Fakultät für Mathematik und Informatik

Universität Heidelberg

Über das Einbettungsproblem algebraischer Zahlkörper mit lokalen Vorgaben und beschränkter Verzweigung

Diplomarbeit

betreut von

Prof. Dr. Kay Wingberg

vorgelegt von

Katharina Hübner

im Mai 2012

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Ein wichtiges Problem in der Zahlentheorie ist die Frage, welche Gruppen als Galoisgruppen von Erweiterungen globaler Körper realisiert werden können. Mithilfe der Klassenkörpertheorie können zunächst die abelschen Erweiterungen untersucht werden. Das wichtigste Resultat in diesem Zusammenhang ist der Satz von Grunwald-Wang. Er besagt, dass es zu jedem globalen Körper K und jeder endlichen abelschen Gruppe A eine Erweiterung $L|K$ mit Galoisgruppe A gibt, die darüber hinaus an endlich vielen Primstellen eine vorgegebene Zerlegungsgruppe hat, es sei denn ein seltener Spezialfall tritt ein. Die nächste Stufe bilden die auflösbaren Erweiterungen. Sie können mit folgender Strategie behandelt werden: Man wählt eine Auflösung

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots$$

der Gruppe G durch eine Kette von Normalteilern G_i mit abelschen Subquotienten. Zuerst wird eine Erweiterung K_1 über dem Grundkörper K mit abelscher Galoisgruppe G/G_1 gesucht. Danach werden induktiv Erweiterungen K_i mit Galoisgruppe G/G_i konstruiert, so dass $K \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$ gilt. Ist bereits die Erweiterung $K_{i-1}|K$ gefunden, so muss zur Konstruktion der Erweiterung $K_i|K$ das folgende Einbettungsproblem gelöst werden:

$$\begin{tikzcd} & & & \mathcal{G}_K \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\ 1 \arrow[r] & G_{i-1}/G_i \arrow[r] & G/G_i \arrow[r] & G/G_{i-1} \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Der Epimorphismus $\mathcal{G}_K \twoheadrightarrow G/G_{i-1}$ der absoluten Galoisgruppe $\mathcal{G}_K$ von K auf G/G_{i-1} beschreibt die Erweiterung $K_{i-1}|K$. Gesucht ist nun ein Epimorphismus $\mathcal{G}_K \to G/G_i$, der modulo G_{i-1} bis auf Konjugation mit dem bereits konstruierten Epimorphismus übereinstimmt. Solche Einbettungsprobleme mit abelschem Kern können ebenso wie der Satz von Grunwald-Wang mit (abelscher) Gruppenkohomologie behandelt werden. Die beiden Hauptresultate auf diesem Gebiet sind der Satz von Šafarevič und der Satz von Neukirch. Der Satz von Šafarevič besagt, dass man für jeden globalen Körper K und jede endliche auflösbare Gruppe G eine Körpererweiterung $L|K$ finden kann mit $\mathrm{Gal}(L|K) \cong G$. Allerdings kann man keine lokalen Vorgaben machen. Der Satz von Neukirch sagt andererseits aus, dass jedes Einbettungsproblem

$$\begin{tikzcd} & & & \mathcal{G}_K \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & G \arrow[r] & H \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

mit proauflösbarem, endlichen Kern A, dessen Exponent teilerfremd zur Ordnung der Einheitswurzelgruppe des Grundkörpers K ist, lösbar ist, sofern das Problem lokal lösbar ist.

Außerdem kann man an endlich vielen Primstellen lokale Vorgaben machen. Der Nachteil gegenüber dem Satz von Šafarevič ist die Forderung, dass der Exponent von A teilerfremd zur Ordnung der Einheitswurzelgruppe von K sei. Damit sind grundsätzlich schon alle Gruppen gerader Ordnung ausgeschlossen (da die zweiten Einheitswurzeln in jedem Körper enthalten sind).

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einem Resultat von G. Henniart, das zwischen dem Satz von Neukirch und dem Satz von Šafarevič angesiedelt ist. In seinem Artikel „Relèvement global d'extenxions locales: quelques problèmes de plongement" ([?]) gibt Henniart einen globalen total reellen Zahlkörper F, eine Primstelle v von F über einer Primzahl p und für $K = F_v$ eine endliche lokale galoissche Erweiterung $L|K$ mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L|K)$ vor. Er beweist folgende Aussage: Für ungerades p gibt es eine globale total reelle galoissche Erweiterung $E|F$ mit Galoisgruppe G, so dass an der Stelle v die lokale Erweiterung $L|K$ realisiert wird. Im Fall $p = 2$ ist dies nicht immer möglich. Hier gilt jedoch die schwächere Aussage, dass man eine entsprechende Erweiterung finden kann, wenn man F durch F' ersetzt, wobei F' aus F durch sukzessive quadratische Erweiterungen hervorgeht, in denen v komplett zerlegt ist, so dass $F'_{v'} = F_v = K$ für eine Primstelle $v'|v$ von F'.

Diese Arbeit erweitert Henniarts Satz in zweierlei Hinsicht: Ist zusätzlich eine Primstellenmenge S von F der Dichte 1 vorgegeben, so kann obige Aussage mit der zusätzlichen Forderung bewiesen werden, dass $E|F$ unverzweigt außerhalb S sei. Ist für jedes $\mathfrak{p}_i$ in einer endliche Stellenmenge $T_0 \subset S$ eine unverzweigte Erweiterung L_i über dem Körper $K_i = F_{\mathfrak{p}_i}$ zusammen mit einer Einbettung deren Galoisgruppe in G vorgegeben, so kann $E|F$ so gewählt werden, dass für $\mathfrak{p}_i \in T_0$ die vorgegebene lokale Erweiterung realisiert wird. Die genaue Aussage mit allen Voraussetzungen enthält Satz **??**.

In seinem Beweis ersetzt Henniart zuerst die lokale Erweiterung $L|K$ durch eine größere Erweiterung $L'|K$, deren Galoisgruppe G' das semidirekte Produkt ihrer Verzweigungsgruppe G'_1 mit der Galoisgruppe $\Gamma' = G'/G'_1$ der maximal zahm verzweigten Teilerweiterung ist so dass außerdem Γ' selbst wieder das semidirekte Produkt der Trägheitsgruppe $\Gamma'_0 \subseteq \Gamma'$ und der Galoisgruppe Γ'/Γ'_0 der maximal unverzweigten Teilerweiterung ist. Henniart konstruiert dann vorerst nicht die gesuchte Erweiterung $E|F$, sondern eine größere Erweiterung $E'|F$, die die Galoisgruppe G' realisiert, und geht am Schluss zur entsprechenden Teilerweiterung $E|F$ über. Im folgenden kann man demnach ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $G = G_1 \rtimes G/G_1$. Der Vorteil des semidirekten Produkts ist, dass nun Einbettungsprobleme

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{G} \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & G_1 \arrow[r] & G \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

immer eine Lösung besitzen, es muss nur noch sichergestellt werden, dass es auch eine essentielle Lösung gibt, die den lokalen Vorgaben in $\{v\} \cup \{\mathfrak{p}|\infty\}$ genügt. Um zusätzlich lokale Vorgaben in T_0 machen zu können, muss man auch die Erweiterungen $L_i|K_i$ durch größere Erweiterungen $L'_i|K_i$ ersetzen, deren Galoisgruppen man in G' einbetten kann (kompatibel mit der ursprünglichen Einbettung in G). In Abschnitt **??** wird gezeigt, dass dies immer möglich ist, wenn $L_i|K_i$ unverzweigt ist.

Die Konstruktion des Körpers E teilt Henniart in mehrere Schritte auf, die sich für ungerades p und $p = 2$ unterscheiden.

Der Fall p ungerade: Ist p ungerade, so wird zunächst mit Hilfe des Satzes von Grunwald-Wang eine total reelle Erweiterung $E_1|F$ konstruiert, die an der Stelle v träge ist und die maximal unverzweigte Teilerweiterung von $L|K$ realisiert. An dieser Stelle können problemlos auch die lokalen Vorgaben in T_0 realisiert werden. Will man über Henniarts Satz hinaus erreichen, dass die Erweiterung $E|F$ unverzweigt außerhalb S ist, so muss auch $E_1|F$ diese Eigenschaft haben. Dies muss im Satz von Grunwald-Wang berücksichtigt werden. Eine entsprechende Variante wird in Kapitel **??** bewiesen. Die Ausführung folgt dem Beweis in [?] Theorem 9.2.8. Im Vergleich zu [?] Theorem 9.2.8 wird der Spezialfall ähnlich wie in [?] Chapter 10, Theorem 5 weiter eingegrenzt, um ihn in dieser Situation anwenden zu können.

Als nächstes konstruiert Henniart eine Erweiterung $E_2|E_1|F$, die an der Stelle v die maximal zahm verzweigte Teilerweiterung von $L|K$ realisiert. Dazu ist folgendes Einbettungsproblem zu lösen:

$$\begin{tikzcd} & & & \mathcal{G}_F \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & \\ 1 \arrow[r] & \Gamma_0 \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & \Gamma/\Gamma_0 \arrow[r] & 1. \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Hierbei bezeichnet Γ die Galoisgruppe der maximal zahm verzweigten Teilerweiterung von $L|K$ und Γ_0 die Trägheitsgruppe von Γ. Der Epimorphismus $\mathcal{G}_F \to \Gamma/\Gamma_0$ der absoluten Galoisgruppe von F auf Γ/Γ_0 beschreibt die Erweiterung $E_1|F$, die im ersten Schritt schon konstruiert wurde. Der Kern Γ_0 des Einbettungsproblems ist zyklisch; er zerfällt in das direkte Produkt seines 2-primären Anteils und seines ungeraden Teils. Diese kann man getrennt behandeln.

Für den 2-primären Teil prüft Henniart ein hinreichendes Kriterium Neukirchs für die Lösbarkeit des entsprechenden Einbettungsproblems. Hier ist zu beweisen, dass für jedes w in der Primstellenmenge, für die man lokale Vorgaben machen will (hier $\{v\} \cup \{\mathfrak{p}|\infty\}$), eine bestimmte Gruppe $\Gamma(\mathcal{G}'_w, \Gamma'_0)$ verschwindet. Will man nun weitere lokale Vorgaben in T_0 machen, muss man dieses Kriterium auch für die Primstellen in T_0 prüfen. Dafür wird unter anderem verwendet, dass die vorgegebenen Erweiterungen $L_i|K_i$ unverzweigt sind. Kapitel **??** verallgemeinert Neukirchs Kriterium, so dass es seine Gültigkeit behält, wenn man fordert, dass die Lösung des Einbettungsproblems unverzweigt außerhalb S ist.

Für den ungeraden Teil von Γ_0 zieht Henniart den Satz von Neukirch heran. Hier geht ein, dass der Körper E_1 total reell ist. Auch an dieser Stelle stellen zusätzliche lokale Vorgaben in T_0 kein Problem dar. Um eine Lösung zu finden, die außerdem unverzweigt außerhalb S ist, benötigt man eine Version des Satzes von Neukirch mit beschränkter Verzweigung. Diese wird in Kapitel **??** bewiesen. Ähnlich wie beim Satz von Grunwald-Wang sind dafür keine großen Änderungen der Beweisführung in [?] Theorem 9.2.8 notwendig.

Als letzter Schritt muss noch das Einbettungsproblem

$$\begin{tikzcd} & & & \mathcal{G}_F \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & \\ 1 \arrow[r] & G_1 \arrow[r] & G \arrow[r] & G/G_1 \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

gelöst werden, wobei G_1 die Verzweigungsgruppe der Erweiterung $L|K$ ist und $G/G_1 = \Gamma$. Da p ungerade ist, und G_1 eine p-Gruppe, kann man das Problem wieder mit Hilfe des Satzes von Neukirch lösen.

Der Fall $p = 2$: Im Fall $p = 2$ verwendet Henniart für die maximal unverzweigte Teilerweiterung von $L|K$ auch den Satz von Grunwald-Wang. Das nachfolgende Einbettungsproblem (**??**) gestaltet sich einfacher als für ungerades p, da $\#\Gamma_0$ teilerfremd zu $p = 2$ ist. Man benötigt nur den Satz von Neukirch. Die Schwierigkeit liegt in diesem Fall im darauf folgenden Einbettungsproblem (**??**), da die Verzweigungsgruppe G_1 eine 2-Gruppe ist. Es ist im Allgemeinen nicht mit beliebigen lokalen Vorgaben lösbar. Henniart teilt es in mehrere Schritte auf. Zuerst konstruiert er eine Filtrierung von G_1 durch Normalteiler von G, deren Subquotienten abelsch vom Exponenten 2 sind. Angefangen mit G/G_1 konstruiert er nun schrittweise für jedes Element I der Filtrierung eine Körpererweiterung mit Galoisgruppe G/I, die die lokalen Vorgaben erfüllt. Zu diesem Zweck sind Einbettungsprobleme folgenden Typs zu lösen:

$$\begin{tikzcd} & & & \mathcal{G}_F \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & G/I \arrow[r] & G/H \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Dabei sind $I \subset H$ aufeinanderfolgende Elemente der Filtrierung und $A = H/I$ ist abelsch vom Exponenten 2. Um dieses Einbettungsproblem zu lösen, ist es vorteilhaft, es in noch kleinere Schritte zu zerlegen. Dies ist im allgemeinen nicht möglich. Jedoch kann man zuerst das Einbettungsproblem

$$\begin{tikzcd} & & & \mathcal{G}_{\widetilde{F}} \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & \widetilde{P} \arrow[r] & P \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

betrachten, wobei $P \subseteq G/H$ eine 2-Sylowgruppe, $\widetilde{P}$ das Urbild von P in G/I und $\widetilde{F}$ der Fixkörper von P ist (so dass $\mathcal{G}_{\widetilde{F}}$ das Urbild von P in $\mathcal{G}_F$ ist). Dieses kann man in Einbettungsschritte mit Kernen der Ordnung 2 zerlegen. Die resultierenden Einbettungsprobleme sind unter Umständen nicht alle lösbar. Ersetzt man jedoch F durch eine Kette quadratischer Erweiterungen von F, eine für jedes nicht lösbare Einbettungsproblem, so ist die Lösbarkeit über dieser Erweiterung gewährleistet. Die Verallgemeinerung auf zusätzliche lokale Vorgaben in T_0 stellt in diesem Schritt kein Hindernis dar. Um zu zeigen, dass die Lösung unverzweigt außerhalb S gewählt werden kann, muss nur der Übergang von lokalen zu globalen Lösungen etwas anders gestaltet werden.

Setzt man die einzelnen Schritte zusammen, erhält man eine Lösung des Einbettungsproblems (**??**) mit lokalen Vorgaben. Des weiteren gibt es eine Lösung des Einbettungsproblems (**??**), da die zugehörige exakte Sequenz zerfällt, allerdings ohne lokale Vorgaben. Aus diesen beiden Lösungen konstruiert Henniart schließlich eine Lösung des Einbettungsproblems (**??**), das auch die lokalen Vorgaben erfüllt.

Abschließend möchte ich zuerst Prof. Kay Wingberg danken, dessen Vorlesungen mein Interesse an der Zahlentheorie geweckt haben und der mir ein interessantes Thema angeboten hat. Johannes Bartels und Jochen Gärtner waren stets kompetente Ansprechpartner und gaben mir in zahlreichen Gesprächen viele hilfreiche Anregungen zu auftauchenden Problemen. Zuletzt möchte ich Prof. Alexander Schmidt, David Rohr und ebenfalls Prof. Wingberg und Jochen Gärtner für die kritische Durchsicht meiner Arbeit danken.

Kapitel 2

Der Satz von Grunwald-Wang

In diesem Kapitel verallgemeinern wir den Satz von Grunwald-Wang, so dass er auch gilt, wenn wir fordern, dass die gesuchte Körpererweiterung unverzweigt außerhalb einer Primstellenmenge der Dichte 1 ist. Außerdem schränken wir den Spezialfall $(k, m, S \backslash T)$ wie er in [?] Definition 9.1.5 und 9.1.7 gegeben ist weiter ein, so dass der Gültigkeitsbereich des Satzes von Grunwald-Wang erweitert wird. Dazu wiederholen wir zunächst die Definition des Spezialfalls (k, m, S):

Definition 1. *Sei k ein Körper und $m = 2^r m'$ mit m' ungerade eine natürliche Zahl, die teilerfremd zur Charakteristik von k sei. Wir sagen, dass wir im Spezialfall (k, m) sind, wenn $r \geqslant 2$ ist und -1 im Bild des zyklotomischen Charakters $\chi_{cycl} : Gal(k(\mu_{2^r})|k) \to (\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})^\times$ liegt.*

Definition 2. *Sei k ein globaler Körper, $m = 2^r m'$ wie in Definition* **??** *und S eine Primstellenmenge von k. Wir sagen, dass wir im Spezialfall (k, m, S) sind, wenn wir im Spezialfall (k, m) sind und alle Primstellen $\mathfrak{p} \in S$ in $k(\mu_{2^r})|k$ zerlegt sind.*

Sei S_2 die Menge der Primstellen über 2. Wenn die Dichte $\delta(S)$ der Primstellenmenge S größer als $1/2$ ist, so ist laut Bemerkung 3 nach Lemma 9.8.1 in [?] der Spezialfall (k, m, S) äquivalent zu folgender Aussage:

$$\begin{aligned}
&k \text{ ist ein Zahlkörper, } m = 2^r m',\ m' \text{ ungerade, } r \geqslant 3,\\
&k(\mu_{2^r})|k \text{ ist nicht zyklisch und}\\
&\text{alle Primstellen in } S \cap S_2 \text{ sind zerlegt in } k(\mu_{2^r})|k.
\end{aligned}$$

Definition 3. *Sei k ein Zahlkörper, $T \subset S$ Primstellenmengen von k und m eine natürliche Zahl. Wir sagen, dass wir im Spezialfall (k, m, S, T) sind, wenn wir im Spezialfall $(k, m, S \backslash T)$ sind, aber nicht im Spezialfall $(k, m, S \cup S_2)$.*

Für einen globalen Zahlkörper k bezeichnen wir mit k_S die maximale außerhalb S unverzweigte Teilerweiterung eines fest gewählten algebraischen Abschlusses von k und mit $\mathcal{G}_S = \mathrm{Gal}(k_S|k)$ ihre Galoisgruppe. Ist eine Primstelle $\mathfrak{p}$ von k gegeben, so schreiben wir $k_\mathfrak{p}$ für die Komplettierung von k an der Stelle $\mathfrak{p}$ und $\mathcal{G}_\mathfrak{p}$ für deren absolute Galoisgruppe. Eine abelsche außerhalb S unverzweigte Erweiterung von k mit Galoisgruppe A ist durch ein Element von $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_S, A)_{\mathrm{epi}}$ gegeben, das heißt durch einen stetigen Epimorphismus

$$\varphi : \mathcal{G}_S \twoheadrightarrow A.$$

Wir wollen nun untersuchen, wann man eine solche Erweiterung finden kann, wenn man zusätzlich an endlich vielen Primstellen die lokalen Erweiterungen vorgibt.

Satz 4 (Grunwald-Wang). *Sei T eine endliche Primstellenmenge eines globalen Körpers k, $S \supset T$ eine Primstellenmenge von k der Dichte $\delta(S) = 1$ und $A \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$ eine endliche abelsche Gruppe. Wenn wir für jedes $i = 1, \ldots, r$ nicht im Spezialfall (k, n_i, S, T) sind, so ist folgende Abbildung surjektiv:*

$$Hom(\mathcal{G}_S, A)_{epi} \to \prod_{\mathfrak{p} \in T} Hom(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, A). \tag{2.1}$$

Bemerkung 5. *Die Bedingung, dass wir für $i = 1, \ldots r$ nicht im Spezialfall (k, n_i, S, T) sind, ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung von A in zyklische Gruppen, da der Spezialfall (k, n_i, S, T) nur von dem 2-primären Anteil von $\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ abhängt. Die Zerlegung des 2-primären Anteils in zyklische Gruppen ist aber eindeutig.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass die Menge $S_{\#A}$ der Primstellen, die $\#A$ teilen und die Menge S_∞ der unendlichen Primstellen in S enthalten sind. Setzt man nämlich $S' = S \cup S_{\#A} \cup S_\infty$ und $T' = T \cup S_{\#A} \cup S_\infty$, und ist die obige Abbildung für S' statt S und T' statt T surjektiv, so ist sie es auch für S und T, und zwar aus folgendem Grund: Sei $(\varphi_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in T} \in \prod_{\mathfrak{p} \in T} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, A)$ und $\varphi' \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_{S'}, A)_{\mathrm{epi}}$ ein Urbild von $(\varphi_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in T} \times (0_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in T' \backslash T} \in \prod_{\mathfrak{p} \in T'} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, A)$. Dann faktorisiert φ' über $\mathcal{G}_S$, da die Einschränkung auf $\mathcal{G}_\mathfrak{p}$ für $\mathfrak{p} \in S' \backslash S$ trivial, also unverzweigt ist. Wir erhalten demnach ein Urbild $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_S, A)_{\mathrm{epi}}$ von $(\varphi_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in T}$. Außerdem sind die Spezialfälle $(k, n_i, S \backslash T)$ und $(k, n_i, S' \backslash T')$ äquivalent, da $S' \backslash T' = S \backslash T$ und die Spezialfälle $(k, n_i, S \cup S_2)$ und $(k, n_i, S' \cup S_2)$ sind äquivalent, denn $\delta(S' \cup S_2) = \delta(S \cup S_2) = 1$ und die beiden Stellenmengen unterscheiden sich lediglich um Primstellen, die nicht über 2 liegen (vgl. Bemerkung 3 nach Lemma 9.1.8 in [?]).

Seien $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r \in S \backslash T$, $\mathfrak{q}_i \nmid 2$ und seien

$$\varphi_{\mathfrak{q}_i} : \mathcal{G}_{\mathfrak{q}_i} \to A$$

Homomorphismen, so dass die Bilder der $\varphi_{\mathfrak{q}_i}$ die Gruppe A erzeugen. Diese existieren: A ist als endliche abelsche Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$. Wähle für jedes $\mathfrak{q}_i$ einen Homomorphismus $\varphi_{\mathfrak{q}_i} : \mathcal{G}_{\mathfrak{q}_i} \to \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$, der die unverzweigte Erweiterung vom Grad n_i definiert. Sei nun $T' = T \cup \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r\}$. Weil $\delta(S \backslash T) = \delta(S \backslash T') = 1$ und sich T und T' nur durch Primstellen unterscheiden, die nicht über 2 liegen, impliziert Bemerkung 3 nach (9.1.8) in [?], dass die Spezialfälle $(k, 2^n, S, T)$ und $(k, 2^n, S, T')$ äquivalent sind.

Wir wollen nun die Surjektivität folgender Abbildung zeigen:

$$\mathrm{res}^1(k_S, T', A) : H^1(k_S|k, A) \to \prod_{\mathfrak{p} \in T'} H^1(k_\mathfrak{p}, A).$$

Das heißt, wir müssen zeigen, dass der Kokern $\mathrm{coker}^1(k_S, T', A)$ trivial ist. Dafür reicht es zu zeigen, dass $\mathrm{coker}^1(k_S, T', \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}) = 0$ für $i = 1, \ldots r$, denn $A \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$ und somit $\mathrm{coker}^1(k_S, T', A) \cong \mathrm{coker}^1(k_S, T', \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times \ldots \times \mathrm{coker}^1(k_S, T', \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z})$.

Nach [?] Lemma 9.2.2 ist folgende Sequenz exakt:

$$0 \to Ш^1(k_S, \mu_{n_i}) \to Ш^1(k_S, S \backslash T', \mu_{n_i}) \to \mathrm{coker}^1(k_S, T', \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z})^\vee \to 0,$$

wobei für $i \in \mathbb{N}$, einen $\mathcal{G}_S$-Modul M und $R \subseteq S$ die Gruppe $Ш^i(k_S, R, M)$ der Kern der Abbildung $H^i(k_S|k, M) \to \prod_{\mathfrak{p} \in R} H^i(k_\mathfrak{p}, M)$ ist, und $Ш^i(k_S, M) = Ш^i(k_S, S, M)$. Aus [?]

Theorem 9.1.9 (ii) wissen wir außerdem, dass $Ш^1(k_S, S\backslash T', \mu_{n_i}) = 0$ falls wir nicht im Spezialfall $(k_S, n_i, S\backslash T')$ sind und $Ш^1(k_S, S\backslash T', \mu_{n_i}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ falls wir im Spezialfall sind, denn $\delta(S) = 1$ und $S_{n_i} \subset S$. Ebenso ist $Ш^1(k_S, \mu_{n_i}) = 0$ falls wir nicht im Spezialfall (k_S, n_i, S) sind und $Ш^1(k_S, \mu_{n_i}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ falls wir im Spezialfall sind. Der Kokern $\mathrm{coker}^1(k_S, T', \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z})$ ist folglich genau dann Null, wenn wir nicht im Spezialfall (k_S, n_i, S, T') sind (beachte $S = S \cup S_2$ falls $2|n_i$, ansonsten sind wir ohnehin nicht im Spezialfall). da A ein trivialer $\mathcal{G}_S$-Modul ist, erhalten wir also die Surjektivität der Abbildung

$$\mathrm{res}^1(k_S, T', A) : \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_S, A) \to \prod_{\mathfrak{p} \in T'} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, A). \tag{2.2}$$

Daraus folgt sofort die Surjektivität der Abbildung (**??**), denn für $(\varphi_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in T} \in \prod_{\mathfrak{p}\in T} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, A)$ ist jedes Urbild von $(\varphi_{\mathfrak{q}_1}, \ldots, \varphi_{\mathfrak{q}_r}) \times (\varphi_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in T}$ unter der Abbildung (**??**) auch ein Urbild von $(\varphi_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in T}$ unter (**??**) (Da $(\varphi_{\mathfrak{q}_1}, \ldots, \varphi_{\mathfrak{q}_r})$ A erzeugen, ist das Urbild ein Epimorphismus). □

Korollar 6. *Sei T eine endliche Primstellenmenge eines globalen Körpers k, $S \supset T$ eine Primstellenmenge von k der Dichte $\delta(S) = 1$ und $A \cong \mathbb{Z}/n_1/\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$ eine endliche abelsche Gruppe. Sei für alle $\mathfrak{p} \in T$ eine endliche abelsche Erweiterung $K_\mathfrak{p}|k_\mathfrak{p}$ gegeben, so dass Gal$(K_\mathfrak{p}|k_\mathfrak{p})$ in A eingebettet werden kann. Wenn wir für jedes $i = 1, \ldots, r$ nicht im Spezialfall (k, n_i, S, T) sind , so existiert eine globale abelsche Erweiterung $K|k$ mit Galoisgruppe A, so dass K für $\mathfrak{p} \in T$ die gegebenen lokalen Erweiterungen $K_\mathfrak{p}|k_\mathfrak{p}$ realisiert und außerhalb S unverzweigt ist.*

Bemerkung 7. *Falls wir im Spezialfall (k, n_i, S, T) aus Satz **??** sind, ist $Ш^1(k_S, \mu_{n_i}) = 0$ und $Ш^1(k_S, S\backslash T, \mu_{n_i}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und daher ist coker$^1(k_S, T, \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z})^\vee \neq 0$. Damit ist*

$$Hom(\mathcal{G}_S, A) \to \prod_{\mathfrak{p}\in T} Hom(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, A)$$

nicht surjektiv und erst recht nicht

$$Hom(\mathcal{G}_S, A)_{epi} \to \prod_{\mathfrak{p}\in T} Hom(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, A).$$

Kapitel 3

Der Satz von Neukirch

Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, dass der Satz von Neukirch ([?] Theorem 9.5.5) auch gilt, wenn man zusätzlich fordert, dass die gesuchte Körpererweiterung unverzweigt außerhalb einer Primstellenmenge der Dichte 1 ist. Es wird also folgende Aussage bewiesen:

Satz 8 (Neukirch)**.** *Sei k ein globaler Körper, S eine Primstellenmenge von k der Dichte 1 und $\mathcal{G}_S$ die Galoisgruppe der maximalen außerhalb S unverzweigten Erweiterung von k. Sei $\varphi : \mathcal{G}_S \twoheadrightarrow \Gamma$ ein surjektiver Homomorphismus auf die endliche Gruppe Γ, d.h. $\Gamma = Gal(K|k)$ für eine endliche, galoissche, außerhalb S unverzweigte Erweiterung $K|k$. Sei G eine Gruppe, $f : G \twoheadrightarrow \Gamma$ ein surjektiver Homomorphismus, dessen Kern separabel, proauflösbar und von endlichem Exponenten n mit $(n, \#\mu(K)) = 1$ ist ($\mu(K)$ bezeichnet die Gruppe der Einheitswurzeln in K). Für $\mathcal{G} = \mathcal{G}_S$ oder $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\mathfrak{p}$ sei $\mathscr{H}\!om_\Gamma(\mathcal{G}, G)$ der Quotient der Γ-Homomorphismen $Hom_\Gamma(\mathcal{G}, G)$ modulo Konjugation mit einem Element von $\ker(f : G \twoheadrightarrow \Gamma)$ und $\mathscr{H}\!om_\Gamma(\mathcal{G}, G)_{epi}$ die Untergruppe der Äquivalenzklassen surjektiver Γ-Homomorphismen. Gilt*

$$\prod_{\mathfrak{p}} \mathscr{H}\!om_\Gamma(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, G) \neq \varnothing,$$

dann ist die Abbildung

$$\mathscr{H}\!om_\Gamma(\mathcal{G}_S, G)_{epi} \to \prod_{\mathfrak{p}\in T} \mathscr{H}\!om_\Gamma(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, G)$$

surjektiv für jede endliche Teilmenge $T \subset S$.

Der Beweis lehnt sich sehr stark an den Beweis des Satzes von Neukirch in [?] Theorem 9.5.5 an. Zunächst brauchen wir folgendes Lemma:

Lemma 9. *Sei $S_\infty \subset S$. Ist der Kern A des Homomorphismus $f : G \twoheadrightarrow \Gamma = Gal(K|k)$ ein einfacher Γ-Modul mit $pA = 0$, $p \in \mathbb{N}(S) = \{n \in \mathbb{N} |\ \mathfrak{p} \in S\ \forall \mathfrak{p}|n\}$ und $p \nmid \#\mu(K)$, so gilt:*

$$\mathscr{H}\!om_\Gamma(\mathcal{G}_S, G) \neq \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad \prod_{\mathfrak{p}} \mathscr{H}\!om_\Gamma(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, G) \neq \varnothing.$$

Beweis. Man betrachte das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
H^2(\mathcal{G}_S, A) \arrow[rr, hook] & & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S} H^2(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, A) \arrow[r, hook] & \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^2(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, A). \\
& H^2(\Gamma, A) \arrow[ul, "\varphi^*"] \arrow[ur, "(\varphi^*_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Hierbei bezeichnet φ die Projektion $\mathcal{G}_S \twoheadrightarrow \Gamma$ (beachte $\varphi_{\mathfrak{p}}^* = 0$ für $\mathfrak{p} \notin S$, da $H^2_{nr}(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, A) = 0$). Nach [?] Corollary 9.1.16 (iii) ist die linke waagrechte Abbildung injektiv, wenn es endliche galoissche Erweiterungen $k' \subseteq \Omega \subseteq k_S$ gibt, so dass $p \nmid [\Omega : k']$ und

$$\begin{aligned} &\mu_p \nsubseteq k' \text{ und } k(A) \subseteq k', \\ &\mu_p \subseteq \Omega \text{ und } \mathrm{cs}(\Omega|k) \mathrel{\tilde{\subseteq}} S. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\mathrm{cs}(\Omega|k)$ die Menge der total zerlegten Primstellen und $k(A)$ die minimale Erweiterung von k, so dass A ein trivialer $G_S(k(A))$-Modul ist. Setzt man $\Omega = K(\mu_p)$ und $k' = K$, so sind diese Voraussetzungen erfüllt.

Sei $x \in H^2(\Gamma, A)$ die Klasse, die der Gruppenerweiterung

$$1 \to A \to G \to \Gamma \to 1$$

entspricht. Mithilfe von [?] Proposition 3.5.9 erhält man folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \mathscr{H}\!om_\Gamma(\mathcal{G}_S, G) \neq \varnothing \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi^*(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi^*_{\mathfrak{p}}(x) = 0 \quad \forall \mathfrak{p} \\ &\Leftrightarrow \quad \prod_{\mathfrak{p}} \mathscr{H}\!om_\Gamma(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, G) \neq \varnothing. \end{aligned}$$

□

Im folgenden betrachten wir das Einbettungsproblem

$$\begin{tikzcd} & & & \mathcal{G}_S \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\varphi"] & \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & G \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

mit einfachem abelschen Kern A, so dass $pA = 0$.

Hauptlemma. *Sei $E \twoheadrightarrow G$ ein surjektiver Homomorphismus mit proauflösbarem Kern von endlichem Exponenten $e \in \mathbb{N}(S)$ und n ein Vielfaches von ep. Sei $T \subset S$ eine endliche Primstellenmenge. Sei $n \in \mathbb{N}(S)$ mit $(n, \#\mu(K)) = 1$ und $S_\infty \subset S$. Ist $\prod_{\mathfrak{p}} \mathscr{H}\!om_\Gamma(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, G) \neq \varnothing$, so existiert ein Element $[\psi] \in \mathscr{H}\!om_\Gamma(\mathcal{G}_S, G)_{epi}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $[\psi]$ induziert gegebene Elemente $[\psi_{\mathfrak{p}}] \in \mathscr{H}\!om_\Gamma(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, G)$ für alle Primstellen $\mathfrak{p} \in T$.

(ii) Wenn $\mathfrak{p} \notin T$ in $K|k$ unverzweigt ist, dann ist $\mathscr{H}\!om_G(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, E) \neq \varnothing$.

(iii) Für den Körper N, der durch $\psi : \mathcal{G}_S \twoheadrightarrow G$ definiert wird, gilt $(n, \#\mu(N)) = 1$.

Beweis. Ist $T \subseteq T' \subseteq S$ für eine endliche Primstellenmenge T', dann gilt das Hauptlemma für T, wenn es für T' gilt. Um das einzusehen wähle man für jedes $\mathfrak{p} \in T' \backslash T$ ein Element $[\psi_{\mathfrak{p}}]$ aus der nichtleeren Menge $\mathscr{H}\!om_\Gamma(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, G)$. Ist $\mathfrak{p} \in T' \backslash T$ unverzweigt, nehme man an $[\psi_{\mathfrak{p}}] \in \mathscr{H}\!om^{\mathrm{nr}}_\Gamma(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, G) \neq \varnothing$. Erfüllt nun $[\psi] \in \mathscr{H}\!om_\Gamma(\mathcal{G}_S, G)_{\mathrm{epi}}$ die Bedingungen (i)-(iii) für T', so auch für T. Tatsächlich ist (i) und (iii) trivialerweise erfüllt und (ii) folgt aus der Tatsache, dass $\mathscr{H}om_G^{\mathrm{nr}}(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, E) \neq \varnothing$ für unverzweigte $\mathfrak{p} \in T'\backslash T$, da wir für diese Primstellen unverzweigte Elemente $[\psi_\mathfrak{p}]$ ausgewählt haben. Aus diesem Grund können wir annehmen, dass

$$\mathrm{Ram}(K|k) \cup S_n \cup S_\infty \subseteq T,$$

wobei S_n die Menge aller Primstellen ist, die n teilen und $\mathrm{Ram}(K|k)$ die Menge der Primstellen, die in $K|k$ verzweigen. Hierbei beachte man, dass $\mathrm{Ram}(K|k) \cup S_n \cup S_\infty \subseteq S$.

Als nächstes zeigen wir, dass es reicht, ein Element $[\psi] \in \mathscr{H}om_\Gamma(\mathcal{G}_S, G)$ mit den Eigenschaften (i)-(iii) zu finden, d.h. die Forderung nach der Surjektivität von $[\psi]$ kann fallen gelassen werden. Sei $\mathfrak{q} \in S\backslash T$ eine Primstelle, die in $K|k$ vollständig zerlegt ist (diese existiert, da $\delta(S\backslash T) = 1$), und sei $a \in A\backslash\{0\}$. Sei weiterhin $\psi_\mathfrak{q} : \mathcal{G}_\mathfrak{q} \twoheadrightarrow \langle a \rangle$ ein unverzweigter surjektiver Homomorphismus auf die zyklische Gruppe $\langle a \rangle \subseteq G$. Da $\mathfrak{q}$ in $K|k$ vollständig zerlegt ist, gilt $\varphi_\mathfrak{q}(\mathcal{G}_\mathfrak{q}) = \{1\}$, und damit $[\psi_\mathfrak{q}] \in \mathscr{H}om_\Gamma(\mathcal{G}_\mathfrak{q}, G)$. Sei $T' = T \cup \{\mathfrak{q}\}$ und $[\psi] \in \mathscr{H}om_\Gamma(\mathcal{G}_S, G)$ mit den Eigenschaften (i)-(iii) für T'. Dann erfüllt $[\psi]$ die Eigenschaften (i)-(iii) auch für T wie oben gezeigt. Außerdem ist $[\psi]$ surjektiv, denn $\psi(\mathcal{G}_\mathfrak{q}) \subseteq G$ ist konjugiert zu $\psi_\mathfrak{q}(\mathcal{G}_\mathfrak{q}) = \langle a \rangle$ unter einem Element von A und somit gilt $a \in \psi(\mathcal{G}_\mathfrak{q}) \subseteq \psi(\mathcal{G}_S)$. Darum ist $A \cap \psi(\mathcal{G}_S)$ ein nichttrivialer Γ-Untermodul von A. Weil aber A einfach ist, folgt daraus $A \subseteq \psi(\mathcal{G}_S)$ und somit ist $[\psi]$ surjektiv.

Vor dem eigentlichen Beweis nehmen wir noch einen letzten Reduktionsschritt vor: Es reicht die Existenz eines Elements $[\psi] \in \mathscr{H}om_\Gamma(\mathcal{G}_S, G)$ zu zeigen, das nur die beiden Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt. Sei dazu ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel und seien $\sigma_1, \ldots \sigma_r$ Erzeuger von $\mathrm{Gal}(K(\zeta_n)|K)$. Es ist $K(\zeta_n) \subseteq k_S$, da $S_n \subseteq S$. Seien $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r \in S\backslash T$ verschiedene Primstellen, die in $K|k$ vollständig zerfallen und in $K(\zeta_n)|K$ unverzweigt sind, so dass

$$\mathfrak{Frob}_{\mathfrak{Q}_i} = \sigma_i \qquad i = 1, \ldots, r,$$

wobei $\mathfrak{Q}_i$ eine Primstelle von K über $\mathfrak{q}_i$ ist und $\mathfrak{Frob}_{\mathfrak{Q}_i} \in \mathrm{Gal}(K(\zeta_n)|K)$ der Frobeniusautomorphismus zu $\mathfrak{Q}_i$. Solche Primstellen $\mathfrak{q}_i$ existieren aus dem folgenden Grund: Da $\mathrm{Gal}(K(\zeta_n)|K)$ abelsch ist, sind die $\{\sigma_i\}$ Konjugationsklassen in $\mathrm{Gal}(K(\zeta_n)|K)$. Sei

$$P_{K(\zeta_n)|K}(\{\sigma_i\}) = \{\text{Primstellen } \mathfrak{p} \text{ von } K, \text{ unverzweigt in } K(\zeta_n)|K, \text{ so dass } \mathfrak{Frob}_\mathfrak{p} = \sigma_i\}.$$

Dann gilt nach dem Čebotarevschen Dichtigkeitssatz

$$\delta_K(P_{K(\zeta_n)|K)}(\{\sigma_i\}) = \frac{1}{\#\mathrm{Gal}(K(\zeta_n)|K)}.$$

Da $\delta_K((S\backslash T) \cap \mathrm{cs}(K|k)) = 1$ ist, gibt es unendlich viele Primstellen von k mit den gewünschten Eigenschaften und wir können für jedes i eine solche Primstelle $\mathfrak{q}_i$ auswählen, so dass die $\mathfrak{q}_i$ paarweise verschieden sind. Dann ist $\varphi_{\mathfrak{q}_i} : \mathcal{G}_{\mathfrak{q}_i} \twoheadrightarrow \Gamma$ für jedes $i = 1, \ldots, r$ der triviale Homomorphismus, und der triviale Homomorphismus $\psi_{\mathfrak{q}_i} : \mathcal{G}_{\mathfrak{q}_i} \twoheadrightarrow G$ liefert ein Element von $\mathscr{H}om_\Gamma(\mathcal{G}_{\mathfrak{q}_i}, G)$. Sei $T' = T \cup \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r\}$ und sei $[\psi] \in \mathscr{H}om_\Gamma(\mathcal{G}_S, G)$ ein Element, das die Eigenschaften (i) und (ii) für T' erfüllt. Die gleiche Überlegung wie am Anfang des Beweises zeigt, dass $[\psi]$ die Eigenschaften (i) und (ii) auch für T erfüllt. Wir zeigen nun, dass es dann auch die Eigenschaft (iii) für T erfüllt. Die Einschränkung von ψ auf $\mathcal{G}_{\mathfrak{q}_i}$ ist der triviale Homomorphismus, d.h. $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ sind vollständig zerlegt im Körper $N|k$, der durch $\psi : \mathcal{G}_S \twoheadrightarrow G$ definiert wird. Deshalb sind die Bilder der Automorphismen $\sigma_i = \mathfrak{Frob}_{\mathfrak{Q}_i}$ unter der Surjektion $\mathrm{Gal}(K(\zeta_n)|K) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(N \cap K(\zeta_n)|K)$ trivial. Daraus folgt, dass $N \cap K(\zeta_n) = K$, da die σ_i die Galoisgruppe von $K(\zeta_n)|K)$ erzeugen. Sei $d = (n, \#\mu(N))$ und sei ζ_d eine primitive d-te Einheitswurzel. Dann ist $\zeta_d \in N \cap K(\zeta_n) = K$, d.h. $d|(n, \#\mu(K)) = 1$, und somit gilt $(n, \#\mu(N)) = d = 1$.

Wir kommen nun zum wesentlichen Schritt des Beweises. Laut Annahme ist $\prod_{\mathfrak{p}} \mathscr{H}om_\Gamma(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, G)$ nicht leer. Wegen Lemma **??** ist somit auch $\mathscr{H}om_\Gamma(\mathcal{G}_S, G)$ nicht leer. Sei $[\psi_0] \in \mathscr{H}om_\Gamma(\mathcal{G}_S, G)$. Wir werden dieses Element um eine Kohomologieklasse $x \in H^1(\mathcal{G}_S, A)$ zu einem Element $[\psi]$ abändern, das den Bedingungen (i) und (ii) des Hauptlemmas genügt. Sei $N_0|k$ der Körper, der durch $\psi_0 : \mathcal{G}_S \to G$ definiert wird. Die Erweiterung $N_0|K$ ist abelsch, da ihre Galoisgruppe isomorph zu einer Untergruppe von A ist, und enthalten in k_S. Seien $[\psi_{1,\mathfrak{p}}] \in \mathscr{H}om_\Gamma(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, G)$ die Elemente, die für $\mathfrak{p} \in T$ vorgegeben sind. Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r \in S\backslash T$ die Primstellen außerhalb T, für die $\psi_{0,\mathfrak{p}}$ verzweigt. Da $\mathrm{Ram}(K|k) \subseteq T$, sind die Primstellen $\mathfrak{p}_i$ unverzweigt in $K|k$, d.h. die Homomorphismen $\varphi_{\mathfrak{p}_i}$ sind unverzweigt und können daher zu unverzweigten Γ-Homomorphismen $\psi_{1,\mathfrak{p}_i} : \mathcal{G}_{\mathfrak{p}_i} \to G$ hochgehoben werden. Sei $T^* = T \cup \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$ und für jedes $\mathfrak{p} \in T^*$ sei $y_\mathfrak{p} \in H^1(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, A)$ die Kohomologieklasse, die $[\psi_{0,\mathfrak{p}}]$ auf $[\psi_{1,\mathfrak{p}}]$ schickt, d.h.

$$[\psi_{0,\mathfrak{p}}]^{y_\mathfrak{p}} = [\psi_{1,\mathfrak{p}}].$$

Sei $\Omega = N_0(\zeta_n)$, wobei ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel sei. Weil S_n in S enthalten ist, ist $\Omega \subset k_S$. Sei $K' \subseteq \Omega$ der Fixkörper des zu p teilerfremden Teils $\mathrm{Gal}(\Omega|K)(p')$ der abelschen Gruppe $\mathrm{Gal}(\Omega|K)$. Dann ist $K'|K$ eine p-Erweiterung, und daher ist $\mu_p \nsubseteq K'$, da $\mu_p \nsubseteq K$. Deshalb sind die Voraussetzungen für Theorem 9.3.3 aus [**?**] erfüllt:

A ist einfach, $pA = 0$, $S \supseteq S_p \cup S_\infty$, $p \nmid [\Omega : K']$, $K' \subseteq \Omega \subseteq k_S$, so dass

(i) $\mu_p \nsubseteq K'$, $k(A) \subseteq K \subseteq K'$

(ii) $\mu_p \subseteq \Omega$ (denn $p|n$), $\mathrm{Ram}(\Omega|k) \subseteq S$, $\mathrm{cs}(\Omega|k) \mathrel{\tilde{\subseteq}} S$ (denn $\delta(S) = 1$).

Wir finden folglich ein Element $x \in H^1(\mathcal{G}_S, A)$ mit den Eigenschaften:

(a) $x_\mathfrak{p} = y_\mathfrak{p}$ für $\mathfrak{p} \in T^*$

(b) ist $\mathfrak{p} \notin T^*$, so ist $x_\mathfrak{p}$ zyklisch und ist $x_\mathfrak{p}$ zusätzlich verzweigt, dann ist $\mathfrak{p}$ voll zerlegt in Ω.

Wir werden nun beweisen, dass das Element

$$[\psi] = [\psi_0]^x \in \mathscr{H}om_\Gamma(\mathcal{G}_S, G)$$

die Bedingungen (i) und (ii) des Hauptlemmas erfüllt. Ist $\mathfrak{p} \in T$, so gilt:

$$[\psi_\mathfrak{p}] = [\psi_{0,\mathfrak{p}}]^{x_\mathfrak{p}} = [\psi_{0,\mathfrak{p}}]^{y_\mathfrak{p}} = [\psi_{1,\mathfrak{p}}].$$

Bedingung (i) ist also erfüllt. Sei $\mathfrak{p} \notin T$ unverzweigt in $K|k$. Wenn $\mathfrak{p} \in T^*\backslash T$ oder $\mathfrak{p} \notin S$, dann ist $[\psi_\mathfrak{p}] = [\psi_{1,\mathfrak{p}}]$ unverzweigt und somit kann $\psi_\mathfrak{p}$ zu einem G-Homomorphismus $\mathcal{G}_\mathfrak{p} \to E$ hochgehoben werden, d.h. $\mathscr{H}om_G(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, E)$ ist nicht leer. Sei nun $\mathfrak{p} \in S\backslash T^*$. Wenn $[\psi_\mathfrak{p}]$ unverzweigt ist, dann ist $\mathscr{H}om_G(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, E)$ aus dem gleichen Grund wie oben nicht leer. Man nehme also an, dass $[\psi_\mathfrak{p}] = [\psi_{0,\mathfrak{p}}]^{x_\mathfrak{p}}$ verzweigt ist. Da $[\psi_{0,\mathfrak{p}}]$ für $\mathfrak{p} \notin T^*$ unverzweigt ist, muss die Kohomologieklasse $x_\mathfrak{p}$ verzweigen. Daher ist nach Eigenschaft (b) die Primstelle $\mathfrak{p}$ in $\Omega|k$

voll zerlegt, insbesondere ist sie also voll zerlegt in $N_0|k$ und in $k(\zeta_n)|k$. Der Homomorphismus $\psi_{0,\mathfrak{p}} : \mathcal{G}_\mathfrak{p} \to G$ ist demnach trivial, d.h. $N_{0,\mathfrak{p}} = k_\mathfrak{p}$, und $\zeta_n \in k_\mathfrak{p}$. Da $K_\mathfrak{p} = k_\mathfrak{p}$, ist der Galoismodul A ein trivialer $\mathcal{G}_\mathfrak{p}$-Modul, d.h.

$$x_\mathfrak{p} : \mathcal{G}_\mathfrak{p} \to A \subseteq G$$

ist ein Homomorphismus, der die Klasse $[\psi_\mathfrak{p}] = [\psi_{0,\mathfrak{p}}]^{x_\mathfrak{p}}$ repräsentiert. Es bleibt noch zu zeigen, dass $x_\mathfrak{p}$ zu einem G-Homomorphismus $\mathcal{G}_\mathfrak{p} \to E$ hochgehoben werden kann. Weil $x_\mathfrak{p}$ zyklisch ist, wird dadurch eine zyklische, verzweigte Erweiterung $N_\mathfrak{p}|k_\mathfrak{p}$ vom Grad p definiert (beachte: A ist einfach mit $pA = 0$). Da $S_n \subseteq T$ und somit $\mathfrak{p} \nmid p$, ist diese Erweiterung zahm verzweigt. Es ist also $N_\mathfrak{p} = k_\mathfrak{p}(\sqrt[p]{\pi})$ mit einem Primelement π von $k_\mathfrak{p}$. Sei $\bar{\sigma}$ ein Erzeuger der Gruppe

$$\mathrm{Gal}(N_\mathfrak{p}|k_\mathfrak{p}) = x_\mathfrak{p}(\mathcal{G}_\mathfrak{p}) \subseteq G$$

und sei σ ein Urbild von $\bar{\sigma}$ in E unter der Projektion $g : E \twoheadrightarrow G$. Da $\bar{\sigma}$ von der Ordnung p ist, kann man σ in einer p-Sylowgruppe E_p von E wählen. Die Ordnung m von σ ist also eine p-Potenz und diese teilt n, da der Exponent e von $\ker(E \twoheadrightarrow G)$ ein Teiler von n/p ist. Weil $\zeta_n \in k_\mathfrak{p}$, sind die m-ten Einheitswurzeln in $k_\mathfrak{p}$ enthalten. Deshalb ist die Erweiterung $M_\mathfrak{p} = k_\mathfrak{p}(\sqrt[m]{\pi})|k_\mathfrak{p}$ zyklisch vom Grad m. Bildet man einen Erzeuger τ von $\mathrm{Gal}(M_\mathfrak{p}|k_\mathfrak{p})$ mit Bild $\bar{\sigma}$ in $\mathrm{Gal}(N_\mathfrak{p}|k_\mathfrak{p})$ auf σ ab, erhält man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{G}_\mathfrak{p} \arrow[dl] \arrow[d, two heads] \arrow[dd, bend left=60, "x_\mathfrak{p}=\psi_\mathfrak{p}"] \\
\mathrm{Gal}(M_\mathfrak{p}|k_\mathfrak{p}) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathrm{Gal}(N_\mathfrak{p}|k_\mathfrak{p}) \arrow[d, hook] \\
E \arrow[r, two heads] & G.
\end{tikzcd}$$

Daher kann $\psi_\mathfrak{p}$ zu einem G-Homomorphismus $\mathcal{G}_\mathfrak{p} \to E$ hochgehoben werden und der Beweis des Hauptlemmas ist abgeschlossen. □

Wir können nun das Hauptlemma benutzen um Satz **??** zu beweisen:

Beweis von Satz **??**. Zunächst überzeuge man sich davon, dass man ohne Einschränkung annehmen kann, dass $S_n \cup S_\infty \subset S$. Dazu definiere man $S' = S \cup S_n \cup S_\infty$ und $T' = T \cup (S' \backslash S)$, und gebe in $T' \backslash T$ die triviale Erweiterung vor. Hat man eine globale, außerhalb S' unverzweigte Lösung des Einbettungsproblems gefunden, die die lokalen Vorgaben in T' erfüllt, so ist sie auch unverzweigt außerhalb S und erfüllt die lokalen Vorgaben in T.

Betrachte nun das Einbettungsproblem

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{G}_S \arrow[d, "\varphi"] & \\
1 \arrow[r] & H \arrow[r] & G \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

wobei $\Gamma = \mathrm{Gal}(K|k)$ und der Kern H eine separable, proauflösbare Gruppe von endlichem Exponenten $n \in \mathbb{N}(S)$ ist mit $(n, \#\mu(K)) = 1$. Wir finden demnach eine absteigende Kette

$$H = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset H_3 \supset \ldots$$

offener, normaler Untergruppen von H, so dass die Quotienten $A_i = H_{i-1}/H_i$ abelsch sind und $\bigcap_i H_i = \{1\}$. Da Γ endlich ist, kann man annehmen, dass die H_i normal in G sind (ersetze H_i durch $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} H_i^\gamma$). Dann sind die A_i Γ-Moduln und durch $\varphi : \mathcal{G}_S \twoheadrightarrow \Gamma$ werden sie zu $\mathcal{G}_S$-Moduln. Indem man obige Kette durch eine maximale Verfeinerung ersetzt, kann man außerdem erreichen, dass die A_i einfache $\mathcal{G}_S$-Moduln sind.

Für jedes $\mathfrak{p} \in T$ geben wir nun ein Element $[\psi_\mathfrak{p}] \in \mathscr{H}om_\Gamma(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, G)$ vor und wählen daraus einen Γ-Homomorphismus $\psi_\mathfrak{p} : \mathcal{G}_\mathfrak{p} \to G$ aus. Wir wollen ein Element $[\psi] \in \mathscr{H}om_\Gamma(\mathcal{G}_S, G)_{\mathrm{epi}}$ konstruieren, so dass $[\psi|_{\mathcal{G}_\mathfrak{p}}] = [\psi_\mathfrak{p}]$ für $\mathfrak{p} \in T$. Wir setzen $G_i = G/H_i$ und betrachten folgende kommutative Diagramme mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{G}_S \arrow[d] \\
H \arrow[r, hook] \arrow[d] & G \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d] & \Gamma \arrow[d, equal] \\
H/H_i \arrow[r, hook] \arrow[d] & G_i \arrow[r, two heads, "f_i"] \arrow[d, "\pi_i"'] & \Gamma \arrow[d, equal] \\
H/H_{i-1} \arrow[r, hook] & G_{i-1} \arrow[r, two heads, "f_{i-1}"] & \Gamma
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{G}_\mathfrak{p} \arrow[dl, "\psi_\mathfrak{p}"'] \arrow[d, "\varphi_\mathfrak{p}"] \arrow[ddl, "\psi_{\mathfrak{p},i}"] \\
G \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \Gamma \arrow[d, equal] \\
G_i \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\pi_i"'] & \Gamma \arrow[d, equal] \\
G_{i-1} \arrow[r, two heads] & \Gamma.
\end{tikzcd}$$

Der Kern von $\pi_i : G_i \to G_{i-1}$ ist der einfache $\mathcal{G}_S$-Modul A_i. Sei $p_i A_i = 0$ und $n_i = \exp(H_i)$. Bezeichne die Verknüpfung von $\psi_\mathfrak{p}$ und $G \twoheadrightarrow G_i$ mit $\psi_{\mathfrak{p},i}$.

Zunächst beweisen wir folgende

Behauptung. Es existiert eine Folge von surjektiven Γ-Homomorphismen $\psi_i : \mathcal{G}_S \to G_i$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\psi_{i-1} = \pi_i \circ \psi_i$, $i \in \mathbb{N}$.

(2) $[\psi_i|_{\mathcal{G}_\mathfrak{p}}] = [\psi_{\mathfrak{p},i}]$ in $\mathscr{H}om_\Gamma(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, G_i)$ für $\mathfrak{p} \in T$.

(3) Für den Körper K_i, der durch ψ_i definiert wird, gilt $(n, \#\mu(K_i)) = 1$.

(4) $\prod_\mathfrak{p} \mathscr{H}om_{G_i}(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, G) \neq \emptyset$.

Beweis der Behauptung. Für $i = 0$ kann man G_0 mit Γ identifizieren und $\psi_0 = \varphi$ wählen. Die erste Bedingung ist leer, die zweite ist erfüllt, da $\varphi|_{\mathcal{G}_\mathfrak{p}} = \varphi_\mathfrak{p}$ und die dritte und vierte sind Voraussetzungen des Satzes **??**, den wir beweisen wollen. Nehmen wir nun an, dass der Homomorphismus $\psi_{i-1} : \mathcal{G}_S \to G_{i-1}$ schon konstruiert ist. Sei $T_{i-1} = T \cup \mathrm{Ram}(K_{i-1}|k)$, dann ist $T_{i-1} \subset S$. Für jede Primstelle $\mathfrak{p} \in T_{i-1} \backslash T$ können wir einen G_{i-1}-Homomorphismus $\psi_\mathfrak{p} : \mathcal{G}_\mathfrak{p} \to G$ auswählen, da nach Bedingung (4) die Menge $\prod_\mathfrak{p} \mathscr{H}om_{G_{i-1}}(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, G)$ nicht leer ist. Man betrachte für $\mathfrak{p} \in T_{i-1}$ die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{G}_S \arrow[d, "\psi_{i-1}"] \\
A_i \arrow[r, hook] & G_i \arrow[r, two heads, "\pi_i"] & G_{i-1}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{G}_\mathfrak{p} \arrow[dl, "\psi_{\mathfrak{p},i}"'] \arrow[d, "\psi_{i-1}|_{\mathcal{G}_\mathfrak{p}}"] \\
G_i \arrow[r, two heads] & G_{i-1}.
\end{tikzcd}$$

Weil $[\psi_{\mathfrak{p},i}] \in \mathscr{H}om_{G_{i-1}}(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, G_i)$, ist das rechte Diagramm kommutativ. Der Kern von π_i ist der einfache G_{i-1}-Modul A_i, dessen Exponent p_i ein Teiler von n ist. Da der Exponent n_i von H_i auch n teilt, ist np_i ein Vielfaches von $n_i p_i$ und $(np_i, \#\mu(K_{i-1})) = (n, \#\mu(K_{i-1})) = 1$ nach Bedingung (3). Außerdem gilt nach Bedingung (4):

$$\prod_{\mathfrak{p}} \mathscr{H}om_{G_{i-1}}(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, G) \neq \varnothing$$

und somit können wir das Hauptlemma auf die Situation anwenden (mit T_{i-1} statt T, $G \twoheadrightarrow G_i$ statt $E \twoheadrightarrow G$) und ψ_{i-1} statt φ). Dieses liefert uns ein Element $[\psi_i] \in \mathscr{H}om_{G_{i-1}}(\mathcal{G}_S, G_i)_{\mathrm{epi}}$ mit den Eigenschaften

(i) $[\psi_i|_{\mathcal{G}_\mathfrak{p}}] = [\psi_{\mathfrak{p},i}]$ in $\mathscr{H}om_{G_{i-1}}(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, G_i)$ für $\mathfrak{p} \in T_{i-1}$,

(ii) ist $\mathfrak{p} \notin T_{i-1}$ unverzweigt in $K|k$, so ist $\mathscr{H}om_{G_i}(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, G) \neq \varnothing$,

(iii) für den Körper $K_i|k$, der durch ψ_i definiert wird, gilt $(n, \#\mu(K_i)) = 1$.

Sei $\psi_i : \mathcal{G}_S \to G_i$ ein Repräsentant von $[\psi_i]$. Dann ist ψ_i ein surjektiver Γ-Homomorphismus, und wir werden zeigen, dass er den Bedingungen (1)-(4) der obigen Behauptung genügt.

Bedingung (1) ist erfüllt, weil $[\psi_i] \in \mathscr{H}om_{G_{i-1}}(\mathcal{G}_S, G_i)$. Wegen Eigenschaft (i) sind die Γ-Homomorphismen $\psi_i|_{\mathcal{G}_\mathfrak{p}}$ und $\psi_{\mathfrak{p},i}$ konjugiert zueinander unter einem Element von

$$A_i = H_{i-1}/H_i \subseteq H/H_i = \ker(G_i \twoheadrightarrow \Gamma).$$

Deshalb gilt $[\psi_i|_{\mathcal{G}_\mathfrak{p}}] = [\psi_{\mathfrak{p},i}]$ auch in $\mathscr{H}om_\Gamma(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, G_i)$ und somit ist Bedingung (2) erfüllt. Bedingung (3) gilt wegen (iii) und Bedingung (4) folgt schließlich aus (ii) und aus der Tatsache, dass $[\psi_\mathfrak{p}] \in \mathscr{H}om_{G_i}(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, G)$ für $\mathfrak{p} \in T_{i-1}$. Dies beweist die Behauptung. □

Es ist $G = \varprojlim G_i$, da $\bigcap_i H_i = \{1\}$. Deshalb definieren die surjektiven Γ-Homomorphismen $\psi_i \colon \mathcal{G}_S \twoheadrightarrow G_i$ einen surjektiven Γ-Homomorphismus $\psi : \mathcal{G}_S \twoheadrightarrow G$, das heißt ein Element von $\mathscr{H}om_\Gamma(\mathcal{G}_S, G)_{\mathrm{epi}}$. Für jedes $\mathfrak{p} \in T$ ist $[\psi_i|_{\mathcal{G}_\mathfrak{p}}] = [\psi_{\mathfrak{p},i}]$ in $\mathscr{H}om_\Gamma(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, G_i)$. Es existieren also Elemente $\widetilde{a}_{\mathfrak{p},i} \in \ker(G_i \twoheadrightarrow \Gamma) = H/H_i$ so dass

$$\psi_i|_{\mathcal{G}_\mathfrak{p}} = \widetilde{a}_{\mathfrak{p},i}^{-1} \psi_{\mathfrak{p},i} \widetilde{a}_{\mathfrak{p},i} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Sei

$$A_{\mathfrak{p},i} = \{a_{\mathfrak{p},i} \in H/H_i | a_{\mathfrak{p},i}^{-1} \psi_{\mathfrak{p},i} a_{\mathfrak{p},i} = \psi_i|_{\mathcal{G}_\mathfrak{p}}\}.$$

Da $\widetilde{a}_{\mathfrak{p},i} \in A_{\mathfrak{p},i}$, ist $A_{\mathfrak{p},i}$ nicht leer und für $a_{\mathfrak{p},i} \in A_{\mathfrak{p},i}$ gilt:

$$\begin{aligned} \pi_i(a_{\mathfrak{p},i})^{-1} \psi_{p,i-1} \pi_i(a_{\mathfrak{p},i}) &= \pi_i(a_{\mathfrak{p},i}^{-1} \psi_{\mathfrak{p},i} a_{\mathfrak{p},i}) \\ &= \pi_i \circ \psi_i|_{\mathcal{G}_\mathfrak{p}} \\ &= \psi_{i-1}|_{\mathcal{G}_\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

Deshalb induzieren die Projektionen $\pi_i : G_i \to G_{i-1}$ Homomorphismen endlicher Mengen $\pi_{\mathfrak{p},i} : A_{\mathfrak{p},i} \to A_{\mathfrak{p},i-1}$. Diese Homomorphismen definieren ein projektives System und da $A_{\mathfrak{p},i} \neq \varnothing$

für alle $i \in \mathbb{N}$, ist der projektive Limes $A_{\mathfrak{p}} := \varprojlim A_{\mathfrak{p},i} \subseteq H$ auch nicht leer. Wir können also ein $a_{\mathfrak{p}} \in A_{\mathfrak{p}}$ auswählen. Für dieses gilt dann

$$\psi_i|_{\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}} = a_{\mathfrak{p},i}^{-1} \psi_{\mathfrak{p},i} a_{\mathfrak{p},i} \qquad \forall i \in \mathbb{N},$$

wobei die Elemente $a_{\mathfrak{p},i}$ die Bilder von $a_{\mathfrak{p}}$ in H/H_i sind. Wir erhalten

$$\psi|_{\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}} = a_{\mathfrak{p}}^{-1} \psi_{\mathfrak{p}} a_{\mathfrak{p}},$$

d.h. $[\psi|_{\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}}] = [\psi_{\mathfrak{p}}]$ in $\mathscr{H}om_{\Gamma}(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, G)$. Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. $\square$

Kapitel 4

Ein Kriterium für die Lösbarkeit von Einbettungsproblemen

In diesem Kapitel wird ein Kriterium von Neukirch für die Lösbarkeit bestimmter Einbettungsprobleme verallgemeinert, so dass es auch auf Einbettungsprobleme mit beschränkter Verzweigung in einer Primstellenmenge der Dichte 1 anwendbar ist. Der Beweis ist angelehnt an den Beweis des Kriteriums in [?] Satz 6.3. Zunächst müssen wir dazu die Notation erklären.

Gegeben sei ein Einbettungsproblem

$$\begin{tikzcd} & & & \mathcal{G} \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & E \arrow[r] & G \arrow[r] & 1, \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

wobei $\mathcal{G}$ die absolute Galoisgruppe eines globalen Körpers k ist und der Kern A als endlich und abelsch angenommen wird. Eine (homogene) lokale Vorgabe L ist nun ein (homogener) Unterraum des Produktes $\prod_{\mathfrak{p}} \mathscr{H}\!om_G(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, E)$ der Lösungsräume der induzierten lokalen Einbettungsprobleme. Definiert man für eine Primstelle $\mathfrak{p}$ von k den Raum $\mathscr{H}\!om_G^{\mathrm{nr}}(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, E)$ als den Unterraum von $\mathscr{H}\!om_G(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, E)$ der Homomorphismen, die über der Galoisgruppe der maximal unverzweigten Erweiterung von $k_{\mathfrak{p}}$ faktorisieren, so hat die lokale Vorgabe in unserem Fall die Form

$$L = \prod_{\mathfrak{p} \in T} \{[\psi_{\mathfrak{p}}]\} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \mathscr{H}\!om_G^{\mathrm{nr}}(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, E) \times \prod_{\mathfrak{p} \in S \setminus T} \mathscr{H}\!om_G(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, E), \tag{4.2}$$

wobei S eine Primstellenmenge von K der Dichte 1, $T \subset S$ eine endliche Primstellenmenge und $\psi_{\mathfrak{p}}$ eine vorgegebene lokale Lösung des Einbettungsproblems ist. Eine Lösung des Einbettungsproblems mit einer solchen lokalen Vorgabe liefert dann eine außerhalb S unverzweigte Körpererweiterung $K|k$, die das globale Einbettungsproblem löst und zusätzlich für $\mathfrak{p} \in T$ vorgegebene Komplettierungen besitzt. Nach [?], Proposition 3.5.11 kann man der lokalen Vorgabe L eine Untergruppe Λ von $\prod_{\mathfrak{p}} H^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, A)$ zuordnen, so dass L ein homogener prinzipaler Raum über Λ ist. Für obige lokale Vorgabe erhalten wir:

$$\Lambda = \prod_{\mathfrak{p} \in T} \{0\} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} H^1_{\mathrm{nr}}(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, A) \times \prod_{\mathfrak{p} \in S \setminus T} H^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, A).$$

Betrachten wir nun die Abbildung

$$\rho(\Lambda) : H^1(\mathcal{G}, A) \to \prod_{\mathfrak{p}} H^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, A)/\Lambda$$

und bezeichnen deren Kokern mit $\Delta(\mathcal{G}, A, \Lambda)$. Besitzt das Einbettungsproblem (**??**) eine globale Lösung, so ist jeder lokalen Vorgabe ein Element von $\Delta(\mathcal{G}, A, \Lambda)$ zugeordnet, welches genau dann verschwindet, wenn das Einbettungsproblem auch mit dieser lokaler Vorgabe lösbar ist (siehe [**?**] Satz 2.4). Definiert man außerdem

$$\nabla(\mathcal{G}, A, \Lambda) = \ker(\rho(\Lambda))/\ker(\rho(0)),$$

so erhält man aus dem globalen Dualitätssatz eine nichtausgeartete Paarung endlicher Gruppen (siehe [**?**] Theorem 4.4)

$$\Delta(k, A, \Lambda) \times \nabla(k, A', \Lambda^{\perp}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Dabei ist $A' = \mathrm{Hom}(A, \mu)$ der zu A duale $\mathcal{G}$-Modul und $\Lambda^{\perp}$ das orthogonale Komplement von Λ in $\prod_{\mathfrak{p}} H^1(k_{\mathfrak{p}}, A')$. Das heißt also, $\nabla(k, A', \Lambda^{\perp})$ ist das Pontryagin-Dual $\Delta(k, A, \Lambda)^{\vee}$ von $\Delta(k, A, \Lambda)$. Schließlich definieren wir für eine Primstelle $\mathfrak{p}$ von k die Gruppe $G'_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Gal}(k_{\mathfrak{p}}(A')|k_{\mathfrak{p}})$ und setzen

$$\Gamma(G'_{\mathfrak{p}}, A') = \ker(H^1(G'_{\mathfrak{p}}, A') \to \prod_{\sigma \in G'_{\mathfrak{p}}} H^1(\langle\sigma\rangle, A')),$$

wobei $\langle\sigma\rangle$ die von $\sigma \in G'_{\mathfrak{p}}$ erzeugte Untergruppe bedeutet. Das folgende Lemma ist nun eine Verallgemeinerung von Satz 6.2 in [**?**].

Lemma 10. *Mit der lokalen Vorgabe (**??**) gilt:*

$$\nabla(k, A', \Lambda^{\perp}) = \ker(\bar{\rho}'_T)/\ker(\bar{\rho}'),$$

wobei

$$\bar{\rho}' : H^1(G', A') \to \prod_{\mathfrak{p}} H^1(G'_{\mathfrak{p}}, A')$$

$$\bar{\rho}'_T : H^1(G', A') \to \prod_{\mathfrak{p} \in S \setminus T} H^1(G'_{\mathfrak{p}}, A') \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} H^1(G'_{\mathfrak{p}}, A')/H^1_{nr}(G'_{\mathfrak{p}}, A')$$

und es gibt eine kanonische injektive Abbildung

$$\nabla(k, A', \Lambda^{\perp}) \to \prod_{\mathfrak{p} \in T} \Gamma(G'_{\mathfrak{p}}, A').$$

Beweis. Ist

$$\Lambda = \prod_{\mathfrak{p} \in T} \{0_{\mathfrak{p}}\} \times \prod_{\mathfrak{p} \in S \setminus T} H^1(k_{\mathfrak{p}}, A) \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} H^1_{\mathrm{nr}}(k_{\mathfrak{p}}, A),$$

so wird

$$\Lambda^{\perp} = \prod_{\mathfrak{p} \in T} H^1(k_{\mathfrak{p}}, A') \times \prod_{\mathfrak{p} \in S \setminus T} \{0_{\mathfrak{p}}\} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} H^1_{\mathrm{nr}}(k_{\mathfrak{p}}, A').$$

Betrachten wir also die Abbildungen

$$\begin{array}{rcccl} \rho' & : & H^1(k,A') & \to & \prod_{\mathfrak{p}} H^1(k_{\mathfrak{p}},A') \\ \rho'_T & : & H^1(k,A') & \to & \prod_{\mathfrak{p}\in S\setminus T} H^1(k_{\mathfrak{p}},A') \times \prod_{\mathfrak{p}\notin S} H^1(k_{\mathfrak{p}},A')/H^1_{\mathrm{nr}}(k_{\mathfrak{p}},A'), \end{array}$$

so ist $\nabla(k,A',\Lambda^{\perp}) = \ker(\rho'_T)/\ker(\rho')$. Wir erhalten nun ein exaktes kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\ \ker(\bar\rho'_T) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(G',A') \arrow[r, "\bar\rho'_T"'] \arrow[d] & \prod_{S\setminus T} H^1(G'_{\mathfrak{p}},A') \times \prod_{\mathfrak{p}\notin S} H^1(G'_{\mathfrak{p}},A')/H^1_{\mathrm{nr}}(G'_{\mathfrak{p}},A') \arrow[d] \\ \ker(\rho'_T) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(k,A') \arrow[r, "\rho'_T"'] \arrow[d] & \prod_{S\setminus T} H^1(k_{\mathfrak{p}},A') \times \prod_{\mathfrak{p}\notin S} H^1(k_{\mathfrak{p}},A')/H^1_{\mathrm{nr}}(k_{\mathfrak{p}},A') \arrow[d] \\ \ker(\rho'_{\bar T}) \arrow[r] & H^1(K,A') \arrow[r, "\rho'_{\bar T}"'] & \prod_{\bar S\setminus \bar T} H^1(K_{\mathfrak{P}},A') \times \prod_{\mathfrak{P}\notin \bar S} H^1(K_{\mathfrak{P}},A')/H^1_{\mathrm{nr}}(K_{\mathfrak{P}},A'), \end{tikzcd}$$

wobei $K = k(A')$ und $\bar S$, $\bar T$ die Mengen der über S, T liegenden Primstellen von K sind. Nun ist $\ker(\rho'_{\bar T}) = 0$. Ist nämlich $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ die absolute Galoisgruppe von K, so ist A' ein trivialer $\mathcal{G}'$-Modul, und ein Element $\chi \in H^1(K,A') = \mathrm{Hom}(\mathcal{G}',A')$ legt eine galoissche Erweiterung $N|K$ fest. Ist $\rho'_{\bar T}(\chi) = 0$, so sind alle Primstellen $\mathfrak{P} \in \bar S\setminus\bar T$ von K voll zerlegt in N, d.h. es ist $N = K$ und somit $\chi = 0$ nach dem Čebotarevschen Dichtigkeitssatz, denn $\delta(\bar S\setminus\bar T) = 1$. Wir erhalten also eine Bijektion $\ker(\bar\rho'_T) \to \ker(\rho'_T)$, und ganz entsprechend eine Bijektion $\ker(\bar\rho') \to \ker(\rho')$, so dass

$$\nabla(k,A',\Lambda^{\perp}) = \ker(\bar\rho'_T)/\ker(\bar\rho').$$

Wendet man das Schlangenlemma auf das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & H^1(G') \arrow[r] \arrow[d, "\bar\rho'"] & H^1(G') \arrow[r] \arrow[d, "\bar\rho'_T"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \begin{array}{c} \prod_T H^1(G'_{\mathfrak{p}}) \\ \times \prod_{\mathfrak{p}\notin S} H^1_{\mathrm{nr}}(G'_{\mathfrak{p}}) \end{array} \arrow[r] & \prod_{\mathfrak{p}} H^1(G'_{\mathfrak{p}}) \arrow[r] & \begin{array}{c} \prod_{S\setminus T} H^1(G'_{\mathfrak{p}}) \\ \times \prod_{\mathfrak{p}\notin S} H^1(G'_{\mathfrak{p}})/H^1_{\mathrm{nr}}(G'_{\mathfrak{p}}) \end{array} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

an, so erhält man die exakte Sequenz

$$1 \to \ker(\bar\rho') \to \ker(\bar\rho'_T) \to \prod_T H^1(G'_{\mathfrak{p}},A') \times \prod_{\mathfrak{p}\notin S} H^1_{\mathrm{nr}}(G'_{\mathfrak{p}},A').$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass das Bild von $\ker(\bar{\rho}'_T)$ schon in $\prod_T \Gamma(G'_\mathfrak{p}, A')$ liegt. Für $\mathfrak{p} \in T$ ist also zu zeigen, dass

$$\ker(\bar{\rho}'_T) \to \prod_{\sigma \in G'_\mathfrak{p}} H^1(\langle\sigma\rangle, A')$$

die Nullabbildung ist, und für $\mathfrak{p} \notin S$, dass die Restriktion

$$\ker(\bar{\rho}'_T) \to H^1_{\mathrm{nr}}(G'_\mathfrak{p}, A')$$

trivial ist. Es gilt aber ganz allgemein: $\ker(\bar{\rho}'_T) \to H^1(\langle\sigma\rangle, A')$ ist für jedes $\sigma \in G'$ die Nullabbildung. Nach dem Čebotarevschen Dichtigkeitssatz ist nämlich jede zyklische Untergruppe $\langle\sigma\rangle$ von G' eine Zerlegungsgruppe $G'_\mathfrak{q}$ für unendlich viele $\mathfrak{q} \in S \backslash T$, und die Abbildung $\ker(\bar{\rho}'_T) \to H^1(\langle\sigma\rangle, A')$ ist wegen der Definition von $\ker(\bar{\rho}'_T)$ die Nullabbildung. Damit ist die Behauptung für $\mathfrak{p} \in T$ gezeigt, und für $\mathfrak{p} \notin S$ wissen wir nun, dass das Bild der Restriktion $\ker(\bar{\rho}'_T) \to H^1(G'_\mathfrak{p}, A')$ in $\Gamma(G'_\mathfrak{p}, A') \cap H^1_{\mathrm{nr}}(G'_\mathfrak{p}, A')$ liegt. Um zu zeigen, dass diese Gruppe trivial ist, wähle man einen Repräsentanten $\sigma \in G'_\mathfrak{p}$ des Frobeniusautomorphismus und betrachte folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & H^1_{\mathrm{nr}}(G'_\mathfrak{p}, A') \arrow[dr, hook] & \\
H^1(G'_\mathfrak{p}/I'_\mathfrak{p}, A') \arrow[ur, "\sim"] \arrow[rr, "\mathrm{inf}"'] \arrow[d, "\mathrm{res}"] & & H^1(G'_\mathfrak{p}, A') \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\
H^1(\overline{\langle\sigma\rangle}, A') \arrow[rr, "\mathrm{inf}"'] & & H^1(\langle\sigma\rangle, A'),
\end{tikzcd}$$

wobei $\overline{\langle\sigma\rangle} = (\langle\sigma\rangle I'_\mathfrak{p})/I'_\mathfrak{p}$ ist. Die linke Restriktionsabbildung ist ein Isomorphismus, da $\sigma I'_\mathfrak{p}$ nach Wahl von σ der Frobeniusautomorphismus der Primstelle $\mathfrak{p}$ ist. Da außerdem die untere Inflation injektiv ist, ist die Restriktion $H^1(G'_\mathfrak{p}, A') \to H^1(\langle\sigma\rangle, A')$ eingeschränkt auf $H^1_{\mathrm{nr}}(G'_\mathfrak{p}, A')$ injektiv. Für die Abbildung $\lambda : H^1(G'_\mathfrak{p}, A') \to \prod_{\sigma \in G'_\mathfrak{p}} H^1(\langle\sigma\rangle, A')$ gilt demnach

$$\ker(\lambda) \cap H^1_{\mathrm{nr}}(G'_\mathfrak{p}, A') = \{0\}$$

und daraus folgt die Behauptung. □

Korollar 11. *Ist mit obigen Bezeichnungen $\Gamma(G'_\mathfrak{p}, A') = 0$ für alle $\mathfrak{p} \in T$, so hat jedes Einbettungsproblem (**??**) mit lokaler Vorgabe der Form*

$$L = \prod_{\mathfrak{p} \in T} \{[\psi_\mathfrak{p}]\} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \mathscr{H}om_G^{nr}(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, E) \times \prod_{\mathfrak{p} \in S \backslash T} \mathscr{H}om_G(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, E)$$

eine Lösung, sofern es ohne lokale Vorgabe lösbar ist.

Beweis. Ist $\Gamma(G'_\mathfrak{p}, A') = 0$ für alle $\mathfrak{p} \in T$, so ist nach Lemma **??** auch $\nabla(k, A', \Lambda^\perp) = 0$ und somit

$$\Delta(k, A, \Lambda) = \nabla(k, A', \Lambda^\perp)^\vee = 0.$$

Das Hindernis in $\Delta(k, A, \Lambda)$, das dem Einbettungsproblem mit obiger lokaler Vorgabe zugeordnet ist, verschwindet also und das Einbettungsproblem ist mit lokaler Vorgabe lösbar. $\square$

Kapitel 5

Der Satz von Henniart

In diesem Kapitel verwenden wir die Resultate der vorangegangenen Kapitel um eine Verallgemeinerung des Satzes zu zeigen, den Henniart in seinem Artikel "Relèvement global d'extensions locales: quelques problèmes de plongement" beweist (siehe [?]). Wir werden folgende Aussage zeigen:

Satz 12. *Sei F ein total reeller algebraischer Zahlkörper, v eine Primstelle von F über der Primzahl p und $K = F_v$. Weiterhin sei eine endliche galoissche Erweiterung $L|K$ gegeben mit Galoisgruppe $G = Gal(L|K)$ vom Exponenten n. Sei S eine Primstellenmenge von F der Dichte $\delta(S) = 1$, die die unendlichen Stellen und v enthalte. Außerdem enthalte sie S_2 (die Primstellen über der Primzahl 2), falls $2|n$. Sei $T_0 = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\} \subset S$ eine endliche Primstellenmenge von F, die keine Primstellen über 2 enthalte, außerdem nicht v und keine unendliche Primstelle. Für jedes $\mathfrak{p}_i \in T_0$ sei eine endliche unverzweigte Erweiterung $L_i|K_i$ über dem lokalen Körper $K_i = F_{\mathfrak{p}_i}$ gegeben und eine Einbettung $\iota_i : G_i \hookrightarrow G$ der Galoisgruppe $G_i = Gal(L_i|K_i)$. Dann gilt:*

(i) Ist p ungerade, so gibt es eine globale, außerhalb S unverzweigte, total reelle Erweiterung $E|F$, so dass folgendes gilt:

$Gal(E|F) = G$,
$E_w = L$, wobei w die (einzige) Primstelle von E über der Primstelle v von F ist,
die lokalen Galoisgruppen $Gal(E|F)_{\mathfrak{p}_i}$ für $\mathfrak{p}_i \in T_0$ sind konjugiert zu $\iota_i(G_i)$
und definieren die lokalen Erweiterungen $L_i|K_i$.

(ii) Ist $p = 2$, so gibt es eine Kette quadratischer, außerhalb S unverzweigter Erweiterungen $F = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_r$, und Primstellen v^r, $\mathfrak{p}_i^r$ von F_r vom Grad 1 über v bzw. $\mathfrak{p}_i$, so dass eine globale, außerhalb S unverzweigte, total reelle Erweiterung $E|F_r$ existiert mit den Eigenschaften:

$Gal(E|F_r) = G$,
$E_w = L$, wobei w die (einzige) Primstelle von E über der Primstelle v^r von F_r ist,
die lokalen Galoisgruppen $Gal(E|F_r)_{\mathfrak{p}_i^r}$ für $\mathfrak{p}_i \in T_0$ sind konjugiert zu $\iota_i(G_i)$
und definieren die lokalen Erweiterungen $L_i|K_i$.

5.1 Vorbereitende Vereinfachungen

Behauptung 5.1.1. *Die Erweiterung $L|K$ kann durch eine endliche galoissche Erweiterung $L'|K$ mit $L \subseteq L'$ ersetzt werden.*

Beweis. Die unverzweigten Erweiterungen $L_i|K_i$ für $K_i = F_{\mathfrak{p}_i}$, $\mathfrak{p}_i \in T_0$ sind gegeben durch Homomorphismen $\mathcal{G}_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}_i} \to G = \mathrm{Gal}(L|K)$, wobei $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}_i}$ die Trägheitsgruppe bezüglich $\mathfrak{p}_i$ bezeichnet. Um $L|K$ zu vergrößern auf $L'|K$ mit $G' = \mathrm{Gal}(L'|K)$ muss man folgende Einbettungsprobleme lösen:

$$\begin{tikzcd} & & & \mathcal{G}_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}_i} \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\ 1 \arrow[r] & H \arrow[r] & G' \arrow[r] & G \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Es ist aber $\mathcal{G}_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}_i} \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ eine freie proendliche Gruppe, also ist jedes solche Einbettungsproblem lösbar. Alle weiteren Voraussetzungen des Satzes bleiben unverändert. Hat man nun eine Lösung $E|F$ (bzw. $E|F_r$ im Fall $p = 2$) für das erweiterte Problem gefunden, so ist $E^H|F$ (bzw. $E^H|F_r$) eine Lösung des ursprünglichen Problems. □

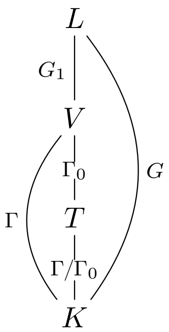
Seien G_i die Verzweigungsgruppen von G, $\Gamma := G/G_1$ und $\gamma := \#\Gamma$.

Behauptung 5.1.2. *Der Körper L kann so vergrößert werden, dass $\Gamma = \Gamma_0 \rtimes \Gamma/\Gamma_0$, wobei Γ_0 die Trägheitsgruppe von Γ bezeichne.*

Beweis. Γ/Γ_0 ist die Galoisgruppe der maximal unverzweigten Teilerweiterung $T|K$ von $L|K$ und wird erzeugt vom Frobeniusautomorphismus φ. Γ ist genau dann ein semidirektes Produkt von Γ_0 mit Γ/Γ_0, wenn die Sequenz

$$1 \to \Gamma_0 \to \Gamma \to \Gamma/\Gamma_0 \to 1$$

zerfällt, d.h. wenn ein Urbild $\widetilde{\varphi} \in \Gamma$ von φ existiert, das die gleiche Ordnung hat wie φ. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall, kann jedoch durch Vergrößern von L erreicht werden. Sei dazu $M|K$ die unverzweigte Erweiterung vom Grad $n = \mathrm{ord}(\widetilde{\varphi})$ und $L' = ML$. Dann ist $G' := \mathrm{Gal}(L'|K) \cong G \times_{\widetilde{G}} \mathrm{Gal}(M|K)$, wobei $\widetilde{G} := \mathrm{Gal}((M \cap L)|K)$. G' ist also die Untergruppe von $G \times \mathrm{Gal}(M|K)$ der Paare von Automorphismen, die auf $M \cap L$ übereinstimmen. Dann ist $\Gamma' := G'/G_1' \cong \Gamma \times_{\widetilde{G}} \mathrm{Gal}(M|K)$ (denn $M|K$ ist unverzweigt). Der Frobeniusautomorphismus von $\Gamma'/\Gamma_0' = \Gamma/\Gamma_0 \times_{\widetilde{G}} \mathrm{Gal}(M|K)$ ist (φ, φ_M) wobei φ_M der Frobeniusautomorphismus von $M|K$ ist. Ein Lift von (φ, φ_M) nach Γ' ist $(\widetilde{\varphi}, \varphi_M)$. Die Automorphismen (φ, φ_M) und $(\widetilde{\varphi}, \varphi_M)$ haben beide die Ordnung n, denn sowohl φ_M als auch $\widetilde{\varphi}$ haben die Ordnung n und φ hat eine Ordnung, die n teilt.



□

Behauptung 5.1.3. *Es kann angenommen werden, dass $G = G_1 \rtimes \Gamma$ (wobei $\Gamma = G/G_1$).*

Beweis. Wir zeigen zunächst per Induktion, dass man L so vergrößern kann, dass

$$G/G_i = G_1/G_i \rtimes \Gamma.$$

Daraus folgt dann die Behauptung, denn weil $\bigcap_i G_i = \{1\}$ und G endlich ist, gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $G_{i_0} = \{1\}$. Für $i = 1$ ist die Aussage trivial. Es sei nun $G/G_i = G_1/G_i \rtimes \Gamma$, d.h. die Sequenz

$$1 \to G_1/G_i \to G/G_i \to \Gamma \to 1$$

besitze einen Schnitt $s_i : \Gamma \to G/G_i$. Sei $\Gamma_i := s_i(\Gamma)$, also $\Gamma \cong \Gamma_i$, und sei $\widetilde{\Gamma}_i$ das Urbild von Γ_i in G. Dann ist $G_{i+1} \subseteq G_i \subseteq \widetilde{\Gamma}_i$. Wir müssen zeigen, dass die Sequenz

$$1 \to G_1/G_{i+1} \to G/G_{i+1} \to \Gamma \to 1$$

zerfällt. Dazu reicht es zu zeigen, dass die Sequenz

$$1 \to G_i/G_{i+1} \to \widetilde{\Gamma}_i/G_{i+1} \to \widetilde{\Gamma}_i/G_i \cong \Gamma \to 1$$

zerfällt. G_i/G_{i+1} ist eine elementar abelsche p-Gruppe, denn der Homomorphismus

$$\begin{aligned} G_i/G_{i+1} &\to U^{(i)}/U^{(i+1)} \cong \lambda \\ \sigma G_{i+1} &\mapsto \frac{\sigma\pi_L}{\pi_L} \end{aligned}$$

ist injektiv. Hierbei ist $U^{(i)}$ die i-te Einseinheitengruppe, $\pi_L \in \mathcal{O}_L$ eine Primelement und λ der Restklassenkörper von L. Da G_i/G_{i+1} insbesondere abelsch ist, definiert die obige Sequenz eine Klasse α_i in $H^2(\Gamma, G_i/G_{i+1})$, und die Sequenz zerfällt genau dann, wenn α_i trivial ist. Sei $P \subseteq \Gamma$ eine p-Sylowgruppe, dann ist die Restriktion

$$\mathrm{res} : H^2(\Gamma, G_i/G_{i+1}) \to H^2(P, G_i/G_{i+1})$$

injektiv nach [**?**] Proposition 1.6.10, weil G_i/G_{i+1} eine p-Gruppe ist. Sei $\widetilde{P}_i$ das Urbild von P (aufgefasst als Untergruppe von Γ_i) in G, dann ist die Klasse res α_i gegeben durch die Gruppenerweiterung

$$1 \to G_i/G_{i+1} \to \widetilde{P}_i/G_{i+1} \to P \to 1.$$

Aufgrund der Injektivität der obigen Restriktionsabbildung reicht es zu zeigen, dass diese Sequenz zerfällt. Wir wissen, dass $\Gamma = \Gamma_0 \rtimes \Gamma/\Gamma_0$ und $p \nmid \#\Gamma_0$, denn Γ_0 ist die Galoisgruppe von $V|T$, wobei V die maximal zahm verzweigte und T die maximal unverzweigte Teilerweiterung von $L|K$ bezeichnet. Deshalb wird $P \subseteq \Gamma$ unter der Projektion $\Gamma \to \Gamma/\Gamma_0$ isomorph auf eine p-Sylowgruppe von Γ/Γ_0 abgebildet, und ist damit zyklisch (denn Γ/Γ_0 ist die Galoisgruppe der maximal unverzweigten Teilerweiterung $T|K$). Sei φ ein Erzeuger von P, $\widetilde{\varphi} \in \widetilde{P}_i/G_{i+1}$ ein Urbild von φ und $n = \mathrm{ord}(\varphi)$. Wir wollen nun wie in **??** zeigen, dass man L so vergrößern kann, dass φ' und $\widetilde{\varphi}'$ (die entsprechenden Größen im Oberkörper L') die gleiche Ordnung haben. Sei dazu $M|K$ eine unverzweigte Erweiterung vom Grad n und $L' = ML$. Dann ist

$$G' := \mathrm{Gal}(L'|K) \cong G \times_{\widetilde{G}} \mathrm{Gal}(M|K)$$

mit $\widetilde{G} = \mathrm{Gal}(M \cap L|K)$. Da $M|K$ unverzweigt ist, sind die Trägheitsgruppe, und somit alle Verzweigungsgruppen trivial und die Verzweigungsgruppen von L' sind

$$G'_i = G_i \times_{\widetilde{G}} \{1\} \cong G_i.$$

Sei φ_P ein Erzeuger der p-Sylowgruppe von $Gal(M|K)$, dann erzeugt (φ, φ_P) eine p-Sylowgruppe P' von $\Gamma' = \Gamma \times_{\widetilde{G}} \mathrm{Gal}(M|K)$. Sei $\widetilde{P}'_i$ analog zu $\widetilde{P}_i$ definiert. Man erhält eine Sequenz

$$1 \to G'_i/G'_{i+1} \to \widetilde{P}'_i/G'_{i+1} \to P' \to 1$$

und $(\widetilde{\varphi}, \varphi_P) \in \widetilde{P}_i/G_{i+1} \times_{\widetilde{G}} \mathrm{Gal}(M|K) = \widetilde{P}'_i/G_{i+1}$ ist ein Lift von (φ, φ_P). Sowohl (φ, φ_P) als auch $(\widetilde{\varphi}, \varphi_P)$ haben die gleiche Ordnung n, d.h. die Sequenz

$$1 \to G'_i/G'_{i+1} \to \widetilde{P}'_i/G'_{i+1} \to P' \to 1$$

zerfällt. Nach Konstruktion zerfällt die entsprechende Sequenz auch, wenn man erneut L' durch das Kompositum mit einer unverzweigten Erweiterung ersetzt. □

5.2 Beweis der Behauptung für p ungerade

Behauptung 5.2.1. *Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass $L|K$ zahm verzweigt ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{G}_S = \mathrm{Gal}(F_S|F)$. Wir suchen eine stetige Surjektion

$$\widetilde{\psi} : \mathcal{G}_S \twoheadrightarrow G,$$

die trivial ist an den unendlichen Primstellen, und deren Einschränkung

$$\widetilde{\psi}_{\mathfrak{p}} : \mathcal{G}_{\mathfrak{p}} \twoheadrightarrow G$$

auf $\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}$ für $\mathfrak{p} \in T_0 \cup \{v\}$ die vorgegebenen lokalen Erweiterungen $L|K$ beziehungsweise $L_i|K_i$ realisiert. Angenommen das Problem sei gelöst, falls $L|K$ zahm verzweigt ist, es gebe also eine Surjektion

$$\psi : \mathcal{G}_S \twoheadrightarrow \Gamma = G/G_1,$$

die trivial sei an den unendlichen Primstellen, deren Einschränkung auf $\mathcal{G}_v$ die maximal zahm verzweigte Teilerweiterung $L^{G_1}|K$ von $L|K$ definiere und an den Stellen $\mathfrak{p}_i \in T_0$ die Erweiterungen $L_i^{G_1}|K_i$. Sei $M|F$ die Erweiterung, die durch ψ definiert ist, also $\Gamma = \mathrm{Gal}(M|F)$. Wir haben nun für das Einbettungsproblem

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{G}_S \arrow[dl, dashed, "\widetilde{\psi}"'] \arrow[d, "\psi"] & \\
1 \arrow[r] & G_1 \arrow[r] & G \arrow[r, "f"'] & \Gamma \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

eine eigentliche Lösung zu finden mit lokaler Vorgabe in $T = \{v\} \cup T_0 \cup \{\mathfrak{p}|\infty\}$. Dazu wollen wir den erweiterten Satz von Neukirch aus Kapitel **??** verwenden.

Sind die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt, dann gibt es eine eigentliche Lösung für obiges Einbettungsproblem. Und zwar ist diese gegeben durch ein Urbild in $\mathscr{H}\!om_\Gamma(\mathcal{G}_S, G)_{\mathrm{epi}}$ von

$$([\psi_1], \ldots, [\psi_n], [\psi_v], 1, \ldots, 1) \in \prod_{i=1}^{n} \mathscr{H}\!om_\Gamma(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}_i}, G) \times \mathscr{H}\!om_\Gamma(\mathcal{G}_v, G) \times \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathscr{H}\!om_\Gamma(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, G),$$

wobei ψ_i und ψ_v die jeweiligen lokalen Erweiterungen beschreiben. In unserem Fall ist $\ker(f) = G_1$ eine endliche p-Gruppe, also auflösbar und von endlichem Exponenten. Dieser ist teilerfremd zu $\#\mu(M)$, da M nach Voraussetzung total reell ist und somit $\mu(M) = \{\pm 1\}$ (beachte: p ist ungerade). Des Weiteren zerfällt die Sequenz

$$1 \to G_1 \to G \to \Gamma \to 1$$

und damit sind die lokalen Einbettungsprobleme

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{G}_w \arrow[dl, dashed, "\widetilde{\psi}_w"'] \arrow[d, "\psi_w"] & \\
1 \arrow[r] & G_1 \arrow[r] & G \arrow[r, "f"] & \Gamma \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s"] & 1
\end{tikzcd}$$

lösbar (wähle $\widetilde{\psi}_w = s \circ \psi_w$). Das wiederum ist äquivalent zu

$$\prod_{\mathfrak{p}} \mathscr{H}\!om_\Gamma(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, G) \neq \emptyset.$$

Somit sind alle Voraussetzungen erfüllt und das Problem ist reduziert auf den Fall dass $L|K$ zahm verzweigt ist. □

Behauptung 5.2.2. *Ohne Einschränkung ist* Γ *eine* 2*-Gruppe (und ein semidirektes Produkt* $\Gamma = \Gamma_0 \rtimes \Delta$ *mit* $\Delta \cong \Gamma/\Gamma_0$*)*

Beweis. Es ist $\Gamma = \Gamma_0 \rtimes \Gamma/\Gamma_0$. Hierbei ist Γ/Γ_0 die Galoisgruppe der maximal unverzweigten Teilerweiterung von $L|K$ und somit zyklisch. Auch Γ_0 ist zyklisch, denn

$$\Gamma_0 \hookrightarrow U^{(0)}(L)/U^{(1)}(L) \cong \lambda^*,$$

wobei λ den Restklassenkörper von L bezeichnet. Wir zerlegen nun die Trägheitsgruppe Γ_0 in ihren 2-primären Anteil Γ_0'' und den Rest Γ_0':

$$\Gamma_0 = \Gamma_0' \times \Gamma_0''$$

und analog für $\Gamma/\Gamma_0 = \Delta$:

$$\Delta = \Delta' \times \Delta''.$$

Die Gruppe Δ operiert auf Γ_0'' via Konjugation und wir erhalten einen Homomorphismus

$$\Delta' \to Aut(\Gamma_0'') \cong Aut(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2^{r-2}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Dieser ist jedoch trivial, weil $\#\Delta'$ ungerade ist. Also kommutieren Δ' und Γ_0''. Es folgt, dass $\Delta'\Gamma_0'$ normal in Γ ist, denn $\Delta'\Gamma_0'$ kommutiert mit Γ_0'' und für $\delta'' \in \Delta''$ gilt:

$$\delta''\Delta'\Gamma_0'\delta''^{-1} = \Delta'\delta''\Gamma_0'\delta''^{-1} = \Delta'\Gamma_0'.$$

Die letzte Gleichheit gilt, da $\delta''\Gamma_0'\delta''^{-1} \subseteq \delta''\Gamma_0\delta''^{-1} \subseteq \Gamma_0$, und $\delta''\Gamma_0'\delta''^{-1}$ ungerade Ordnung hat. Da $\Gamma = (\Gamma_0' \times \Gamma_0'') \rtimes (\Delta' \times \Delta'')$, hat jedes $g \in \Gamma$ eine eindeutige Darstellung

$$g = \gamma'\gamma''\delta'\delta'' \qquad \gamma' \in \Gamma_0', \gamma'' \in \Gamma_0'', \delta' \in \Delta', \delta'' \in \Delta''$$

und weil Γ_0'' und Δ' kommutieren, gilt $g = \gamma'\delta'\gamma''\delta''$. Wir haben also eine split-exakte Sequenz

$$1 \to \Delta'\Gamma_0' \to \Gamma \to \Delta''\Gamma_0'' \to 1$$

und daraus folgt $\Gamma = \Delta'\Gamma_0' \rtimes \Delta''\Gamma_0''$. Wir nehmen nun an, das Problem besitze eine Lösung für 2-Gruppen. Für eine Lösung des allgemeinen Problems müssen wir folgendes Einbettungsproblem lösen:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{G}_S \arrow[d, "\psi"] \arrow[dl, dashed, "\tilde{\psi}"'] & \\
1 \arrow[r] & \Delta'\Gamma_0' \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & \Delta''\Gamma_0'' \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Dafür wenden wir wieder den obigen Satz von Neukirch an. Wir müssen zeigen, dass die Voraussetzungen erfüllt sind: Die Gruppe $\Delta'\Gamma_0'$ ist auflösbar, denn Γ_0' ist ein Normalteiler von $\Delta'\Gamma_0'$ (für $\delta' \in \Delta'$ ist $\delta'\Gamma_0'\delta'^{-1} \subseteq \Gamma_0$ und hat ungerade Ordnung) und damit haben wir folgende exakte Sequenz:

$$1 \to \Gamma_0' \to \Delta'\Gamma_0' \to \Delta' \to 1.$$

Der Exponent von $\Delta'\Gamma'$ ist trivialerweise endlich, da die Gruppe endlich ist und er ist außerdem ungerade und damit teilerfremd zu $\#\mu(M) = 2$. Da die Sequenz

$$1 \to \Delta'\Gamma_0' \to \Gamma \to \Delta''\Gamma_0'' \to 1$$

zerfällt, haben die assoziierten lokalen Einbettungsprobleme eine Lösung und das Produkt $\prod_w \mathscr{H}\!om_{\Delta''\Gamma_0''}(\mathcal{G}_w, G)$ ist nicht leer. Nach dem Satz von Neukirch hat das Einbettungsproblem somit eine Lösung und wir haben uns zurückgezogen auf den Fall, dass G eine 2-Gruppe ist. Außerdem gilt nach Konstruktion weiterhin

$$\Delta'\Gamma_0' = \Gamma_0' \rtimes \Delta'.$$

□

Behauptung 5.2.3. *Sei $T = T_0 \cup \{v\} \cup \{\mathfrak{p}|\infty\}$. Ist $L|K$ zahm verzweigt und $G = \Gamma$ eine 2-Gruppe, so ist das Problem für ungerade p lösbar.*

Beweis. Nach dem erweiterten Satz von Grunwald-Wang (siehe Kapitel **??**) ist das Problem lösbar für $L^{\Gamma_0}|K$, denn $\mathrm{Gal}(L^{\Gamma_0}|K) = \Gamma/\Gamma_0$. Dazu muss gezeigt werden, dass wir nicht im Spezialfall $(k, \#(\Gamma/\Gamma_0), S, T)$ sind. Dieser tritt genau dann ein, wenn wir im Spezialfall $(k, \#(\Gamma/\Gamma_0), S\backslash T)$, aber nicht im Spezialfall $(k, \#(\Gamma/\Gamma_0), S \cup S_2)$ sind. Dies ist nicht der Fall, da alle Primstellen über 2 in $S\backslash T$ enthalten sind (falls $2|\#(\Gamma/\Gamma_0)$, ansonsten sind wir sowieso nicht im Spezialfall). Die Primstellenmengen $S\backslash T$ und $S \cup S_2$ unterscheiden sich somit nur um Primstellen, die nicht über 2 liegen und die Spezialfälle $(k, \#(\Gamma/\Gamma_0), S\backslash T)$ und $(k, \#(\Gamma/\Gamma_0), S \cup S_2)$ sind äquivalent.

Wir müssen somit nur noch das Einbettungsproblem

$$\begin{tikzcd}
& & & \mathcal{G}_S \arrow[d, "\psi"] \arrow[dl, dashed, "\widetilde{\psi}"'] & \\
1 \arrow[r] & \Gamma_0 \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & \Gamma/\Gamma_0 \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s"] & 1
\end{tikzcd}$$

mit vorgeschriebener Verzweigung in T lösen. Ohne lokale Vorgabe hat das Problem eine (nicht unbedingt eigentliche) Lösung, da die obige Sequenz zerfällt (nehme $\widetilde{\psi} = s \circ \psi$). Nach Korollar **??** gibt es auch eine Lösung mit lokalen Vorgaben in $T = T_0 \cup \{v\} \cup S_\infty$, wenn für alle Primstellen $w \in T$ die Gruppe $\Gamma(G'_w, \Gamma_0)$ verschwindet. Diese ist wie folgt definiert: Sei $\#\Gamma_0 = 2^r$ und $\Gamma'_0 = \mathrm{Hom}(\Gamma_0, \mu_{2^r})$. Die Gruppe G' sei der Quotient von $\mathcal{G}_S$ modulo der Untergruppe der Elemente, die trivial auf Γ'_0 operieren. Dann ist

$$\Gamma(G'_w, \Gamma'_0) := \ker(\mathrm{res} : H^1(G'_w, \Gamma'_0) \to \prod_{\sigma \in G'_w} H^1(\langle\sigma\rangle, \Gamma'_0)).$$

Ist w eine unendliche Primstelle, so ist G'_w entweder trivial oder isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Die Restriktion

$$\mathrm{res} : H^1(G'_w, \Gamma'_0) \to \prod_{\sigma \in G'_w} H^1(\langle\sigma\rangle, \Gamma'_0)$$

ist in diesem Fall injektiv, da G'_w zyklisch ist und es somit $\sigma \in G'_w$ gibt mit $\langle\sigma\rangle = G_w$.

Betrachten wir nun die Primstelle v. Sei q die Kardinalität des Restklassenkörpers λ von L. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Gamma_0 = \Gamma_0/G_1 &\hookrightarrow U/U^{(1)} \cong \mu_{q-1} \\ \gamma &\mapsto \frac{\gamma\pi}{\pi} \end{aligned}$$

ist ein injektiver Homomorphismus von $\mathcal{G}_v$-Moduln. Folglich ist $\Gamma_0 \cong \mu_{2^r}$ und der duale $\mathcal{G}_v$-Modul Γ'_0 ist isomorph zu $\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}$. Da $\mathcal{G}_v$ trivial auf Γ'_0 operiert, ist $G'_v = \{1\}$ und somit $\Gamma(G'_w, \Gamma'_0) = 0$.

Betrachte nun $\mathfrak{p}_i \in T_0$. Es ist $\Gamma'_0 = \mathrm{Hom}(\Gamma_0, \mu_{2^r})$. Die Operation von $\mathcal{G}_{\mathfrak{p}_i}$ auf Γ_0 faktorisiert über $\mathrm{Gal}(L_i|K_i)$ und die Operation auf μ_{2^r} faktorisiert über $\mathrm{Gal}(K_i(\mu_{2^r})|K_i)$. Die Operation auf Γ'_0 faktorisiert also über $\mathrm{Gal}(L_i(\mu_{2^r})|K_i)$. Da $\mathfrak{p}_i \nmid 2$, ist $L_i(\mu_{2^r})|K_i$ unverzweigt und somit ist $\mathrm{Gal}(L_i(\mu_{2^r})|K_i)$ zyklisch und das gleiche gilt für $G'_{\mathfrak{p}_i}$, da $G'_{\mathfrak{p}_i}$ ein Quotient von $\mathrm{Gal}(L_i(\mu_{2^r})|K_i)$ ist. Daraus folgt, dass auch in diesem Fall $\Gamma(G'_w, \Gamma'_0) = 0$ ist. Die Voraussetzungen für das Kriterium von Neukirch sind also erfüllt und die Behauptung bewiesen. □

Behauptung 5.2.4. *Das Problem ist mit der folgenden zusätzlichen Bedingung lösbar: Sei $R|\mathbb{Q}$ ein quadratischer Zahlkörper, der linear disjunkt ist zu F. Dann kann man die Lösung so wählen, dass E linear disjunkt ist zu R.*

Beweis. Sei $v' \in S\backslash T$ eine endliche Primstelle, die nicht über 2 und nicht über p liegt, und die träge ist in der quadratischen Erweiterung $RF|F$. Definiert man $T'_0 = T_0 \cup \{v'\}$ und gibt für v' die triviale Erweiterung vor, so sind die Voraussetzungen des Satzes **??** auch für T'_0 statt T_0 erfüllt. Wir erhalten eine total reelle Körpererweiterung $E|F$ mit Galoisgruppe G, die die lokalen Vorgaben in T erfüllt und zusätzlich in v' total zerlegt ist. Da v' in $RF|F$ träge ist, folgt daraus $E \cap RF = F$ und folglich $E \cap R = \mathbb{Q}$, d.h. E und R sind linear disjunkt. □

5.3 Der Fall $p = 2$

Behauptung 5.3.1. *Sei G zyklisch. Wenn wir nicht im Spezialfall $(F, \#G, S, T)$ sind , so hat das Problem (Satz **??**) eine Lösung. Andernfalls gibt es eine quadratische total reelle außerhalb S unverzweigte Erweiterung $F'|F$, die in v und in T_0 zerlegt ist, so dass das entsprechende Problem über F' lösbar ist.*

Beweis. Wenn wir nicht im Spezialfall $(F, \#G, S, T)$ sind, so existiert die Lösung nach dem Satz von Grunwald-Wang (siehe Kapitel **??**). Ansonsten wähle man eine außerhalb S unverzweigte quadratische Erweiterung $F'|F$, die zerlegt ist in T. Diese existiert wiederum nach dem Satz von Grunwald-Wang. Es gibt nun zwei Primstellen von F' über v; nenne diese v' und v''. Dann ist $F'_{v'} \cong F'_{v''} \cong K$. Ebenso wählen wir für jedes $\mathfrak{p}_i \in T_0$ eine Primstelle $\mathfrak{p}'_i$ von F' über $\mathfrak{p}_i$. Bezeichne T' die Menge $S_\infty(F') \cup \{v'\} \cup \{\mathfrak{p}'_i\}$ und sei $S' = S(F')$. Dann sind wir nicht im Spezialfall $(F', \#G, S', T')$: Da wir im Spezialfall $(F, \#G, S, T)$ sind, gibt es eine Primstelle $\mathfrak{q} \in (S \cup S_2)\backslash(S\backslash T) = T$ über 2, die in $F(\mu_{2^r})|F$ unzerlegt ist, wobei 2^r die Kardinalität des 2-primären Anteils von G ist. Diese Primstelle kann nur v sein, denn alle andere Primstellen in T liegen nicht über 2. Angenommen wir sind im Spezialfall $(F', \#G, S'\backslash T')$, dann sind alle Primstellen in $S'\backslash T'$ über 2 zerlegt in $F'(\mu_{2^r})|F'$. Dann sind aber auch alle Primstellen in $S' \cup S_2 = S'$ über 2 zerlegt in $F'(\mu_{2^r})|F$, denn die einzige Primstelle über 2, die in T' liegt, ist v' und diese kann nicht unzerlegt sein, da sonst auch $v'' \in S'\backslash T'$ unzerlegt wäre. Folglich sind wir im Spezialfall $(F', \#G, S' \cup S_2)$ und somit nicht im Spezialfall $(F', \#G, S', T')$. □

Behauptung 5.3.2. *Das Problem hat eine Lösung, wenn $L|K$ zahm verzweigt ist.*

Beweis. Da Γ/Γ_0 zyklisch ist, und der zyklische Fall bereits in **??** behandelt wurde, lässt sich das Problem zurückführen auf das Einbettungsproblem

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{G}_S \arrow[dl, dashed, "\tilde{\psi}"'] \arrow[d, "\psi"] & \\
1 \arrow[r] & \Gamma_0 \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & \Gamma/\Gamma_0 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

mit lokaler Vorgabe in T. Beachte hierbei, dass $G = \Gamma$ ist, da $L|K$ zahm verzweigt ist. Es gilt nach Konstruktion $\Gamma = \Gamma_0 \rtimes \Gamma/\Gamma_0$. Daher sind die lokalen Probleme lösbar, d.h.

$$\prod_w \mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_w, G) = \prod_w \mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_w, \Gamma) \neq \varnothing.$$

Da G_0 eine endliche zyklische Gruppe von ungerader Ordnung ist, ist $\exp \Gamma_0$ endlich und teilerfremd zu $\#\mu(F_S^{\ker\psi}) = 2$ und Γ_0 ist auflösbar. Nach dem Satz von Neukirch hat das Einbettungsproblem eine eigentliche Lösung. □

Nach diesen Vorbereitungen, kommen wir nun zum eigentlichen Teil des Beweises.

Lemma 13. *Gegeben seien Untergruppen $I \subseteq H \subseteq G_1$, die normal in G sind, so dass $A = H/I$ ein nichttrivialer G/H-Modul vom Exponenten 2 ist und die Operation von G/H auf A über $\Gamma = G/G_1$ faktorisiert. Des weiteren sei ein Einbettungsproblem*

$$\begin{tikzcd} & & & \mathcal{G}_S \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\psi"] & \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & G/I \arrow[r] & G/H \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

gegeben mit den entsprechenden lokalen Vorgaben in $T = T_0 \cup \{v\} \cup S_\infty$. Dann findet man eine endliche Folge total reeller quadratischer Erweiterungen $F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_r$, unverzweigt außerhalb S, mit Primstellen $v^j, \mathfrak{p}_i^j$ von F_j über v beziehungsweise $\mathfrak{p}_i$, so dass $v^0 = v$, $\mathfrak{p}_i^0 = \mathfrak{p}_i$ und v^{j+1} beziehungsweise $\mathfrak{p}_i^{j+1}$ vom Grad eins über v^j beziehungsweise $\mathfrak{p}_i^j$ ist (d.h. $(F_j)_{v^j} \cong K$) derart, dass das Einbettungsproblem

$$\begin{tikzcd} & & & \mathcal{G}_S(F_r) = Gal(F_S|F_r) \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\psi"] & \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & G/I \arrow[r] & G/H \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

eine Lösung mit vorgegebener Verzweigung in T_r besitzt. Hierbei enthält T_r die unendlichen Primstellen, die Primstelle v^r über v und $\mathfrak{p}_i^r$ über $\mathfrak{p}_i \in T_0$.

Bevor wir Lemma **??** beweisen, zeigen wir dass das Hauptresultat (Satz **??**) im Fall $p = 2$ aus Lemma **??** folgt.

Behauptung 5.3.3. *Satz **??** lässt sich auf Lemma **??** zurückführen.*

Beweis. Um das allgemeine Problem in Satz **??** zu lösen, genügt es folgende Aussage zu beweisen:

Sei I ein Normalteiler von G, der in G_1 enthalten ist. Es existiert eine endliche Folge von total reellen quadratischen Erweiterungen $F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_{r(I)}$ mit Primstellen v^j, $\mathfrak{p}_i^j$ von F_j über v beziehungsweise $\mathfrak{p}_i$, so dass $v^0 = v$, $\mathfrak{p}_i^0 = \mathfrak{p}_i$ und v^{j+1} beziehungsweise $\mathfrak{p}_i^{j+1}$ vom Grad eins über v^j beziehungsweise $\mathfrak{p}_i^j$ ist derart, dass eine galoissche total reelle und außerhalb S unverzweigte Erweiterung $E(I)|F_{r(I)}$ mit Galoisgruppe G/I existiert und eine Primstelle w_I von $E(I)$ über $v^{r(I)}$, so dass $E(I)_{w_I} \cong L^I$ und Primstellen $\mathfrak{P}_i^I$ von $E(I)$

über $\mathfrak{p}_i^{r(I)}$, so dass $E(I)_{\mathfrak{P}_i^I} \cong L_i^I$.
Setzt man nämlich $I = \{1\}$, so erhält man gerade eine Lösung des ursprünglichen Problems.

Dies wollen wir nun per Induktion über die Kardinalität von G_1/I zeigen. Für $I = G_1$ wurde die Aussage gerade in **??** gezeigt. Sei also $I \neq G_1$ und sei H das Urbild in G der letzten nichttrivialen Verzweigungsgruppe $(G/I)^m$ von G/I. Dann ist $I \subseteq H \subseteq G_1$ und $H/I \neq \{1\}$. Außerdem gilt

$$H/I = (G/I)^m/(G/I)^{m+1} \hookrightarrow \lambda,$$

wobei λ der Restklassenkörper von L^I ist. Er hat also Charakteristik 2 und damit ist $\exp(H/I) = 2$. G_1/I operiert trivial auf H/I, denn

$$H/I \hookrightarrow U^{(m)}/U^{(m+1)} \cong \lambda$$

und G_1/I operiert trivial auf dem Restklassenkörper λ von L^I. Also faktorisiert die Operation von G/H auf $A = H/I$ über G/G_1. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Aussage wahr, wenn man $I = H$ setzt. Wir müssen nun das Einbettungsproblem

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{G}_S(F_{r(H)}) \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\psi"] & \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r] & G/I \arrow[r] & G/H \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

mit lokalen Vorgaben in $T_{r(H)} = S_\infty(F_{r(H)}) \cup \{v^{r(H)}\} \cup \{\mathfrak{p}_i^{r(H)}\}$ lösen. Somit haben wir uns auf die Aussage von Lemma **??** zurückgezogen. □

Im folgenden müssen wir nun daher nur noch Lemma **??** beweisen.

Sei P eine 2-Sylowgruppe von G/H und $\widetilde{P}$ ihr Urbild in G/I; wir haben also folgende Gruppenerweiterung:

$$1 \to A \to \widetilde{P} \to P \to 1.$$

Weiter sei $\widetilde{\mathcal{G}} = \psi^{-1}(P)$ und $\widetilde{F}$ der Fixkörper von $\widetilde{\mathcal{G}}$, das heißt $\widetilde{F} = F_S^{\widetilde{\mathcal{G}}}$ und $\widetilde{\mathcal{G}} = \mathrm{Gal}(F_S|\widetilde{F})$. Wir wollen zuerst folgendes Einbettungsproblem mit vorgegebener Verzweigung in S lösen:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \widetilde{\mathcal{G}} \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\psi"] & \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r] & \widetilde{P} \arrow[r] & P \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd} \tag{5.2}$$

Dies ist im Allgemeinen nicht möglich, man muss gegebenenfalls F durch eine Kette quadratischer Erweiterungen ersetzen. Danach werden wir ausnutzen, dass der Index von $\widetilde{P}$ in G/I ungerade ist, um daraus eine Lösung für das Problem **??** und damit für das gesamte Problem zu konstruieren. Wir werden das Einbettungsproblem (**??**) schrittweise lösen. Dazu wählen wir eine Filtrierung

$$A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_k = \{0\}$$

von A mit P-Moduln A_j, so dass $\#A_j/A_{j+1} = 2$ für alle $j = 0, \ldots, k-1$. (dies ist möglich, da $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der einzige einfache P-Modul vom Exponenten 2 ist) und beweisen per Induktion folgende Behauptung:

Behauptung 5.3.4. *Für alle $j \leqslant k$ gibt es eine Folge trivialer oder quadratischer, total reeller, außerhalb S unverzweigter Erweiterungen*

$$F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_k$$

und Primstellen v^j, $\mathfrak{p}_i^j$ von F_j mit $v^0 = v$, $\mathfrak{p}_i^0 = \mathfrak{p}_i$ und v^{j+1} beziehungsweise $\mathfrak{p}_i^{j+1}$ zerlegt über v^j beziehungsweise $\mathfrak{p}_i^j$, so dass das Einbettungsproblem

$$\begin{tikzcd} & & & Gal(F_S|\widetilde{F}F_j) =: \widetilde{\mathcal{G}}_j \arrow[d, "\psi"] \arrow[dl, dashed] & \\ 1 \arrow[r] & A/A_j \arrow[r] & \widetilde{P}/A_j \arrow[r] & P \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

mit vorgegebener Verzweigung in $\widetilde{T}_j$ eine Lösung besitzt. Hierbei ist $\widetilde{T}_j = T_j(\widetilde{F}F_j)$.

Beweis. Für $j = 0$ gibt es nichts zu zeigen. Sei nun $1 \leqslant j \leqslant k$. Betrachte das Einbettungsproblem

$$\begin{tikzcd} & & & \widetilde{\mathcal{G}}_{j-1} \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & \\ 1 \arrow[r] & A_{j-1}/A_j \arrow[r] & \widetilde{P}/A_j \arrow[r] & \widetilde{P}/A_{j-1} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

mit vorgegebener Verzweigung in $\widetilde{T}_{j-1}$. Der vertikale Pfeil existiert nach Induktionsvoraussetzung. Das Problem ohne vorgegebene Verzweigung hat genau dann eine Lösung, wenn die Klasse $\widetilde{\gamma} \in H^2(\widetilde{P}/A_{j-1}, A_{j-1}/A_j)$, die der Gruppenerweiterung

$$1 \to A_{j-1}/A_j \to \widetilde{P}/A_j \to \widetilde{P}/A_{j-1} \to 1$$

entspricht, unter der Inflation

$$\inf : H^2(\widetilde{P}/A_{j-1}, A_{j-1}/A_j) \to H^2(\widetilde{\mathcal{G}}_{j-1}, A_{j-1}/A_j)$$

auf Null abgebildet wird. In diesem Fall setzen wir $F_j = F_{j-1}$. Ist dies nicht der Fall, sei $\gamma = \inf_{\widetilde{\mathcal{G}}_{j-1}}^{\widetilde{P}/A_{j-1}} \widetilde{\gamma}$. Wir wollen eine quadratische Erweiterung $F_j|F_{j-1}$ finden, so dass $\inf_{\widetilde{\mathcal{G}}_j}^{\widetilde{P}/A_{j-1}} \widetilde{\gamma} = 0$. Wir werden dieses Problem zuerst lokal lösen. Für eine Primstelle $\mathfrak{p}$ von $\widetilde{F}F_{j-1}$ erhält man aus der langen exakten Kohomologiesequenz zur kurzen exakten Sequenz

$$\begin{array}{c} 1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \left(\overline{(\widetilde{F}F_{j-1})_{\mathfrak{p}}}\right)^{\times} \to \left(\overline{(\widetilde{F}F_{j-1})_{\mathfrak{p}}}\right)^{\times} \to 1 \\ x \quad \mapsto \quad x^2 \end{array}$$

unter Beachtung von $H^1((\widetilde{\mathcal{G}}_{j-1})_{\mathfrak{p}}, \overline{(\widetilde{F}F_{j-1})_{\mathfrak{p}}}^{\times}) = 0$ nach Hilberts Satz 90 eine Injektion

$$H^2((\widetilde{\mathcal{G}}_{j-1})_{\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2((\widetilde{\mathcal{G}}_{j-1})_{\mathfrak{p}}, \overline{(\widetilde{F}F_{j-1})_{\mathfrak{p}}}^{\times}) \cong \mathrm{Br}((\widetilde{F}F_{j-1})_{\mathfrak{p}}).$$

Für $w \in \widetilde{T}_{j-1}$ ist $\gamma_w = \operatorname{res}^{\widetilde{\mathcal{G}}_{j-1}}_{\widetilde{\mathcal{G}}_{j-1,w}} \gamma = 0$, denn das lokale Problem hat nach Konstruktion eine Lösung. Wir bezeichnen für einen Zahlkörper k mit $\mathscr{P}(k)$ die Menge aller Primstellen von k und setzen

$$\begin{aligned}\widetilde{R} &= \{\widetilde{w} \in \mathscr{P}(\widetilde{F}F_{j-1}) | \gamma_{\widetilde{w}} \neq 0\}\\ R &= \{w \in \mathscr{P}(F_{j-1}) | \exists \widetilde{w} \in \widetilde{R} \quad \text{mit } \widetilde{w}|w\}.\end{aligned}$$

Dann ist $R \subseteq S$, denn für unverzweigte Erweiterungen ist das lokale Einbettungsproblem auf jeden Fall lösbar. Außerdem ist R endlich (da nur endlich viele Primstellen verzweigen) und R enthält nicht T_{j-1}. Wir werden in **??** beweisen, dass für alle $w \in R$ eine quadratische Erweiterung $F_{j,w}$ von $(F_{j-1})_w$ existiert, so dass für alle Primstellen $\widetilde{w}$ von $\widetilde{F}F_{j-1}$ über w die Erweiterung $(\widetilde{F}F_{j-1})_{\widetilde{w}}F_{j,w}|(\widetilde{F}F_{j-1})_{\widetilde{w}}$ auch quadratisch ist. Dann findet man nach dem Satz von Grunwald-Wang eine quadratische total reelle, außerhalb S unverzweigte Erweiterung $F_j|F_{j-1}$, die zerlegt ist in T_{j-1}, so dass $(F_j)_w = F_{j,w}$ für alle $w \in R$. Weil für $w \in R$ die Erweiterung $(\widetilde{F}F_{j-1})_{\widetilde{w}}F_{j,w}$ quadratisch über $(\widetilde{F}F_{j-1})_{\widetilde{w}}$ ist, hat $(\widetilde{\mathcal{G}}_j)_{\widetilde{w}}$ Index 2 in $(\widetilde{\mathcal{G}}_{j-1})_{\widetilde{w}}$. Hierbei ist $\widetilde{\mathcal{G}}_j = \operatorname{Gal}(F_S|\widetilde{F}F_j)$. Nach [**?**] Corollary 7.1.4 kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} Br((\widetilde{F}F_{j-1})_{\widetilde{w}}F_{j,w}) \arrow[r, "\sim", "inv"'] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ Br((\widetilde{F}F_{j-1})_{\widetilde{w}}) \arrow[r, "\sim", "inv"'] \arrow[u, "\text{res}"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \arrow[u, "\cdot[(\widetilde{F}F_{j-1})_{\widetilde{w}}F_{j,w}:(\widetilde{F}F_{j-1})_{\widetilde{w}}]=2"'] \end{tikzcd}$$

Da $\operatorname{ord}(\gamma) = 2$, gilt somit für alle $w \in R$:

$$\operatorname{res}^{(\widetilde{F}F_{j-1})_{\widetilde{w}}}_{(\widetilde{F}F_{j-1})_{\widetilde{w}}F_{j,w}} \gamma_{\widetilde{w}} = 0.$$

Für $w \notin R$ ist diese Restriktion trivial, da schon $\gamma_{\widetilde{w}} = 0$. Die Restriktion ist also trivial an jeder Primstelle und somit auch global, denn die folgende Abbildung ist injektiv nach [**?**] Korollar 9.1.10:

$$H^2(\widetilde{\mathcal{G}}_j, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{\widetilde{\mathfrak{p}} \in S(\widetilde{F}F_j)} H^2((\widetilde{\mathcal{G}}_j)_{\widetilde{\mathfrak{p}}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Daher hat das Einbettungsproblem

$$\begin{tikzcd} & & & \widetilde{\mathcal{G}}_j \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\ 1 \arrow[r] & A_{j-1}/A_j \arrow[r] & \widetilde{P}/A_j \arrow[r] & \widetilde{P}/A_{j-1} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

eine Lösung. Diese realisiert aber noch nicht zwingend die vorgegebenen lokalen Erweiterungen in $\widetilde{T}_j = T_j(\widetilde{F}F_j)$. Ob es auch eine Lösung mit vorgegebener Verzweigung gibt, hängt ab von der Surjektivität der Restriktion (siehe [**?**] Proposition 3.5.11)

$$\operatorname{res} : H^1(\widetilde{\mathcal{G}}_j, A_{j-1}/A_j) \to \prod_{\widetilde{w} \in \widetilde{T}_j} H^1(\widetilde{\mathcal{G}}_{j,w}, A_{j-1}/A_j).$$

Da $A_{j-1}/A_j \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, müssen wir also folgende Abbildung untersuchen:

$$\mathrm{res}: H^1(\widetilde{\mathcal{G}}_j, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \prod_{\widetilde{w}\in\widetilde{T}_j} H^1(\widetilde{\mathcal{G}}_{j,w}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Diese ist surjektiv nach [?] Theorem 9.2.3 (i). Setzt man nun die einzelnen Einbettungsschritte (??) zusammen, so erhält man eine Lösung mit vorgegebener Verzweigung für das Einbettungsproblem

$$\begin{tikzcd}
 & & & \widetilde{\mathcal{G}}_j \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\psi"] & \\
1 \arrow[r] & A/A_j \arrow[r] & \widetilde{P}/A_j \arrow[r] & P \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

□

Setzt man nun $j = k$, erhält man eine Lösung

$$\widetilde{\tau}: \widetilde{\mathcal{G}}_k \to \widetilde{P}$$

mit vorgeschriebener Verzweigung in $\widetilde{T}_k$ für das Einbettungsproblem

$$\begin{tikzcd}
 & & & \widetilde{\mathcal{G}}_k \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\psi"] & \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r] & \widetilde{P} \arrow[r] & P \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Diese wollen wir nun erweitern zu einer Lösung des ursprünglichen Problems. Im folgenden lassen wir die trivialen Erweiterungen in der Kette $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_k$ weg und betrachten die Kette quadratischer Erweiterungen $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_r$ mit $r \leqslant k$.

Behauptung 5.3.5. *Das Einbettungsproblem*

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{G}_S(F_r) = Gal(F_S|F_r) \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\psi"] & \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r] & G/I \arrow[r] & G/H \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

hat eine Lösung ohne vorgegebene Verzweigung.

Beweis. P ist eine 2-Sylowgruppe von G/H. Deshalb hat das Urbild $\widetilde{\mathcal{G}}_r = \mathrm{Gal}(F_S|\widetilde{F}F_r)$ ungeraden Index in $\mathcal{G}_S(F_r)$. Die Restriktion

$$\mathrm{res}: H^2(\mathcal{G}_S(F_r), A) \to H^2(\widetilde{\mathcal{G}}_r, A)$$

ist somit injektiv, da $\exp A = 2$ teilerfremd zu $(\mathcal{G}_S(F_r) : \widetilde{\mathcal{G}}_r)$ ist und $\mathrm{cor} \circ \mathrm{res} = (\mathcal{G}_S(F_r) : \widetilde{\mathcal{G}}_r)$. Die Klasse $\gamma \in H^2(\widetilde{\mathcal{G}_r}, A)$, die dem Einbettungsproblem

$$\begin{tikzcd}
 & & & \widetilde{\mathcal{G}}_r \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\psi"] & \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r] & \widetilde{P} \arrow[r] & P \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

zugeordnet ist, ist nach Konstruktion gleich $\mathrm{res}\widetilde{\gamma}$, wobei $\widetilde{\gamma} \in H^2(\mathcal{G}_S(F_r), A)$ dem Einbettungsproblem

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{G}_S(F_r) \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r] & G/I \arrow[r] & G/H \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

entspricht. Wir haben gezeigt, dass $\gamma = \mathrm{res}\widetilde{\gamma} = 0$ und somit $\widetilde{\gamma} = 0$. Das obige Einbettungsproblem hat also eine Lösung

$$\sigma : \mathcal{G}_S(F_r) \to G/I.$$

□

Behauptung 5.3.6. *Es gibt eine Lösung mit vorgeschriebener Verzweigung in T_r für das Einbettungsproblem*

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{G}_S(F_r) = Gal(F_S|F_r) \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\psi"] & \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r] & G/I \arrow[r] & G/H \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wir wissen schon, dass das Einbettungsproblem mit lokaler Vorgabe

$$\begin{tikzcd}
 & & & \widetilde{\mathcal{G}}_r \arrow[dl, dashed, "\widetilde{\tau}"'] \arrow[d, "\psi"] & \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r] & \widetilde{P} \arrow[r] & P \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

eine Lösung

$$\widetilde{\tau} : \widetilde{\mathcal{G}}_r \to \widetilde{P} \subseteq G/I$$

besitzt. Des weiteren haben wir eine Lösung

$$\sigma : \mathcal{G}_S(F_r) \to G/I \tag{5.4}$$

für das Einbettungsproblem ohne lokale Vorgaben.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{G}_S(F_r) \arrow[dl, dashed, "\sigma"'] \arrow[d, "\psi"] & \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r] & G/I \arrow[r, "\pi"] & G/H \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

gefunden. Die Homomorphismen $\widetilde{\tau}$ und σ definieren Äquivalenzklassen in $\mathscr{H}om_P(\widetilde{\mathcal{G}}_r, \widetilde{P})$ beziehungsweise in $\mathscr{H}om_{G/H}(\mathcal{G}_S(F_r), G/I)$. Nach Proposition 3.5.11 in [?] ist $\mathscr{H}om_P(\widetilde{\mathcal{G}}_r, \widetilde{P})$ ein prinzipaler homogener Raum über $H^1(\widetilde{\mathcal{G}}_r, A)$ (und analog für $\mathcal{G}_S(F_r)$ usw.). Es gibt also $\widetilde{\delta} \in H^1(\widetilde{\mathcal{G}}_r, A)$ mit

$$[\widetilde{\tau}] = [\sigma|_{\widetilde{\mathcal{G}}_r}]^{\widetilde{\delta}}.$$

Sei $\epsilon = \operatorname{cor}^{\widetilde{\mathcal{G}}_r}_{\mathcal{G}_S(F_r)} \widetilde{\delta}$, $[\sigma'] = [\sigma]^{\epsilon}$ und $\sigma' \in [\sigma']$ ein Repräsentant. Dann ist σ' eine weitere Lösung des Einbettungsproblems

$$\begin{tikzcd} & & & \mathcal{G}_S(F_r) \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & G/I \arrow[r] & G/H \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Wir wollen zeigen, dass σ' die lokalen Vorgaben erfüllt. Sei dazu $w \in T_r$ und $\widetilde{w} \in \widetilde{T_r}$ mit $\widetilde{w}|w$. Laut Annahme gibt es $[\tau_w] \in \mathscr{H}om_{G/H}(\mathcal{G}_{r,w}, G/I)$ (gegeben durch die lokale Vorgabe in w), so dass

$$[\tau_w|_{\widetilde{\mathcal{G}}_{r,\widetilde{w}}}] = [\widetilde{\tau}|_{\widetilde{\mathcal{G}}_{r,\widetilde{w}}}].$$

Wir definieren $\delta_w \in H^1(\mathcal{G}_{r,w}, A)$ durch

$$[\tau_w] = [\sigma|_{\mathcal{G}_{r,w}}]^{\delta_w}.$$

Auf $\widetilde{\mathcal{G}}_r$ und somit insbesondere auch auf $\widetilde{\mathcal{G}}_{r,\widetilde{w}}$ gilt weiterhin

$$[\tau_w|_{\widetilde{\mathcal{G}}_{r,\widetilde{w}}}] = [\widetilde{\tau}|_{\widetilde{\mathcal{G}}_{r,\widetilde{w}}}] = [\sigma|_{\widetilde{\mathcal{G}}_{r,\widetilde{w}}}]^{\widetilde{\delta}|_{\widetilde{\mathcal{G}}_{r,\widetilde{w}}}}.$$

Wir haben also

$$\operatorname{res}^{\mathcal{G}_{r,w}}_{\widetilde{\mathcal{G}}_{r,\widetilde{w}}} \delta_w = (\widetilde{\delta})_{\widetilde{w}}.$$

Somit gilt

$$\epsilon_w = \operatorname{cor}^{\widetilde{\mathcal{G}}_{r,\widetilde{w}}}_{\mathcal{G}_{r,w}} \circ \operatorname{res}^{\mathcal{G}_{r,w}}_{\widetilde{\mathcal{G}}_{r,\widetilde{w}}} \delta_w = (\mathcal{G}_{r,w} : \widetilde{\mathcal{G}}_{r,\widetilde{w}})\delta_w = \delta_w,$$

denn $(\mathcal{G}_S(F_r) : \widetilde{\mathcal{G}}_r)$ ist ungerade und das gleiche gilt für $(\mathcal{G}_{r,w} : \widetilde{\mathcal{G}}_{r,\widetilde{w}})$, da letzterer ein Teiler von ersterem Index ist. Außerdem ist $2\delta_w = 0$, da A vom Index 2 ist. Daraus folgt dann für σ'

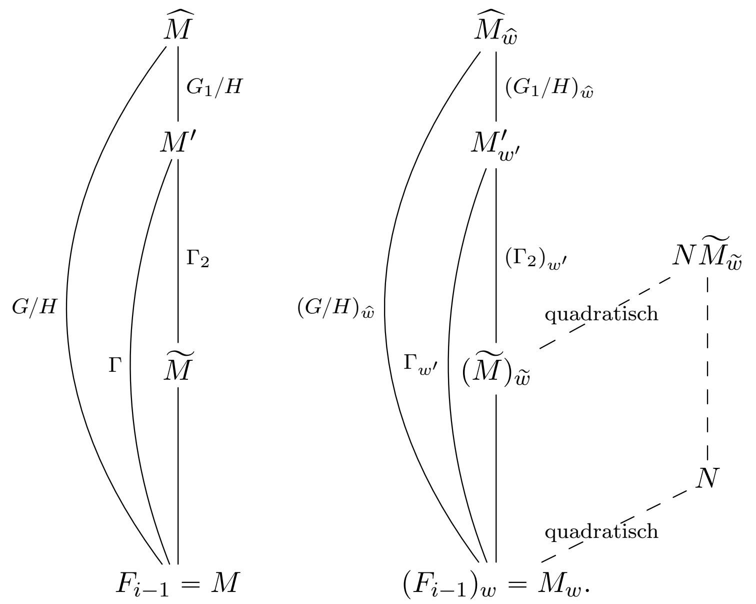
$$[\sigma'|_{\mathcal{G}_{r,w}}] = [\sigma|_{\mathcal{G}_{r,w}}]^{\epsilon|_{\mathcal{G}_{r,w}}} = [\sigma|_{\mathcal{G}_{r,w}}]^{(\epsilon)_w} = [\sigma|_{\mathcal{G}_{r,w}}]^{\delta_w} = [\tau_w].$$

Der Homomorphismus $\sigma' : \mathcal{G}_S(F_r) \to G/I$ erfüllt also die lokalen Vorgaben. □

Für den Beweis von Behauptung **??** müssen wir noch folgende Aussage beweisen:

Behauptung 5.3.7. *Sei $w \in S(F_{j-1})\backslash T_{j-1}$ eine endliche Primstelle von $F_{j-1} =: M$. Dann gibt es eine quadratische Erweiterung $N|M_w$, so dass für alle Primstellen $\widetilde{w}|w$ von $\widetilde{M} := M\widetilde{F}$ über w auch die Erweiterung $N\widetilde{M}_{\widetilde{w}}|\widetilde{M}_{\widetilde{w}}$ quadratisch ist.*

Beweis. Da P eine 2-Sylowgruppe von G/H ist, und G_1 eine in G normale 2-Gruppe, gilt $G_1 \subseteq \widetilde{P}$. Deshalb ist die Galoisgruppe der normalen Hülle von $\widetilde{M}|M$ ein Quotient von $\Gamma = G/G_1$. Weiter sei M' der Fixkörper von G_1/H, also $\Gamma = \mathrm{Gal}(M'|M)$. Sei Γ_2 die 2-Sylowgruppe von Γ, so dass $\Gamma_2 = \mathrm{Gal}(M'|\widetilde{M})$. Wir haben also folgende Situation:



Da $M'|M$ galoissch ist, sind die Vervollständigungen $M'_{w'}$ von M' mit $w'|w$ alle isomorph. Sei $\mathscr{N}$ die Normgruppe $N_{M'_{w'}|M_w}({M'_{w'}}^{\times})$. Dann gilt für alle Primstellen $\widetilde{w}$ von $\widetilde{M}$ über w

$$N_{\widetilde{M}_{\widetilde{w}}|M_w}(\widetilde{M}^{\times}_{\widetilde{w}}) \supseteq \mathscr{N}.$$

Außerdem wissen wir, dass $\Gamma = \Gamma_0 \rtimes \Gamma/\Gamma_0$ mit Γ_0 zyklisch von ungerader Ordnung und Γ/Γ_0 zyklisch ist. Wenn nun $D \subseteq \Gamma$ eine Untergruppe ist, und $\chi : D \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ein Charakter der Ordnung 2, so faktorisiert dieser über $D/(D \cap \Gamma_0)$, weil $\#\Gamma_0$ ungerade ist. Aber $D/D \cap \Gamma_0 = D\Gamma_0/\Gamma_0 \subseteq \Gamma/\Gamma_0$ ist zyklisch, hat also höchstens einen Charakter der Ordnung 2. Wenden wir diese Überlegung nun auf die Zerlegungsgruppe $\Gamma_{w'}$ von Γ an. Weil $M_w^{\times}/\mathscr{N} \cong \Gamma_w^{ab}$, wissen wir, dass

$$\mathrm{Hom}(M_w^{\times}/\mathscr{N}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\Gamma_{w'}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Also hat $M_w^{\times}/\mathscr{N}$ höchstens einen Charakter der Ordnung 2. M_w hat aber mindestens 3 Charaktere der Ordnung 2, denn ist $q = l^b$ die Kardinalität des Restklassenkörpers von M_w, π ein Primelement von M_w, $d = [M_w : \mathbb{Q}_l]$ und $\mu_{l^\infty}(M_w) = \mu_{l^a}$, so gilt

$$M_w^{\times} = (\pi) \times \mu_{q-1} \times U^{(1)} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/l^a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_l^d.$$

Ist l ungerade, so besitzt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ mindestens drei Charaktere der Ordnung 2. Ist $l = 2$, so ist a mindestens 1 und $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^a\mathbb{Z}$ hat mindestens drei Charaktere der Ordnung 2. Diese können nicht alle trivial auf $\mathscr{N}$ sein, da sie sonst Charaktere auf $M_w^{\times}/\mathscr{N}$ induzierten. Es gibt also einen Charakter η von $M_w^{\times}$, der auf $\mathscr{N}$ nicht trivial ist. Da

$$N_{\widetilde{M}_{\widetilde{w}}|M_w}(\widetilde{M}_{\widetilde{w}}) \supseteq \mathscr{N},$$

ist dann auch $\eta \circ N_{\widetilde{M}_{\tilde{w}}|M_w}$ nichttrivial für alle Primstellen $\tilde{w}$ von $\widetilde{M}$ über w. Sei $N|M_w$ die quadratische Erweiterung, die dem Charakter η entspricht. Die induzierten Erweiterungen $N\widetilde{M}_{\tilde{w}}|\widetilde{M}_{\tilde{w}}$ entsprechen den Charakteren $\eta \circ N_{\widetilde{M}_{\tilde{w}}|M_w}$. Diese sind alle nicht trivial, also sind die Erweiterungen $N\widetilde{M}_{\tilde{w}}|\widetilde{M}_{\tilde{w}}$ quadratisch für alle $\tilde{w}$ über w. $\square$

Erklärung:

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig unter Anleitung verfasst habe, dass ich keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt habe, und dass ich alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entlehnt sind, durch die Angabe der Quellen als Entlehnungen kenntlich gemacht habe..

Heidelberg, den 30.4.2012 ....