ERRATA:

14. April 2021

Hendrik Kasten, Denis Vogel: Grundlagen der ebenen Geometrie

Kapitel 3: Hilbertebenen

- **Seite 48, Zeile -2ff:** Im Buch steht:

  [...] Wir würden gerne analog (A_2) mit Proposition 3.7 aus (A_2') folgern, haben aber im Beweis der dort verwendeten Proposition 3.2 bereits (A_2) benutzt, um zu zeigen, dass es zu einer beliebigen Geraden $g \in \mathbf{G}$ Punkte gibt, die auf verschiedenen Seiten von g liegen. Es ist eine leichte Übungsaufgabe, dies unter Verwendung von (A_2') statt (A_2) zu zeigen.

  Korrekt ist:

  [...] Die andere Implikation ist trivial.

- **Seite 98, Zeile 6:** Im Buch steht:

  (i) $\angle BAC \simeq \angle B'AC'$,

  Korrekt ist:

  (i) $\angle BAC = \angle B'AC'$,

- **Seite 90, Zeile 3:** Es ist zu ergänzen:

  [...] einen eindeutigen Punkt B'' mit $\overline{AB''} \cong \overline{A'B'}$. Ohne Einschränkung können wir $B'' \neq B$ annehmen, da sonst nach dem WSW-Kriterium die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ kongruent wären und es somit nichts zu zeigen gäbe.

Kapitel 4: Der Hauptsatz

- **Seite 126, Zeile 5:** Im Buch steht:

  [...] und einen beliebigen Punkt $P \in \mathbf{P} \setminus g$ auf den eindeutigen Punkt [...]

  Korrekt ist:

  [...] und einen beliebigen Punkt $A \in \mathbf{P} \setminus g$ auf den eindeutigen Punkt [...]

- **Seite 127, Zeile 6:** Im Buch steht:

$$[\ldots] = \begin{cases} d_e(A', L_g A) - d_e(A', C') & \text{für } A \star B \star S, \\ d_e(A', C') - d_e(A', L_g A) & \text{für } B \star A \star S, \\ d_e(A', L_g A) + d_e(A', C') & \text{für } A \star S \star B \end{cases}$$

  Korrekt ist:

$$[\dots] = \begin{cases} d_e(A', L_g A) - d_e(C', L_g A) & \text{für } A \star B \star S, \\ d_e(C', L_g A) - d_e(A', L_g A) & \text{für } B \star A \star S, \\ d_e(A', L_g A) + d_e(C', L_g A) & \text{für } A \star S \star B \end{cases}$$

- **Seite 128, Zeile 3ff:** Im Buch steht:

  > Nach Definition von σ_Z gilt dann
  >
  > $$d_e(Z, \sigma_Z(A)) = d_e(Z, A) \quad \text{und} \quad d_e(Z, \sigma_Z(B)) = d_e(Z, B).$$
  >
  > Nach dem Kongruenzsatz für Dreiecke 3.74 sind dann die Dreiecke $\triangle AMB$ und $\triangle \sigma_Z(A) M \sigma_Z(B)$ ähnlich zueinander. Es gilt daher [. . .]

  Korrekt ist:

  > Nach Definition von σ_Z gilt dann
  >
  > $$d_e(Z, \sigma_Z(A)) = d_e(Z, A), \quad \angle \sigma_Z(A) Z \sigma_Z(B) \simeq \angle AZB, \quad d_e(Z, \sigma_Z(B)) = d_e(Z, B).$$
  >
  > Nach dem SWS-Kriterium 3.74 sind dann die Dreiecke $\triangle AZB$ und $\triangle \sigma_Z(A) Z \sigma_Z(B)$ kongruent zueinander. Es gilt daher [. . .]

- **Seite 134, Zeile 10f:** Im Buch steht:

  > Nach dem Ähnlichkeitssatz für Dreiecke 4.45 sind dann die Dreiecke $\triangle AMB$ und $\triangle \zeta_{\lambda,Z}(A) M \zeta_{\lambda,Z}(B)$ ähnlich zueinander, es gilt daher [. . .]

  Korrekt ist:

  > Nach dem Ähnlichkeitssatz für Dreiecke 4.45 sind dann die Dreiecke $\triangle AZB$ und $\triangle \zeta_{\lambda,Z}(A) Z \zeta_{\lambda,Z}(B)$ ähnlich zueinander, es gilt daher [. . .]

- **Seite 143, Zeile 14:** Im Buch steht:

  > $$y := \{O\} \cup (h \cap H), \quad h' := \ell_{g'} O' \quad \text{und} \quad y' := \{O'\} \cup (h' \cap H).$$

  Korrekt ist:

  > $$y := \{O\} \cup (h \cap H) \text{ mit } h := \ell_g O \quad \text{und} \quad y' := \{O'\} \cup (h' \cap H') \text{ mit } h' := \ell_{g'} O'.$$

- **Seite 143, Zeile -14f:** Im Buch steht:

  > Wir behandeln hier nur den Fall $g \neq \overleftrightarrow{OO'} \neq h := \ell_g O$; [. . .]

  Korrekt ist:

  > Wir behandeln hier nur den Fall $g \neq \overleftrightarrow{OO'} \neq h$; [. . .]

- **Seite 143, Zeile -11ff:** Im Buch steht:

  > Wir setzen $R := \ell_g P \cap \overleftrightarrow{OO'} = \pi_h^{g,\overleftrightarrow{OO'}}(L_g P)$. In Abhängigkeit von der Anordnung der Punkte O, O', R ergeben sich mehrere Fälle, von denen wir ohne Einschränkung nur die folgenden zu betrachten brauchen:
  >
  > **Fall 1:** $O' = R$. Dann ist $O' = R = \ell_{g'} P \cap \overleftrightarrow{OO'} = L_{g'} P$ und $L_g O' = L_g R = L_g P$. Daraus folgt [...]

  Korrekt ist:

  > Wir setzen $R := \ell_g P \wedge \overleftrightarrow{OO'} = \pi_h^{g,\overleftrightarrow{OO'}}(L_g P)$. In Abhängigkeit von der Anordnung der Punkte O, O', R ergeben sich mehrere Fälle, von denen wir ohne Einschränkung nur die folgenden zu betrachten brauchen:
  >
  > **Fall 1:** $O' = R$. Dann ist $O' = R = \ell_{g'} P \wedge \overleftrightarrow{OO'} = L_{g'} P$ und $L_g O' = L_g R = L_g P$. Daraus folgt [...]

- **Seite 144, Zeile 4ff:** Im Buch steht:

  > $$[\ldots] = \gamma_x^e(L_g O') + \gamma_{x'}^e(L_g{}' P),$$
  >
  > wobei das Vorzeichen $\pm$ davon abhängt, ob $L_g P$ – und damit auch $L_g O'$ – auf derselben Seite der Geraden $\overleftrightarrow{OO'}$ liegt wie die Strahlen y und y'.

  Korrekt ist:

  > $$[\ldots] = \gamma_x^e(L_g O') + \gamma_{x'}^e(L_{g'} P),$$
  >
  > wobei sich die Vorzeichen von $\gamma_x^e(L_g P)$ und $\gamma_{x'}^e(L_{g'} P)$ unterscheiden, da x und x' auf derselben Seite der Geraden $\overleftrightarrow{OO'}$ liegen und $L_g P$ und $L_{g'} P$ nicht.

- **Seite 144, Zeile 16f:** Im Buch steht:

  > [...], wobei das Vorzeichen $\pm$ davon abhängt, ob $L_g P$ – und damit auch $L_{g'} P$ und $L_g O'$ – auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{OO'}$ liegt wie die Strahlen x und x'.

  Korrekt ist:

  > [...], wobei die Vorzeichen von $\gamma_x^e(L_g P)$ und $\gamma_{x'}^e(L_{g'} P)$ übereinstimmen, da x und x' auf derselben Seite der Geraden $\overleftrightarrow{OO'}$ liegen und $L_g P$ und $L_{g'} P$ auch.

Kapitel 5: Euklidische Geometrie

- **Seite 158, Zeile -4f:** Im Buch steht:

  > P, Q, R mit $P \star A \star B$ und $Q \star C \star R$, so dass die Punkte P, Q auf derselben Seite der Gerade $\overleftrightarrow{AC}$ liegen.

Korrekt ist:

> $P \in \overleftrightarrow{AB}$ und $Q, R \in g$ mit $P \star A \star B$ und $Q \star C \star R$, so dass die Punkte P, Q auf derselben Seite der Gerade $\overleftrightarrow{AC}$ liegen.

- **Seite 171, Zeile 4:** Im Buch steht:

  > Für zwei Kreise $K_1 = K_r(M)$ und $K_2 = K_s(N)$ mit $M, N \in \mathbb{R}^2$ [...]

  Korrekt ist:

  > Für zwei verschiedene Kreise $K_1 = K_r(M)$ und $K_2 = K_s(N)$ mit $M, N \in \mathbb{R}^2$ [...]

- **Seite 171, Zeile 12:** Im Buch steht:

  > Für zwei Kreise $K_1 = K_r(M)$ und $K_2 = K_s(N)$ mit $M, N \in \mathbb{R}^2$ [...]

  Korrekt ist:

  > Für zwei verschiedene Kreise $K_1 = K_r(M)$ und $K_2 = K_s(N)$ mit $M, N \in \mathbb{R}^2$ [...]

- **Seite 187, Zeile -3:** Im Buch steht:

  $$\sigma_M(P) \star M \star P \quad \text{sowie} \quad \big(M \star P \star \zeta_{\lambda,M}(P) \quad \text{oder} \quad M \star P \star \zeta_{\lambda,M}(P)\big)$$

  Korrekt ist:

  $$\sigma_M(P) \star M \star P \quad \text{sowie} \quad \big(M \star P \star \zeta_{\lambda,M}(P) \quad \text{oder} \quad M \star \zeta_{\lambda,M}(P) \star P\big)$$

- **Seite 188, Zeile 6:** Im Buch steht:

  $$[\dots] = \zeta_{\lambda,M}(K_s(\sigma_M(N)) = K_{\lambda s}(\zeta_{\lambda,M}(\sigma_M(N)),$$

  Korrekt ist:

  $$[\dots] = \zeta_{\lambda,M}(K_s(\sigma_M(N))) = K_{\lambda s}(\zeta_{\lambda,M}(\sigma_M(N))),$$

Kapitel 6: Geometrische Konstruktionen

- **Seite 222, Zeile -9ff:** Im Buch steht:

$$\begin{aligned} g_{P,v} &\overset{(3.2)}{=} \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in K^2 \mid \langle \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mid v^\perp \rangle = \langle P \mid v^\perp \rangle\} \\ &= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in K^2 \mid \langle \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \rangle^2 = \langle P \mid v^\perp \rangle^2\} \\ &= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in K^2 \mid -yX + xY - \langle P \mid v^\perp \rangle^2 = 0\}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Korrekt ist:

$$
\begin{aligned}
g_{P,v} &\overset{(3.2)}{=} \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mid v^\perp \rangle = \langle P \mid v^\perp \rangle\} \\
&= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \rangle = \langle P \mid v^\perp \rangle\} \\
&= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -yX + xY - \langle P \mid v^\perp \rangle = 0\}.
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

- **Seite 223, Zeile 1ff:** Im Buch steht:

  Für einen allgemeinen Kreis $K_r(M)$ mit $r \in K_{>0}$ und $M = \binom{x}{y} \in K^2$ gilt nämlich

$$
\begin{aligned}
K_r(M) &= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in K^2 \mid \|M - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\| = r\} \\
&= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in K^2 \mid \|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\|^2 = r^2\} \\
&= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in K^2 \mid (X-x)^2 + (Y-y)^2 - r^2 = 0\} \\
&= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in K^2 \mid X^2 + Y^2 - 2xX - 2yY + (x^2 + y^2 - r^2) = 0\}.
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

  Korrekt ist:

  Für einen allgemeinen Kreis $K_r(M)$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $M = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ gilt nämlich

$$
\begin{aligned}
K_r(M) &= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \|M - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\| = r\} \\
&= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\|^2 = r^2\} \\
&= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (X-x)^2 + (Y-y)^2 - r^2 = 0\} \\
&= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid X^2 + Y^2 - 2xX - 2yY + (x^2 + y^2 - r^2) = 0\}.
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

- **Seite 224, Zeile 11:** Im Buch steht:

  ob die Diskriminante der Gleichung bereits in K liegt oder nicht, [. . .]

  Korrekt ist:

  ob die Diskriminante der Gleichung ein Quadrat in K ist oder nicht, [. . .]

- **Seite 230, Zeile -16:** Im Buch steht:

  Proposition 6.9

  Korrekt ist:

Lemma 6.9

Analog: **Seite 231, Zeilen 7 und 15**, **Seite 239, Zeile 20**, **Seite 242, Zeile 1**

- **Seite 230, Zeile -7f:** Im Buch steht:

  [...] bilden nach Übungsaufgabe 6.2 ein regelmäßiges n-Eck, das nach Proposition 6.6 mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

  Korrekt ist:

  [...] sind paarweise verschieden und bilden nach Übungsaufgabe 6.2 ein regelmäßiges n-Eck, das nach Proposition 6.6 mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

- **Seite 231, Zeile -13ff:** Im Buch steht:

  Ist S einer dieser Schnittpunkte, so gilt nach dem SSrW-Kriterium 3.86 und Korollar 5.7

  $$\measuredangle P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} S = \frac{2\pi}{n}$$

  und die Proposition ist bewiesen.

  Korrekt ist:

  Ist S einer dieser Schnittpunkte, so gilt nach Korollar 5.7

  $$\measuredangle P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} S = \frac{2\pi}{n}$$

  und nach Proposition 6.25 ist die Proposition bewiesen.

- **Seite 232, Fußnote 43:** Im Buch steht:

  Dies bedingt, dass jede Erweiterung von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ von 2-Potenzgrad iterativ reellquadratisch ist.

  Korrekt ist:

  Dies bedingt, dass jede Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ von 2-Potenzgrad iterativ reellquadratisch ist.

- **Seite 236, Zeile 2ff:** Im Buch steht:

  [...] Nach Proposition 6.26 gibt es daher einen mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Winkel mit Winkelgröße $\frac{2\pi}{3}$. Könnten wir diesen Winkel mit Zirkel und Lineal dreiteilen, so erhielten wir einen mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Winkel mit Winkelgröße $\frac{2\pi}{9}$, so dass es nach Proposition 6.26 ein mit Zirkel und Lineal konstruierbares regelmäßiges 9-Eck geben müsste. [...]

  Korrekt ist:

  [...] Nach Proposition 6.25 gibt es daher einen mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Winkel mit Winkelgröße $\frac{2\pi}{3}$. Könnten wir diesen Winkel mit Zirkel und Lineal dreiteilen, so erhielten wir einen mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Winkel mit Winkelgröße $\frac{2\pi}{9}$, so dass es nach Proposition 6.25 ein mit Zirkel und Lineal konstruierbares regelmäßiges 9-Eck geben müsste. [...]

- **Seite 237, Zeile 10:** Im Buch steht:

$$[\dots] = (X - (p + q\sqrt{N}))(X - (p - q\sqrt{d_N}))(X - x_3)$$

Korrekt ist:

$$[\dots] = (X - (p + q\sqrt{d_N}))(X - (p - q\sqrt{d_N}))(X - x_3)$$

- **Seite 245, Zeile -14:** Im Buch steht:

  Die gleichschenkligen Dreiecke $\triangle ASA'$ und $\triangle AA'''A'$ [...]

  Korrekt ist:

  Die gleichschenkligen Dreiecke $\triangle ASA'$ und $\triangle AA'A'''$ [...]

- **Seite 258, Zeile -9:** Im Buch steht:

  $\overleftrightarrow{GP}, \overleftrightarrow{GQ}, \overleftrightarrow{GR}$ und die parallelen Transversalen [...]

  Korrekt ist:

  $\overleftrightarrow{GP}, \overleftrightarrow{GB}, \overleftrightarrow{GR}$ und die parallelen Transversalen [...]

- **Seite 265, Zeile -10ff:** Im Buch steht:

  6.2 ($\mathbb{E}$). Gegeben seien ein Kreis K mit Mittelpunkt M und n Punkte $A_1, \dots, A_n$ auf K mit
  $$\measuredangle A_1MA_2 = \measuredangle A_2MA_3 = \dots = \measuredangle A_nMA_1 = \frac{2\pi}{n}.$$
  Zeigen Sie, dass dann $\Pi A_1 \dots A_n$ ein regelmäßiges n-Eck ist.

  Korrekt ist:

  6.2 ($\mathbb{E}$). Gegeben seien ein Kreis K mit Mittelpunkt M und n paarweise verschiedene Punkte $A_1, \dots, A_n$ auf K mit
  $$\measuredangle A_1MA_2 = \measuredangle A_2MA_3 = \dots = \measuredangle A_nMA_1 = \frac{2\pi}{n}.$$
  Zeigen Sie, dass dann $\Pi A_1 \dots A_n$ ein regelmäßiges n-Eck ist.

Kapitel 7: Nichteuklidische Geometrie

- **Seite 323, Zeile -2ff:** Im Buch steht:

  Zur besseren Unterscheidbarkeit von den Konstruktionen in der euklidischen Standardebene $\mathbb{E}$ werden wir die entsprechenden Konstruktionen in $\mathbb{H}_k$ bzw. $\mathbb{H}_h$ künftig immer mit einem Index „k“ bzw. „h“ kennzeichnen. So bezeichnen wir beispielsweise die Verbindungsgerade zweier k-Punkte $A, B \in \mathbf{P}_k$ mit $\overleftrightarrow{AB}^k$.

  Korrekt ist:

Zur besseren Unterscheidbarkeit von den Konstruktionen in der euklidischen Standardebene $\mathbb{E}$ werden wir die entsprechenden Konstruktionen in $\mathbb{H}_h$ künftig immer mit einem Index „h“ kennzeichnen. So bezeichnen wir beispielsweise die Verbindungsgerade zweier h-Punkte $A, B \in \mathbf{P}_h$ mit $\overleftrightarrow{AB}^h$.