$$

Der Beitrag für $n=0$, $n'=1$:
Obere Schranke für i ist hier $m_{01} := \min\{v(b), v(b')-2\}$. Also:

$$\sum_{i=1}^{m_{01}}\sum_{f'=1}^{v(b')-i-1} 2(q+1)^2(q-1)q^{v(b)-2}(-1)^{v(b)-i+f'}q^{2i+f'-1}.$$

Die Beiträge für $n=0$ kann man zusammenfassen:
Im Fall von $v(b')=m$ oder $m=v(b)=v(b')-1$ erhält man:

$$\left(\sum_{i=1}^{v(b')-1}\sum_{f'=0}^{v(b')-i-1} - \sum_{i=1}^{v(b')-2}\sum_{f'=0}^{v(b')-i-2}\right) 2(q+1)^2(q-1)q^{v(b)-2}(-1)^{v(b)-i+f'}q^{2i+f'} =$$

$$= 2(q+1)^2(q-1)q^{v(b)-2}\left((-1)^{v(b)+v(b')+1}q^{2v(b')-2} + (-1)^{v(b)+v(b')+1}q^{v(b')-1}\sum_{i=1}^{v(b')-2} q^i\right)$$

$$= (-1)^{v(b)+v(b')+1}2(q+1)^2q^{v(b)+v(b')-2}(q^{v(b')-1}-1).$$

Falls $v(b) \leq v(b')-2$, so ist $m_{00} = m_{01} = v(b)$, und man hat den Beitrag

$$(-1)^{v(b)+v(b')+1}2(q+1)^2q^{v(b)+v(b')-2}(q^{v(b)}-1).$$

Setzt man $\mu = m-1$ falls $v(b') = m$ und $\mu = m$ sonst, so schreibt sich der Beitrag für $n=0$ einheitlich als

$$(-1)^{v(b)+v(b')+1}2(q+1)^2q^{v(b)+v(b')-2}(q^{\mu}-1).$$

Der Beitrag für $n=1$, $n'=0$:
Obere Schranke für i ist hier $m_{10} := \min\{v(b)-1, v(b')-1\}$, und der Beitrag gleich

$$\sum_{i=1}^{m_{10}}\sum_{f'=0}^{v(b')-i-1}(q+1)^2(q-1)(2+q+q^2)q^{v(b)-3}q^{2i+f'}(-1)^{v(b)-i+f'}.$$

Der Beitrag für $n=n'=1$:
Die obere Schranke für i ist nun $m_{11} := \min\{v(b)-1, v(b')-2\}$, d.h. man hat den Beitrag

$$\sum_{i=1}^{m_{11}}\sum_{f'=1}^{v(b')-i-1}(q+1)^2(q-1)(2+q+q^2)q^{v(b)-3}q^{2i+f'-1}(-1)^{v(b)-i+f'}.$$

Die Beiträge für $n=1$ kann man wiederum zusammen fassen:
Ist $m = v(b')$, so hat man

$$\left(\sum_{i=1}^{v(b')-1}\sum_{f'=0}^{v(b')-i-1} - \sum_{i=1}^{v(b')-2}\sum_{f'=0}^{v(b')-i-2}\right)(q+1)^2(2+q+q^2)(q-1)q^{v(b)-3}q^{2i+f'}(-1)^{v(b)-i+f'} =$$

$$= (-1)^{v(b)+v(b')+1}(q+1)^2(2+q+q^2)(q-1)q^{v(b)+v(b')-3}\left(q^{v(b')-2} + \sum_{i=1}^{v(b')-2} q^{i-1}\right) =$$

$$= (-1)^{v(b)+v(b')+1}(q+1)^2(2+q+q^2)q^{v(b)+v(b')-3}(q^{m-1}-1).$$

Ist $v(b') \neq m$, so ist $m_{10} = m_{11} = v(b)-1 = m-1$, und der Beitrag für $n=1$ ergibt sich wiederum zu

$$(-1)^{v(b)+v(b')+1}(q+1)^2(2+q+q^2)q^{v(b)+v(b')-3}(q^{m-1}-1).$$

Teilbereich (4): $i < v(b) - f$ und $i = v(b') - f'$
Dieser Bereich folgt nun durch Symmetrie sofort aus Teilbereich (3):
Für $n' = 0$ setzt man $\mu' = m - 1$ falls $m = v(b')$ und $\mu' = m$ sonst und erhält den Beitrag

$$(-1)^{v(b)+v(b')+1} 2(q+1)^2 q^{v(b)+v(b')-2}(q^{\mu'} - 1).$$

Für $n' = 1$ ergibt sich der Beitrag

$$(-1)^{v(b)+v(b')+1}(q+1)^2(2+q+q^2)q^{v(b)+v(b')-3}(q^{m-1} - 1).$$

Die Teilbereiche (1) - (4) kann man nun zusammenfassen:
Die Terme aus den Teilbereichen (3) und (4) für $n = 0$ bzw. $n' = 0$ sind bis aufs Vorzeichen gleich dem Beitrag für $n \neq n'$ aus Teilbereich (2). Der Term für $n = 1$ aus Teilbereich (3) hebt sich gegen den für $n = n' = 1$ aus Teilbereich (2) weg. Ebenso kürzt sich der Term für $n' = 1$ mit Teilbereich (1). Somit bleibt als einziger Beitrag des Bereichs kleiner i der Term für $n = n' = 0$ aus dem Teilbereich (2):

$$(-q)^{v(b)+v(b')} 2(q+1)^2(2q-1)\frac{q^m - 1}{(q-1)q}.$$

Nun muß noch der Bereich kleiner i für $m = \min\{v(b), v(b')\} = 1$ nachgeholt werden:
Teilbereich (1): Hier kann man die Forderung $1 \leq i < m = 1$ nicht erfüllen.
Teilbereich (2): Die Forderung $1 \leq i \leq m = 1$ erfüllt nur $i = 1$.
Falls $v(b) = v(b') = 1$, so muß $f = f' = 0$ gelten, d.h. man kann nur für $n = n' = 0$ einen Beitrag bekommen. Dieser ist gleich

$$(-1)^{v(b)+v(b')} 2(q+1)^2(2q-1)q^{v(b)+v(b')-1}.$$

Ist $v(b) \neq v(b')$, so erhält man für $n = n' = 0$ denselben Beitrag. Zusätzlich gibt es noch einen Term entweder von $n = 0$, $n' = 1$ (falls $m = v(b)$) oder von $n = 1$, $n' = 0$ (falls $m = v(b')$). Er hat den Wert

$$(-1)^{v(b)+v(b')} 2(q+1)^2(q-1)q^{v(b)+v(b')-1}.$$

Teilbereich (3): Die Forderung $1 \leq i = v(b) - f < v(b') - f'$ kann man für $v(b') = m = 1$ nicht erfüllen. Hier gibt es also nur für $m = v(b) < v(b')$ einen Beitrag. Dieser besteht aus den Termen für $n = 0$ und lautet

$$\left(\sum_{f'=0}^{v(b')-2} - \sum_{f'=0}^{v(b')-3} \right) (-1)^{v(b)-1+f'} 2(q+1)^2(q-1)q^{v(b)+f'} =$$
$$(-1)^{v(b)+v(b')+1} 2(q+1)^2(q-1)q^{v(b)+v(b')-2},$$

falls $v(b') \geq m+2$. Falls $v(b') = m+1 = 2$, so ergibt sich ebenfalls der Beitrag

$$(-1)^{v(b)+v(b')+1} 2(q+1)^2(q-1)q^{v(b)+v(b')-2}.$$

Teilbereich (4): Analog zu Teilbereich (3) erhält man keinen Beitrag, wenn $v(b) = m = 1$. Ist $m = v(b') < v(b)$, so hat man wiederum

$$(-1)^{v(b)+v(b')+1} 2(q+1)^2(q-1)q^{v(b)+v(b')-2}.$$

Insgesamt liest man nun ab, daß in jedem Fall nur der Beitrag

$$(-1)^{v(b)+v(b')} 2(q+1)^2(2q-1)q^{v(b)+v(b')-1}$$

übrig bleibt. Dies ist die Spezialisierung auf $m = 1$ des eigentlich für $m > 1$ erhaltenen Endbeitrags

$$(-q)^{v(b)+v(b')} 2(q+1)^2(2q-1)\frac{q^m-1}{(q-1)q}.$$

Beiträge aus dem Bereich $v(b) - f < i \leq \chi - (v(b) - f)$

Dieser Bereich tritt nur auf, wenn $\chi > 0$ erfüllt ist. Im Bereich mittelgroßer und großer i muß $\nu := v(b) - f = v(b') - f'$ gelten. Außerdem hat man für $n \neq n'$ keine Beiträge. Die Quadratklasse $\epsilon \in \mathbf{o}_\mathbf{F}^*/{\mathbf{o}_\mathbf{F}^*}^2$ liegt nun fest, d.h. der Faktor 2, den man für $0 \leq i \leq \nu$ zu berücksichtigen hatte, entfällt. Zunächst sollen die auftretenden Werte der Integrale explizit dargestellt werden.
Für $n = n' = 0$ hat man falls $\chi \geq i$:

$$[I_0 : I_{i0}] \int \mathbf{1}_{I_{i0}} = 2q^{i+2\nu-1},$$

und falls sogar $\chi > i$:

$$[I_0 : I_{i1}] \int \mathbf{1}_{I_{i1}} = 2q^{i+2\nu-1},$$

$$[I_0 : I_{i2}] \int \mathbf{1}_{I_{i2}} = 2q^{i+2\nu-1}.$$

Für $n = n' = 1$ hat man falls $\chi \geq i$:

$$[I_0 : I_{i0}] \int \mathbf{1}_{I_{i0}} = 2q^{i+2\nu},$$

und falls sogar $\chi > i + \nu$:

$$[I_0 : I_{i1}] \int \mathbf{1}_{I_{i1}} = 2q^{i+2\nu+1},$$

$$[I_0 : I_{i2}] \int \mathbf{1}_{I_{i2}} = 2q^{i+2\nu+1}.$$

Es zeigt sich, daß eine Fallunterscheidung nach χ nützlich ist:

1. Fall: $\chi > 2m$
Da immer $\chi \geq 2m$, kann dies nur der Fall sein, wenn $m = v(b) = v(b')$. Dann folgt aus $\nu = v(b) - f = v(b') - f'$, daß auch $f = f'$ gelten muß, und man kann die Bereiche mittelgroßer und großer i gemeinsam summieren: $\nu < i \leq \chi - \nu$.
Der Beitrag für $n = n' = 0$:
Aus $0 \leq f, f' \leq m-1$ folgt, daß $1 \leq \nu \leq m$ und somit $i \leq \chi - \nu < \chi$. Also ist die Bedingung für die Integrale von I_{i1} und I_{i2} immer erfüllt. Dann lautet der Beitrag:

$$\sum_{\nu=0}^{m} \sum_{i=\nu+1}^{\chi-\nu} \frac{1}{2}(q+1)^2 q^f q^{f'} (-1)^{f+f'} 8 q^{i+2\nu-1} =$$
$$2(q+1)^2(-q)^{v(b)+v(b')}(q^m-1)(q^{\chi-1-m}-1)\frac{2q}{(q-1)^2}.$$

Der Beitrag für $n = n' = 1$:
Für $i = \chi - \nu$ tritt nur das Integral von I_{i1} auf:

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{2}(q+1)^2 q^{f-1} q^{f'-1} 4 q^{i+2\nu} =$$
$$2(q+1)^2(-q)^{v(b)+v(b')}(q^m-1)\frac{q^{\chi-m}}{(q-1)q}.$$

Dazu kommt der Beitrag für $i \leq \chi - \nu - 1$:

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} \sum_{i=\nu+1}^{\chi-\nu-1} \frac{1}{2}(q+1)^2 q^{f-1} q^{f'-1} (-1)^{f+f'} 4(q+1) q^{i+2\nu}$$
$$2(q+1)^2(-q)^{v(b)+v(b')}(q^m-1)(q^{\chi-m}-1)\frac{(q+1)}{(q-1)^2 q}.$$

Addiert man die drei Terme für $\chi > 2m$, so ergibt sich der Beitrag

$$2(q+1)^2(-q)^{v(b)+v(b')}\frac{(q^m-1)}{(q-1)^2 q}(4q^{\chi+1-m} - 2q^2 - q - 1).$$

2. Fall: $\chi = 2m$
Dann tritt der Bereich großer i, d.h. $v(b) + f < i \leq \chi - \nu$ nicht auf, denn $v(b) + f = 2m - \nu = \chi - \nu$. Man betrachtet also den Bereich $\nu < i \leq 2m - \nu$. Setzt man $\nu = m$,

so hat man $m < i \leq m$. Der Bereich ist dann leer. Daraus folgt, daß stets $\nu < m$ gilt und damit $f, f' > 0$.
Der Beitrag für $n = n' = 0$:
Aus $f \leq v(b) - 1$ und $f' \leq v(b') - 1$ folgt, daß ν immer größer ist als null, und das heißt $i \leq 2m - \nu < \chi$. Die Bedingung für die Integrale von I_{i1} und I_{i2} ist also immer erfüllt. Somit hat man den Beitrag

$$\sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{i=\nu+1}^{2m-\nu} \frac{1}{2}(q+1)^2 q^f q^{f'} (-1)^{f+f'} 8 q^{i+2\nu-1} =$$
$$(-q)^{v(b)+v(b')} 2(q+1)^2 (q^m - 1)(q^{m-1} - 1) \frac{2q}{(q-1)^2}.$$

Der Beitrag für $n = n' = 1$:
Für $i = 2m - \nu$ tritt nur das Integral von I_{i0} auf:

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{2}(q+1)^2 q^{f-1} q^{f'-1} 4 q^{2m+\nu} =$$
$$2(q+1)^2 (-q)^{v(b)+v(b')} (q^m - 1) \frac{q^m}{(q-1)q}.$$

Für $i \leq 2m - 1 - \nu$ hat man den Beitrag

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} \sum_{i=\nu+1}^{2m-1-\nu} \frac{1}{2}(q+1)^2 q^{f-1} q^{f'-1} (-1)^{f+f'} 4(q+1) q^{i+2\nu} =$$
$$2(q+1)^2 (-q)^{v(b)+v(b')} (q^m - 1)^2 \frac{(q+1)}{(q-1)^2 q}$$

Zählt man diese drei Terme zusammen, so ergibt sich im Fall $\chi = 2m$ der Beitrag

$$2(q+1)^2 (-q)^{v(b)+v(b')} \frac{(q^m - 1)}{(q-1)^2 q} (4q^{m+1} - 2q^2 - q - 1).$$

Dies entspricht offenbar dem Beitrag des 1. Falls, wenn man dort $\chi = 2m$ setzt.

Summation der Bereiche

Um aus den erhaltenen Beiträgen die Differenz $O_\eta^G - O_{\eta'}^G$ zu erhalten, muß man alle Terme noch mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ aus der Normierung der Maße multiplizieren und aufsummieren. Die verschiedenen Beiträge sind also:
Bereich $i = 0$: 0
Falls $\chi > 0$, so erhält man noch:

Bereich $1 \leq i \leq \nu$:

$$(-q)^{v(b)+v(b')}(q+1)^2\frac{q^m-1}{(q-1)q}(2q-1).$$

Bereich $\nu < i \leq \chi - \nu$:

$$(-q)^{v(b)+v(b')}(q+1)^2\frac{(q^m-1)}{(q-1)^2q}(4q^{\chi+1-m}-2q^2-q-1).$$

Somit erhält man:

$$O_\eta^G(\mathbf{1}_I) - O_{\eta'}^G(\mathbf{1}_I) \;=\; (-q)^{v(b)+v(b')}4\frac{(q+1)^2}{(q-1)^2}(q^m-1)(q^{\chi-m}-1),$$

falls $\chi > 0$. Falls $\chi = 0$, so ist $O_\eta^G(\mathbf{1}_I) - O_{\eta'}^G(\mathbf{1}_I) = 0$.

Bemerkung 3.14. *Die gefundene Form des instabilen Orbitalintegrals besteht offensichtlich im wesentlichen aus zwei Faktoren der Form*

$$\frac{q^{a_j}-1}{q-1},$$

also zwei niederdimensionalen Orbitalintegralen, die durch einen Vorfaktor verknüpft sind. Dies deckt sich mit bestehenden Vermutungen (vgl. [La1]).

Literaturverzeichnis

[BoŠa] Borewisc, S.J. und Šafarevič, I.R.: *Zahlentheorie,* Birkhäuser, Basel, Stuttgart, (1966)

[Ca] Carter, R.W.: *Simple Groups of Lie Type,* John Wiley & Sons, London, (1972)

[Fl] Flicker, Y.Z.: *Matching of Orbital Integrals for the $GL(4)$ and $GSp(2)$,* Memoirs of the AMS, Number 655, Providence, Rhode Island, (1999)

[Fr] Freitag, E.: *Siegelsche Modulformen,* Springer, Berlin u.a., (1983)

[Ga] Garrett, P.: *Buildings and Classical Groups,* Chapman & Hall, London, (1997)

[HN] Havin, V.P.; Nikolski, N.K.: *Commutative Harmonic Analysis II,* Springer, Berlin u.a., (1998)

[Hu1] Humphreys, J.E.: *Linear Algebraic Groups,* Springer, Berlin u.a., (1981)

[Hu2] Humphreys, J.E.: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory,* Springer, Berlin u.a., (1970)

[La1] Langlands, R.P.: *Les débuts d'une formule des traces stable,* Universitat de Paris, (1983)

[La2] Langlands, R.P.: *L-functions and automorphic representations,* Proc. Int. Congr. Math., Helsinki, (1978), S. 165-175

[La3] Langlands, R.P.: *Stable conjugacy: Definitions and lemmas,* Can. Jour. Math., Nr. 31, (1979), S. 700-725

[La4] Langlands, R.P.: *Orbital integrals on forms of $SL(3)$ I,* Am. Jour. Math., Nr. 105, (1983), S. 465-506

[La5] Langlands, R.P.: *Remarks on Igusa theory and real orbital integrals* in *The zeta functions of Picard modular surfaces,* Hrsg. Langlands, R.P. und Ramakrishnan, D., Les Publications CRM, Montreal, (1992)

[La6] Langlands, R.P.: *Where stands functoriality today?,* Proc. of Symp. in Pure Mathematics of the AMS, Nr. 61, (1997), S. 457-471

[LaL] Langlands, R.P. und Labesse, J.-P.: *L-indistinguishability for $SL(2)$,* Can. Jour. Math., Nr. 31, (1979), S. 726-785

[LaSh1] Langlands, R.P. und Shelstad, D.: *On principal values on p-adic manifolds,* in *Lie group representations II,* Springer, Berlin, (1984), S. 250-279

[LaSh2] Langlands, R.P. und Shelstad, D.: *On the definition of transfer factors,* Math. Ann., Nr. 278, (1987), S. 219-271

[LaSh3] Langlands, R.P. und Shelstad, D.: *Orbital integrals on forms of $SL(3)$ II,* Can, Jour. Math., Nr. 41, (1989), S. 480-507

[LaSh4] Langlands, R.P. und Shelstad, D.: *Descent for transfer factors,* in *The Grothendieck Festschrift,* Vol. II, Birkhäuser, (1990), S. 485-563

[Loo] Loomis, L.H.: *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis,* D. van Nostrand Company, Princeton, New Jersey, (1953)

[Lo] Lorenz, F.: *Einführung in die Algebra,* Teil I und II, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, (1987 bzw. 1990)

[Neu] Neukirch, J.: *Algebraische Zahlentheorie,* Springer, Berlin u.a., (1992)

[Sh1] Shelsted, D.: *Orbital integrals for $GL_2(\mathbb{R})$,* Proc. of Symp. in Pure Mathematics of the AMS, Vol. 33, Part 1, Corvallis, Oregon, (1977)

[Sh2] Shelsted, D.: *Notes on L-indistinguishability (based on a lecture by R.P. Langlands),* Proc. of Symp. in Pure Mathematics of the AMS, Vol. 33, Part 2, Corvallis, Oregon, (1977)

[Sp] Springer, T.A.: *Linear Algebraic Groups, Second Edition,* Birkhäuser, Boston, (1998)

[W1] Weissauer, R.: *Reductive Dissent for Tori,* Preprint, Mannheim, (1999)

[W2] Weissauer, R.: *A Special Case of the Fundamental Lemma I,* Preprint, Mannheim, (1993)

[W3] Weissauer, R.: *Doppelnebenklassen in der symplektischen Gruppe $Gsp(2n)$,* Preprint, Mannheim, (2000)

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln verfaßt habe. Die Stellen, die ich dem Wortlaut oder Sinne nach anderen Werken entnommen habe, sind durch Angabe der Quellen kenntlich gemacht.

Heidelberg im November 2003