Gilt für P $\quad H(P) \leq C$, $\quad [\mathbb{Q}(P):\mathbb{Q}] \leq d$, dann

$$H(P) \leq C \Rightarrow \max_{0 \leq i \leq N} H_{\mathbb{Q}(P)}(x_i) \leq H_{\mathbb{Q}(P)}(P) \leq C^{[\mathbb{Q}(P):\mathbb{Q}]}$$

$$\Rightarrow \max_{0 \leq i \leq N} H(x_i) \leq C,$$

$$[\mathbb{Q}(P):\mathbb{Q}] \leq d \Rightarrow \max_{0 \leq i \leq N} [\mathbb{Q}(x_i):\mathbb{Q}] \leq d,$$

da $\mathbb{Q}(x_i) \subset \mathbb{Q}(P) = \mathbb{Q}(x_0, \dots, x_N)$

$\Rightarrow$ Jedes x_i kommt aus der Menge

$A(C,d) := \{x \in \overline{\mathbb{Q}};\ H(x) \leq C,\ [\mathbb{Q}(x):\mathbb{Q}] \leq d\}$,

deren Endl. keit zu zeigen also genügt. ($x_j = 1$ für ein j und alle $x_i \in A(C,d)$)
(wegen $H(x) = H([x:1])$, $\mathbb{Q}(x) = \mathbb{Q}([x:1])$ ist das also die Reduktion auf den Fall $N=1$, wenn man nach den Pkt. $[1:0]$ hinzunimmt).

- Sei also $x \in A$ und sei $e := [\mathbb{Q}(x):\mathbb{Q}] \leq d$. x habe Min.pol

$$f_x(T) = (T - \underbrace{\alpha_1}_{:=x}) \dots (T - \alpha_e) = T^e + a_1 T^{e-1} + \dots + a_e \in \mathbb{Q}[T]$$

Die anderen NST von f_x ergeben sich aus x durch Galoiskonjugation, $\rightarrow$ $\boxed{\text{Zerf}(f_x)/\mathbb{Q} \text{ ist Galoissch}}$
nach obigem Theorem gilt daher: $H(\alpha_i) = H(x)$, $1 \leq i \leq e$.

Gal Zf(f)/Q op. nicht transitiv da fx irred, jedes Elmt der Gal.gp lässt sich ausdehnen zu einem von Gal $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$

Nun:
$$H([1:a_1:\dots:a_e]) \leq 2^{e-1} \prod_{j=1}^{e} H(\alpha_j) = 2^{e-1} H(x)^e$$
$\uparrow$ Thm. von oben

da nach Annahme $H(x) \leq C$ und $e \leq d$ $\longrightarrow\ \leq (2C)^d$.

Wesentlicher Punkt: Die a_i sind Koeff. aus $\mathbb{Q}$, daher gibt es bei festen C, d nur <u>endl. viele</u> Werte, die die a_i annehmen können!
Wegen $[1:a_1:\dots:a_e] \in \mathbb{P}^{e+1}(\mathbb{Q})$ fällt $H = H_{\mathbb{Q}}$ zusammen!

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Jeder Pkt aus } A(C,d) \text{ ist NST in } \overline{\mathbb{Q}} \text{ eines Polynoms } T^d + a_1 T^{d-1} + \dots + a_e \in \mathbb{Q}[T],\ e \leq d, \text{ für dessen Koeff. } 1, a_1, \dots, a_e \text{ gilt: } H([1:a_1:\dots:a_e]) \leq (2C)^d}$

$\Rightarrow$ bei C, d geg. sind die Punkte aus A unter den NST einer <u>endl. Liste</u> von Polynomen zu suchen $\Rightarrow \#A < \infty$

⑤ · Verhalten unter Galoiskonjugation

Thm. Sei $P\in \mathbb{P}^N(\bar{\mathbb{Q}})$, $\sigma\in G_{\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}$. Dann $H(P^\sigma)=H(P)$.

Bew. Sei $K/\mathbb{Q}$ alg. Z.K., der alle x_i enthält, wobei $P=[x_0:\dots:x_N]$.

Die Erw. $K/\mathbb{Q}$ muss nicht normal sein, aber man hat den Körperisom. $\sigma : K \xrightarrow{\cong} K^\sigma$

und man hat die Bijektion $\sigma : M_K \xrightarrow{\cong} M_{K^\sigma}$,

$$v \longmapsto v^\sigma,$$

$$|x^\sigma|_{v^\sigma} := |x|_v \quad \forall x\in K.$$

σ induziert außerdem einen Isom. auf den Komplettierungen

$$K_v \xrightarrow{\cong} K^\sigma_{v^\sigma}, \qquad [CF] \longmapsto [CF^\sigma],$$

Folglich ist $n_v = [K_v : \mathbb{Q}_v] = [K^\sigma_{v^\sigma} : \mathbb{Q}_{v^\sigma}] = n_{v^\sigma}$.

Rechnung: $$H_{K^\sigma}(P^\sigma) = \prod_{w\in M_{K^\sigma}} \max_{0\le i\le N} \{|x_i^\sigma|_w\}^{n_w}$$

$$= \prod_{v\in M_K} \max_{0\le i\le N} \{|x_i^\sigma|_{v^\sigma}\}^{n_{v^\sigma}} = \prod_{v\in M_K} \max_{0\le i\le N} \{|x_i|_v\}^{n_v} = H_K(P)$$

Die Beh. folgt also aus $[K^\sigma:\mathbb{Q}] = [K:\mathbb{Q}]$.

· Endlichkeit der Menge von Punkten beschränkter Höhe

Thm. C, d Konstanten, dann ist folgende Menge endlich:

$$\{P\in \mathbb{P}^N(\bar{\mathbb{Q}});\ H(P)\le C,\ [\mathbb{Q}(P):\mathbb{Q}]\le d\}$$

Insbesondere ist für jeden alg. Z.K. $K/\mathbb{Q}$ mit $d:=[K:\mathbb{Q}]$

$$\{P\in\mathbb{P}^N(K);\ H_K(P)\le C\} \subset \{Q\in\mathbb{P}^N(\bar{\mathbb{Q}});\ H(Q)\le C^{\frac{1}{d}},\ [\mathbb{Q}(Q):\mathbb{Q}]\le d\}$$

endlich! (beachte: $P\in\mathbb{P}^N(K) \Rightarrow \mathbb{Q}(P)\subset K$)

Bew. · Reduktion auf den Fall $N=1$:

Sei $P\in\mathbb{P}^N(\bar{\mathbb{Q}})$, schreibe $P=[x_0:\dots:x_N]$ mit $x_{i_0}=1$ für ein i_0

$\Rightarrow \mathbb{Q}(P) = \mathbb{Q}(x_0,\dots,x_N)$ und

außerdem $H(P)\le C$, $[\mathbb{Q}(P):\mathbb{Q}]\le d$

da für alle i [illegible]!

$$H_{\mathbb{Q}(P)}(P) = \prod_{v\in M_{\mathbb{Q}(P)}} \max_{0\le i\le N}\{|x_i|_v\}^{n_v} \geq \max_{0\le i\le N} \prod_{v\in M_{\mathbb{Q}(P)}} \max\{1,|x_i|_v\}^{n_v}$$

$\{1, x_i\}\subset\{x_0,\dots,x_N\}$, $1 = x_{i_0}$

$$= \max_{0\le i\le N} H_{\mathbb{Q}(P)}(x_i) \quad \Rightarrow \quad H(P) \geq \max_{0\le i\le N} H(x_i)$$

(1) $\max\limits_{0\le i\le d}\{|a_i|_v\} = \max\limits_{0\le i\le d}\{|b_i-\alpha_k b_{i-1}|_v\} \underset{\Delta\neq}{\le} \varepsilon(v)\max\limits_{0\le i\le d}\max\{|b_i|_v, |\alpha_k b_{i-1}|_v\}$

$= \varepsilon(v)\max\limits_{0\le i\le d}\{|b_i|_v, |\alpha_k b_{i-1}|_v\} \le \varepsilon(v)\max\limits_{0\le i\le d}\{|b_i|_v\}\cdot\max\{1,|\alpha_k|_v\}$

$\underset{\text{und } |b_d|_v=0}{\overset{\text{Ind.an.}}{\le}} \varepsilon(v)\,\varepsilon(v)^{d-2}\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d}\max\{|\alpha_j|_v,1\}\ \max\{1,|\alpha_k|_v\}$ $\Rightarrow$ Beh.

die 7. Stellen des Max liefert daraus aus diesen Mengen!

(2) Fallunterscheidung: $|\alpha_k|_v \le \varepsilon(v)$ oder $|\alpha_k|_v > \varepsilon(v)$

- Falls $|\alpha_k|_v \le \varepsilon(v)$, dann nach Wahl von k:

$$\prod_{j=1}^{d}\underbrace{\max\{|\alpha_j|_v,1\}}_{\le\max\{|\alpha_j|_v,|\alpha_k|_v,1\}} \le \underbrace{\max\{|\alpha_k|_v,1\}^d}_{\le\max\{|\alpha_k|_v,\varepsilon(v),1\}} \le \varepsilon(v)^d.$$

$$\Rightarrow \varepsilon(v)^{-d}\cdot\prod_{j=1}^{d}\max\{|\alpha_j|_v,1\} \le 1 \underset{\text{da } a_0=1}{\le} \max_{0\le i\le d}\{|a_i|_v\} \quad\Rightarrow (2)$$

(sogar ohne Ind. annahme!)

- Falls $|\alpha_k|_v > \varepsilon(v)$, dann

$$\max_{0\le i\le d}\{|a_i|_v\} = \max_{0\le i\le d}\{|b_i-\alpha_k b_{i-1}|_v\} \ge \varepsilon(v)^{-1}\max_{0\le i\le d-1}\{|b_i|_v\}\cdot\max\{|\alpha_k|_v,1\}$$

Das letzte Ungleichheitszeichen bedarf einer Erklärung:

- Im Fall $v\in M_K^0$ (nicht-arch.) ist $\varepsilon(v)=1$ und $|\alpha_k|_v > \varepsilon(v)=1$.

Die rechte Seite ist dann also $\max\limits_{0\le i\le d-1}\{|b_i|_v\}\cdot|\alpha_k|_v = |\alpha_k\cdot b_\ell|_v$.

(Sei $0\le\ell\le d-1$ mit $|b_\ell|_v \ge |b_i|_v \ \forall\, 0\le i\le d-1$)

linke Seite: $\forall\, 0\le i\le d$: $|b_i-\alpha_k b_{i-1}|_v \le \max\{|b_i|_v, |\alpha_k b_{i-1}|_v\} \overset{|\alpha_k|_v>1}{\le} |\alpha_k\cdot b_\ell|_v$

andererseits: $|b_{\ell+1}|_v \le |b_\ell|_v \underset{|\alpha_k|_v>1}{<} |\alpha_k b_\ell|_v \Rightarrow |b_{\ell+1}-\alpha_k b_\ell|_v = |\alpha_k b_\ell|_v$

$\Rightarrow$ sogar Gleichheit!

- Im Fall $v\in M_K^\infty$ (arch.) ist $\varepsilon(v)=2$ und $|\alpha_k|_v > \varepsilon(v)=2$

$\forall\, 0\le i\le d$: $|\alpha_k b_{i-1}|_v \underset{\Delta\neq}{\le} |b_i-\alpha_k b_{i-1}|_v + |b_i|_v \le \max\limits_{0\le i\le d}|b_i-\alpha_k b_{i-1}|_v + \max\limits_{0\le i\le d}|b_i|_v$

rechte Seite unabh. von i $\Rightarrow$ $|\alpha_k|_v\cdot\max\limits_{0\le i\le d}|b_{i-1}|_v \le \max\limits_{0\le i\le d}|b_i-\alpha_k b_{i-1}|_v + \max\limits_{0\le i\le d}|b_i|_v$

$b_0 = b_d = 0$

$\Rightarrow \max\limits_{0\le i\le d}|b_i-\alpha_k b_{i-1}|_v \ge (|\alpha_k|_v-1)\cdot\max\limits_{0\le i\le d-1}|b_i|_v$

$\underbrace{2}_{=\varepsilon(v)}(|\alpha_k|_v-1) > |\alpha_k|_v$, da $|\alpha_k|_v>1$ $\quad > \varepsilon(v)^{-1}\cdot|\alpha_k|_v\cdot\max\limits_{0\le i\le d-1}|b_i|_v$ = rechte Seite $\Rightarrow$ Beh.

Dann weiter: $\max\limits_{0\le i\le d}\{|a_i|_v\} \overset{\text{Ind.an.}}{\ge} \varepsilon(v)^{-1}\cdot\varepsilon(v)^{-(d-1)}\cdot\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d}\max\{|\alpha_j|_v,1\}\cdot\max\{|\alpha_k|_v,1\}$

$\Rightarrow$ (2).

④. Wie hängen die Höhen der NST von den Koeff. eines geg. Polynoms ab?

$$f(T) \underset{a_0 \neq 0}{=} a_0 T^d + a_1 T^{d-1} + \dots + a_d = a_0 (T-\alpha_1) \dots (T-\alpha_d) \in \overline{\mathbb{Q}}[T], \ d \geq 1$$

Notation: $K/\mathbb{Q}$ alg. Z.K. Für $x \in K$ setze

$$H_K(x) := H_K([x:1]) = \prod_{v \in M_K} \max\{|x|_v, 1\}^{n_v}$$

$$H(x) := H([x:1]) = H_K(x)^{\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}}$$

Thm. Sei f wie oben. Dann

$$2^{-d} \prod_{j=1}^{d} H(\alpha_j) \leq H([a_0 : \dots : a_d]) \leq 2^{d-1} \prod_{j=1}^{d} H(\alpha_j)$$

Bew. OE $a_0 = 1$, da die Aussage invariant unter Durchmult. mit $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$;
$K/\mathbb{Q}$ alg. Z.K., der alle NST α_j enthält.

Außerdem: $|x+y|_v \leq \varepsilon(v) \max\{|x|_v, |y|_v\}$ $\forall v \in M_K,\ x, y \in K$,

wobei $\varepsilon(v) = \begin{cases} 1, & v \in M_K^0 \text{ (nicht-arch.)} \\ 2, & v \in M_K^\infty \text{ (arch.)} \end{cases}$

Es genügt zu zeigen: $\forall v \in M_K$:

(*) $$\varepsilon(v)^{-d} \prod_{j=1}^{d} \max\{|\alpha_j|_v, 1\} \overset{(2)}{\leq} \max_{0 \leq i \leq d} \{|a_i|_v\} \overset{(1)}{\leq} \varepsilon(v)^{d-1} \prod_{j=1}^{d} \max\{|\alpha_j|_v, 1\}$$

[dann: $(\cdot)^{n_v}$, $\prod_{v \in M_K}$, $(\cdot)^{\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}}$

und somit $\left(\prod_{v \in M_K} \varepsilon(v)^{n_v}\right)^{\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}} \underset{\text{nur } \varepsilon(v)}{\overset{\varepsilon \neq 1}{=}} \prod_{v \in M_K^\infty} 2^{\frac{n_v}{[K:\mathbb{Q}]}} = 2^{\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_K^\infty} n_v} = 2^{[K:\mathbb{Q}]} \cdot \underline{\underline{= 2}}$

Nun: Induktion über d.

Ind.anf.: $d = 1$, also $f(T) = T - \alpha_1$,

damit $\prod_{j=1}^{d} \max\{|\alpha_j|_v, 1\} = \max\{|\alpha_1|_v, 1\} = \max_{0 \leq i \leq d}\{|a_i|_v\}$

und es ist klar, dass $\varepsilon(v)^{-1} \leq 1 \leq \varepsilon(v)^0$

Ind.ann.: Die Ugl. (*) gelte bereits $\forall g \in K[T]$ vom Grad $d-1$.

Ind.schluss: Sei k mit $|\alpha_k|_v$ max., d.h. $|\alpha_k|_v \geq |\alpha_j|_v$ $\forall 1 \leq j \leq d$.

Setze $g(T) := \frac{f(T)}{(T-\alpha_k)} = b_0 T^{d-1} + b_1 T^{d-2} + \dots + b_{d-1}$. $(b_0 = 1)$

Koeff.-vgl. $\Rightarrow$ $a_i = b_i - \alpha_k b_{i-1}$, $0 \leq i \leq d$ $(b_{-1} = b_d = 0)$

beachte $g \in K[T]$, da die b_i Polynome in den α_j sind.

FORMEL $C_1^{[K:\mathbb{Q}]} \quad H_K(F) \quad H_K(P)^d$. $\quad (\cdot)^{\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}}$ liefert die Beh.

Beachte: $C_2 := C_1 \cdot H(F)$ hängt nicht von P ab!

(2) $\overline{\mathbb{Q}}$ alg. abg. $\Rightarrow$ <u>Hilbertscher NST Satz</u> angewendet auf

$\mathfrak{a} = (f_0, \dots, f_M) \subset \overline{\mathbb{Q}}[X_0, \dots, X_N]$

$$\Rightarrow \underbrace{I(\underbrace{Z(\mathfrak{a})}_{=\{(0,\dots,0)\} \subset \mathbb{A}^{N+1}(\overline{\mathbb{Q}})})}_{(X_0,\dots,X_N)} \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{a} \quad \Rightarrow \quad (*) \boxed{\exists\, e \geq 1 \text{ ganz}, \; g_{ij} \in \overline{\mathbb{Q}}[X_0, \dots, X_N]: \; X_i^e = \sum_{j=0}^{M} g_{ij} f_j, \quad 0 \leq i \leq N}$$

OE ist dabei $g_{ij} \in K[X_0, \dots, X_N]$ (sonst adjungiere alle Koeff. der g_{ij} zu K hinzu)

und alle g_{ij} homogen vom Grad $e-d$ (reduziere (*) auf homog. Anteil vom Grad e)

$$H_K(G) := H_K([b_0 : \dots]) = \prod_{v \in M_K} \underbrace{\max\{|b|_v ; \, b \text{ Koeff. eines } g_{ij}\}}_{=: |G|_v}{}^{n_v} \quad \left(= \prod_{v \in M_K} |G|_v^{n_v} \right)$$

b durchlaufen die Koeff. aller g_{ij}

Beachte: e, $H_K(G)$ hängen nicht von P ab!

$$(*) \underset{\text{Dreiecks}}{\overset{\text{Punkt}}{\Rightarrow}} |x_i|_v^e = \left| \sum_{j=0}^{M} g_{ij}(P) f_j(P) \right|_v \leq \underset{(=M+1)}{C_2^{\varepsilon(v)}} \max_{0 \leq j \leq M} |g_{ij}(P) f_j(P)|_v$$

$$\leq C_2^{\varepsilon(v)} \cdot |F(P)|_v \cdot \max_{\substack{0 \leq j \leq M \\ 0 \leq i \leq N}} |g_{ij}(P)|_v \qquad \forall v \in M_K \; \forall i$$

rechte Seite unabh. von i $\Rightarrow$ $|P|_v^e \leq C_2^{\varepsilon(v)} |F(P)|_v \max_{\substack{0 \leq j \leq M \\ 0 \leq i \leq N}} |g_{ij}(P)|_v$

wie oben!

$$\leq C_2^{\varepsilon(v)} |F(P)|_v \; C_3^{\varepsilon(v)} |G|_v \; |P|_v^{e-d}$$

$|g_{ij}(P)|_v \leq C_3^{\varepsilon(v)} |G|_v |P|_v^{e-d}$

C_3 unabh. von P!

$$\Rightarrow |P|_v^d \leq C_4^{\varepsilon(v)} |G|_v \; |F(P)|_v$$

$$\Rightarrow H_K(P)^d = \prod_{v \in M_K} |P|_v^{n_v d} \leq C_4^{\sum_{v \in M_K} \varepsilon(v) n_v} \cdot \prod_{v \in M_K} |G|_v^{n_v} \cdot \prod_{v \in M_K} |F(P)|_v^{n_v}$$

$$= C_4^{[K:\mathbb{Q}]} \cdot H_K(G) \quad H_K(F(P)).$$

$(\cdot)^{\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}}$ liefert die Beh.

Beachte: $C_1 = \dfrac{1}{C_4 \cdot H(G)}$ hängt nicht von P ab! $\square$

Kor.

Speziell für $d = 1$ wird Anwendung von F durch eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{M+1, N+1}(\overline{\mathbb{Q}})$ beschrieben.

($\Rightarrow$ F ist sogar Autom. unter der Annahme $A \in GL_{N+1}(\overline{\mathbb{Q}})$.)

$\Rightarrow$ $\quad C_1 H(P) \leq H(AP) \leq C_2 H(P) \qquad \forall P \in \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$

für $C_1, C_2 > 0$ geeignet (unabh. von P).

③ . Verhalten unter Morphismen

Def Morph. vom Grad d zwischen proj. Räumen:

$$F : \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{P}^M(\overline{\mathbb{Q}}) \qquad F(P) = [f_0(P) : \ldots : f_M(P)],$$

wobei die $f_j \in \overline{\mathbb{Q}}[X_0, \ldots, X_N]$ homog. vom Grad d sind, die keine von $X_0 = \ldots = X_N = 0$ versch. simultane NST in $\overline{\mathbb{Q}}$ haben.

Thm Sei F wie oben

$$\Longrightarrow \quad C_1 H(P)^d \overset{(2)}{\leq} H(F(P)) \overset{(1)}{\leq} C_2 H(P)^d \qquad \forall P \in \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$$

für $C_1, C_2 > 0$ geeignet (abh. von N, M, d, F, aber nicht von P!)

Bew. $P = [x_0 : \ldots : x_N] \in \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$, x_i fix. $\boxed{\text{immer auf Unabh. von } P \text{ achten!}}$

$k/\mathbb{Q}$ alg. ZK, der alle Koeff. aller f_j und alle x_i enthält

$$\Longrightarrow \quad H_k(P) = \prod_{v \in M_k} \underbrace{\max\{|x_0|_v, \ldots, |x_N|_v\}}_{=: |P|_v}{}^{n_v} \quad \left(= \prod_{v \in M_k} |P|_v^{n_v} \right)$$

$$H_k(F(P)) = \prod_{v \in M_k} \underbrace{\max\{|f_0(P)|_v, \ldots, |f_M(P)|_v\}}_{=: |F(P)|_v}{}^{n_v} \quad \left(= \prod_{v \in M_k} |F(P)|_v^{n_v} \right)$$

$$H_k(F) := H_k([a_0 : a_1 : \ldots]) = \prod_{v \in M_k} \underbrace{\max\{|a|_v ; \ a \text{ Koeff. eines der } f_j\}}_{=: |F|_v}{}^{n_v} \quad \left(= \prod_{v \in M_k} |F|_v^{n_v} \right)$$

↑ durchlaufen die Koeff. aller f_j

Außerdem: $\underbrace{|t_1 + \ldots + t_n|_v}_{\text{Elt. in } k} \leq n^{\varepsilon(v)} \max\{|t_1|_v, \ldots, |t_n|_v\} \quad \forall v \in M_k$

wobei $\varepsilon(v) := \begin{cases} 0, & \text{falls } v \in M_k^0 \ \text{(nicht arch.)} \\ 1, & \text{falls } v \in M_k^\infty \ \text{(arch.)} \end{cases}$

(1) $\quad \forall j \ \forall v \in M_k : \quad |f_j(P)|_v \leq C_1^{\varepsilon(v)} |F|_v |P|_v^d$

↑ # der Monome vom Grad d in $N+1$ Unbek., $< \infty$, weil ja schon die # der Monome in $N+1$ Unbek., die bzgl. jeder Var. beschr. Grad haben, $< \infty$ ist. ⇒ unabh. von P!

$\Longrightarrow |F(P)|_v \leq C_1^{\varepsilon(v)} |F|_v |P|_v^d$

rechte Seite hängt nicht v. Normierung ab!

$$\Longrightarrow \quad H_k(F(P)) = \prod_{v \in M_k} |F(P)|_v^{n_v} \leq C_1^{\sum_{v \in M_k} \varepsilon(v) n_v} \cdot \prod_{v \in M_k} |F|_v^{n_v} \cdot \left(\prod_{v \in M_k} |P|_v^{n_v} \right)^d$$

$$= C_1^{\sum_{v \in M_k^\infty} n_v} \cdot H_k(F) \cdot H_k(P)^d$$

(2) Teile durch ein $x_j \neq 0 \Rightarrow \exists j: \; x_j = 1$

$\Rightarrow \forall w \in M_K: \; \max_{0 \le i \le N} \{|x_i|_w\} \geq 1$, da 1 auftritt

$\Rightarrow H_K(P) \geq 1$.

(3) $$H_L(P) = \prod_{w \in M_L} \max_{0 \le i \le N} \{|x_i|_w\}^{n_w} = \prod_{v \in M_K} \prod_{\substack{w \in M_L \\ w | v}} \max_{0 \le i \le N} \underbrace{\{|x_i|_w\}}_{= |x_i|_v, \text{ da } x_i \in K}^{n_w}$$

$$= \prod_{v \in M_K} \max_{0 \le i \le N} \{|x_i|_v\}^{\underbrace{\sum_{\substack{w \in M_L \\ w | v}} n_w}_{= [L:K] \cdot n_v}}$$

$$= \left(\prod_{v \in M_K} \max_{0 \le i \le N} \{|x_i|_v\}^{n_v} \right)^{[L:K]} = H_K(P)^{[L:K]}.$$

- Höhe auf $\mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ (absolute Höhe)

$[x_0 : \ldots : x_N] = P \in \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$, $L/K/\mathbb{Q}$ alg. Z. K. mit $x_i \in K \; \forall i$

(3) $\Rightarrow \; H_L(P) = H_K(P)^{[L:K]}$ $\quad (\cdot)^{\frac{1}{[L:\mathbb{Q}]}}$

$\Rightarrow \; H_L(P)^{\frac{1}{[L:\mathbb{Q}]}} = H_K(P)^{\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}}$

$\Rightarrow$ wohldef. Höhe $H(P) := H_K(P)^{\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}}$ (unabh. von der Wahl von K)

Es gilt: Im Fall $P \in \mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ ist $H = H_{\mathbb{Q}}$ die anfangs def. Höhe, $[\mathbb{Q}:\mathbb{Q}] = 1$.

(2) aus der Prop. $\Rightarrow \; H(P) \geq 1 \quad \forall P \in \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$

ZIEL: Resultat über Endl.keit der Menge der Pkte beschr. Höhe

(2) • Bew'n von $\mathbb{Q}$:

- archimed.: $|x|_\infty := \max\{x, -x\}$
- nicht-arch.: $|p^m \cdot \frac{a}{b}|_p := p^{-m}$, $p \nmid a \cdot b$ ~~$\neq 0$~~
  (je Primz. p einen)

Man kann zeigen: Bis auf Äquiv. von Bew. ($|x|_1 = |x|_2^s$, $s>0$ unabh. von $x \in K$) sind damit alle Bew. von $\mathbb{Q}$ gefunden (~~nicht-triv~~)

$\Rightarrow$ $M_{\mathbb{Q}}$ sei das aus diesen Bew. bestehende vollst. System aller paarw. nicht-äquiv. Bew. von $\mathbb{Q}$

"Standard-Absolut-Bew'n von $\mathbb{Q}$"

• $K/\mathbb{Q}$ alg. Z.K.

M_K vollst. Repräs. system von paarw. inäquiv. Bew'n auf K, die eine derer aus $M_{\mathbb{Q}}$ fortsetzen

NEBENTAFEL

Import/Resultate aus der Bew. theorie:

- $L/K/\mathbb{Q}$ alg. Z.K., $v \in M_K$. $\displaystyle\sum_{w \in M_L,\ w|v} \overbrace{[L_w : \mathbb{Q}_w]}^{=: n_w} = [L:K] \cdot n_v$ $\quad (n_v = [K_v : \mathbb{Q}_v])$

  Speziell: $K = \mathbb{Q}$, $v \in M_{\mathbb{Q}} \Rightarrow n_v = 1$

  $\Rightarrow \displaystyle\sum_{w \in M_L,\ w|v} n_w = [L : \mathbb{Q}] \quad (< \infty)$

  d.h. insbes. ist $\# M_L < \infty$ und $n_w < \infty \ \forall w \in M_L$

  d.h. die lokalen Grade addieren sich zum Grad der Erweiterung auf

- $K/\mathbb{Q}$, dann gilt $\displaystyle\prod_{v \in M_K} |x|_v^{n_v} = 1 \quad \forall x \in K^\times$.

  Speziell: $K = \mathbb{Q} \Rightarrow$ Geschl. relation $\displaystyle\prod_{v \in M_{\mathbb{Q}}} |x|_v = 1$.

• $K/\mathbb{Q}$ alg. Z.K.: Höhe auf $\mathbb{P}^N(K)$:

$\mathbb{P}^N(K) \ni P = [x_0 : \ldots : x_N]$, alle $x_i \in K$

$$H_K(P) := \prod_{w \in M_K} \max_{0 \le i \le N} \{|x_i|_w\}^{n_w}$$

Bem.: $H_{\mathbb{Q}} = H$ vom Anfang, da $n_w = 1$, es trägt nur $|\cdot|$ bei

Prop.

(1) $H_K(P)$ wohldef. (unabh. von Wahl der x_i)

(3) $L/K/\mathbb{Q}$ alg. Z.K. $\Rightarrow$ $H_K(P)^{[L:K]} = H_L(P)$

(2) $H_K(P) \geq 1$

Bew. (1) Sei $\lambda \in K^\times$, dann $\displaystyle\prod_{w \in M_K} \max_{0 \le i \le N} \{|\lambda x_i|_w\}^{n_w}$

$$= \prod_{w \in M_K} |\lambda|_w^{n_w} \cdot H_K(P) \underset{\uparrow\ \text{Geschl. rel.}}{=} H_K(P)$$

• Höhe auf $\mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$:

Für $P \in \mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ schreibe $P = [x_0 : \dots : x_N]$ mit $x_i \in \mathbb{Q}$ $\forall i$

Mult. mit dem Hauptnenner und Div. durch den ggT liefert die Form
(≠0, da nicht alle $x_i = 0$)

(*): $P = [m_0 : \dots : m_N]$, $m_i \in \mathbb{Z}$,
$\operatorname{ggT}(m_0, \dots, m_N) = 1$. $\Rightarrow m_i$ eind.!!
(bis auf Assoz.heit)

Def. $H(P) := \max\{|m_0|, \dots, |m_N|\}$.

Für $C > 0$ ist $\{P \in \mathbb{P}^N(\mathbb{Q});\ H(P) \le C\}$ endl.

Obere Schranke: $(2C+1)^{N+1}$, da $|m_i| \le C$, $0 \le i \le N$.

• $K/\mathbb{Q}$ alg. Z.K. Höhe auf $\mathbb{P}^N(K)$?

Naiv: Die Rolle von $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ wird hier von dem Ganzheitsring $\mathcal{O} \subset K$ übernommen ($\mathcal{O}$ = ganzer Abschl. von $\mathbb{Z}$ in K).

Dieser ist i. allg. Dedekind-Ring, aber nicht faktoriell (z.B. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \subset \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$).

→ Eind. Faktorisierung findet nicht auf Element-Level, sondern auf Ideal-Level statt.

→ wähle <u>bew. theoret. Ansatz</u>!

(1)

Die Höhenfunktion im Proj. Raum

Dominik Wrazidlo

- zur Zeit auf dem Weg zum Satz von Mordell-Weil:
  Sei E/k ellipt. Kurve, die über einem alg. Z.k. $\underline{k}$ def. ist
  dann ist die Grp. der k-rat. Pkte von E endl. erz.
- Beweis zerfällt in 2 Schritte:
  - schwacher Mordell-Weil: $E(k)/mE(k)$ endl. für $m \geq 2$ ganz
  - Methode des unendl. Abstiegs: involviert Höhen-Fkt. auf der ab. Grp., von der man zeigen will, dass sie endl. ist

  $\Rightarrow$ heißt für uns: Um diese Methode anwenden zu können, brauchen wir Höhen-Fkt. mit gew. Eig. auf $E(k)$.
- heute: Ein Schritt in allg. Richtung: Höhenfkt. im proj. Raum
  nächstes Mal wird dann Einschr. auf ellipt. Kurven vorgen., was im Bew. des MW fehlt
  natürlich kann man nicht alle Eig. der Höhenfkt. auf den $\mathbb{P}^N$ übertragen,
  da manche das Gruppen-Gesetz involvieren. (Gruppengesetz $E(k)$ lässt sich schlecht auf $\mathbb{P}^N$ ausdehnen)
  Aber heute werden wir genug Eig. der Höhe im $\mathbb{P}^N$ herleiten, die
  das dann beim nächsten Mal ermöglichen.
- Sinnvollerweise von Höhe im $\mathbb{P}^N$ zu erwarten:
  - nach unten beschr.
  - $\exists$ immer nur endl. viele Pkte von beschr. Höhe.