Errata: 8. März 2019

Hendrik Kasten, Denis Vogel:
Grundlagen der ebenen Geometrie

Kapitel 3: Hilbertebenen

- **Seite 98, Zeile 6:** Im Buch steht:

  (i) $\angle BAC \simeq \angle B'AC'$,

  Korrekt ist:

  (i) $\angle BAC = \angle B'AC'$,

Kapitel 4: Der Hauptsatz

- **Seite 126, Zeile 5:** Im Buch steht:

  [...] und einen beliebigen Punkt $P \in \mathbf{P} \setminus g$ auf den eindeutigen Punkt [...]

  Korrekt ist:

  [...] und einen beliebigen Punkt $A \in \mathbf{P} \setminus g$ auf den eindeutigen Punkt [...]

- **Seite 127, Zeile 6:** Im Buch steht:

$$[\ldots] = \begin{cases} d_e(A', L_g A) - d_e(A', C') & \text{für } A \star B \star S, \\ d_e(A', C') - d_e(A', L_g A) & \text{für } B \star A \star S, \\ d_e(A', L_g A) + d_e(A', C') & \text{für } A \star S \star B \end{cases}$$

  Korrekt ist:

$$[\ldots] = \begin{cases} d_e(A', L_g A) - d_e(C', L_g A) & \text{für } A \star B \star S, \\ d_e(C', L_g A) - d_e(A', L_g A) & \text{für } B \star A \star S, \\ d_e(A', L_g A) + d_e(C', L_g A) & \text{für } A \star S \star B \end{cases}$$

- **Seite 128, Zeile 3ff:** Im Buch steht:

  Nach Definition von σ_Z gilt dann

$$d_e(Z, \sigma_Z(A)) = d_e(Z, A) \quad \text{und} \quad d_e(Z, \sigma_Z(B)) = d_e(Z, B).$$

  Nach dem Kongruenzsatz für Dreiecke 3.74 sind dann die Dreiecke $\triangle AMB$ und $\triangle \sigma_Z(A) M \sigma_Z(B)$ ähnlich zueinander. Es gilt daher [...]

Korrekt ist:

> Nach Definition von σ_Z gilt dann
>
> $$d_e(Z,\sigma_Z(A)) = d_e(Z,A), \quad \angle\sigma_Z(A)Z\sigma_Z(B) \simeq \angle AZB, \quad d_e(Z,\sigma_Z(B)) = d_e(Z,B).$$
>
> Nach dem SWS-Kriterium 3.74 sind dann die Dreiecke $\triangle AZB$ und $\triangle\sigma_Z(A)Z\sigma_Z(B)$ kongruent zueinander. Es gilt daher [...]

- **Seite 134, Zeile 10f:** Im Buch steht:

  > Nach dem Ähnlichkeitssatz für Dreiecke 4.45 sind dann die Dreiecke $\triangle AMB$ und $\triangle\zeta_{\lambda,Z}(A)M\zeta_{\lambda,Z}(B)$ ähnlich zueinander, es gilt daher [...]

  Korrekt ist:

  > Nach dem Ähnlichkeitssatz für Dreiecke 4.45 sind dann die Dreiecke $\triangle AZB$ und $\triangle\zeta_{\lambda,Z}(A)Z\zeta_{\lambda,Z}(B)$ ähnlich zueinander, es gilt daher [...]

- **Seite 143, Zeile 14:** Im Buch steht:

  $$y := \{O\} \cup (h \cap H), \quad h' := \ell_{g'}O' \quad \text{und} \quad y' := \{O'\} \cup (h' \cap H).$$

  Korrekt ist:

  $$y := \{O\} \cup (h \cap H) \text{ mit } h := \ell_g O \quad \text{und} \quad y' := \{O'\} \cup (h' \cap H') \text{ mit } h' := \ell_{g'}O'.$$

- **Seite 143, Zeile -14f:** Im Buch steht:

  > Wir behandeln hier nur den Fall $g \neq \overleftrightarrow{OO'} \neq h := \ell_g O$; [...]

  Korrekt ist:

  > Wir behandeln hier nur den Fall $g \neq \overleftrightarrow{OO'} \neq h$; [...]

- **Seite 143, Zeile -11ff:** Im Buch steht:

  > Wir setzen $R := \ell_g P \cap \overleftrightarrow{OO'} = \pi_h^{g,\overleftrightarrow{OO'}}(L_g P)$. In Abhängigkeit von der Anordnung der Punkte O, O', R ergeben sich mehrere Fälle, von denen wir ohne Einschränkung nur die folgenden zu betrachten brauchen:
  >
  > **Fall 1:** $O' = R$. Dann ist $O' = R = \ell_{g'} P \cap \overleftrightarrow{OO'} = L_{g'} P$ und $L_g O' = L_g R = L_g P$. Daraus folgt [...]

  Korrekt ist:

  > Wir setzen $R := \ell_g P \wedge \overleftrightarrow{OO'} = \pi_h^{g,\overleftrightarrow{OO'}}(L_g P)$. In Abhängigkeit von der Anordnung der Punkte O, O', R ergeben sich mehrere Fälle, von denen wir ohne Einschränkung nur die folgenden zu betrachten brauchen:
  >
  > **Fall 1:** $O' = R$. Dann ist $O' = R = \ell_{g'} P \wedge \overleftrightarrow{OO'} = L_{g'} P$ und $L_g O' = L_g R = L_g P$. Daraus folgt [...]

- **Seite 144, Zeile 4ff:** Im Buch steht:

$$[\dots] = \gamma_x^e(L_g O') + \gamma_{x'}^e(L_g{}' P),$$

wobei das Vorzeichen $\pm$ davon abhängt, ob $L_g P$ – und damit auch $L_g O'$ – auf derselben Seite der Geraden $\overleftrightarrow{OO'}$ liegt wie die Strahlen y und y'.

Korrekt ist:

$$[\dots] = \gamma_x^e(L_g O') + \gamma_{x'}^e(L_{g'} P),$$

wobei sich die Vorzeichen von $\gamma_x^e(L_g P)$ und $\gamma_{x'}^e(L_{g'} P)$ unterscheiden, da x und x' auf derselben Seite der Geraden $\overleftrightarrow{OO'}$ liegen und $L_g P$ und $L_{g'} P$ nicht.

- **Seite 144, Zeile 16f:** Im Buch steht:

[…], wobei das Vorzeichen $\pm$ davon abhängt, ob $L_g P$ – und damit auch $L_{g'} P$ und $L_g O'$ – auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{OO'}$ liegt wie die Strahlen x und x'.

Korrekt ist:

[…], wobei die Vorzeichen von $\gamma_x^e(L_g P)$ und $\gamma_{x'}^e(L_{g'} P)$ übereinstimmen, da x und x' auf derselben Seite der Geraden $\overleftrightarrow{OO'}$ liegen und $L_g P$ und $L_{g'} P$ auch.

Kapitel 5: Euklidische Geometrie

- **Seite 187, Zeile -3:** Im Buch steht:

$$\sigma_M(P) \star M \star P \quad \text{sowie} \quad (M \star P \star \zeta_{\lambda,M}(P) \quad \text{oder} \quad M \star P \star \zeta_{\lambda,M}(P))$$

Korrekt ist:

$$\sigma_M(P) \star M \star P \quad \text{sowie} \quad (M \star P \star \zeta_{\lambda,M}(P) \quad \text{oder} \quad M \star \zeta_{\lambda,M}(P) \star P)$$

- **Seite 188, Zeile 6:** Im Buch steht:

$$[\dots] = \zeta_{\lambda,M}(K_s(\sigma_M(N)) = K_{\lambda s}(\zeta_{\lambda,M}(\sigma_M(N)),$$

Korrekt ist:

$$[\dots] = \zeta_{\lambda,M}(K_s(\sigma_M(N))) = K_{\lambda s}(\zeta_{\lambda,M}(\sigma_M(N))),$$

Kapitel 6: Geometrische Konstruktionen

- **Seite 222, Zeile -9ff:** Im Buch steht:

$$\begin{aligned} g_{P,v} &\overset{(3.2)}{=} \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in K^2 \mid \langle \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mid v^\perp \rangle = \langle P \mid v^\perp \rangle \} \\ &= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in K^2 \mid \langle \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \rangle^2 = \langle P \mid v^\perp \rangle^2 \} \\ &= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in K^2 \mid -yX + xY - \langle P \mid v^\perp \rangle^2 = 0\}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

  Korrekt ist:

$$\begin{aligned} g_{P,v} &\overset{(3.2)}{=} \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mid v^\perp \rangle = \langle P \mid v^\perp \rangle \} \\ &= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \rangle = \langle P \mid v^\perp \rangle \} \\ &= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -yX + xY - \langle P \mid v^\perp \rangle = 0\}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

- **Seite 223, Zeile 1ff:** Im Buch steht:

  Für einen allgemeinen Kreis $K_r(M)$ mit $r \in K_{>0}$ und $M = \binom{x}{y} \in K^2$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} K_r(M) &= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in K^2 \mid \|M - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\| = r\} \\ &= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in K^2 \mid \|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\|^2 = r^2\} \\ &= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in K^2 \mid (X-x)^2 + (Y-y)^2 - r^2 = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in K^2 \mid X^2 + Y^2 - 2xX - 2yY + (x^2 + y^2 - r^2) = 0\}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

  Korrekt ist:

  Für einen allgemeinen Kreis $K_r(M)$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $M = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} K_r(M) &= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \|M - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\| = r\} \\ &= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\|^2 = r^2\} \\ &= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (X-x)^2 + (Y-y)^2 - r^2 = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid X^2 + Y^2 - 2xX - 2yY + (x^2 + y^2 - r^2) = 0\}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

- **Seite 230, Zeile -16:** Im Buch steht:

  > Proposition 6.9

  Korrekt ist:

  > Lemma 6.9

  Analog: **Seite 231, Zeilen 7 und 15**, **Seite 239, Zeile 20**, **Seite 242, Zeile 1**

- **Seite 230, Zeile -7f:** Im Buch steht:

  > [...] bilden nach Übungsaufgabe 6.2 ein regelmäßiges n-Eck, das nach Proposition 6.6 mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

  Korrekt ist:

  > [...] sind paarweise verschieden und bilden nach Übungsaufgabe 6.2 ein regelmäßiges n-Eck, das nach Proposition 6.6 mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

- **Seite 231, Zeile -13ff:** Im Buch steht:

  > Ist S einer dieser Schnittpunkte, so gilt nach dem SSrW-Kriterium 3.86 und Korollar 5.7
  >
  > $$\measuredangle P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} S = \frac{2\pi}{n}$$
  >
  > und die Proposition ist bewiesen.

  Korrekt ist:

  > Ist S einer dieser Schnittpunkte, so gilt nach Korollar 5.7
  >
  > $$\measuredangle P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} S = \frac{2\pi}{n}$$
  >
  > und nach Proposition 6.25 ist die Proposition bewiesen.

- **Seite 236, Zeile 2ff:** Im Buch steht:

  > [...] Nach Proposition 6.26 gibt es daher einen mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Winkel mit Winkelgröße $\frac{2\pi}{3}$. Könnten wir diesen Winkel mit Zirkel und Lineal dreiteilen, so erhielten wir einen mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Winkel mit Winkelgröße $\frac{2\pi}{9}$, so dass es nach Proposition 6.26 ein mit Zirkel und Lineal konstruierbares regelmäßiges 9-Eck geben müsste. [...]

  Korrekt ist:

  > [...] Nach Proposition 6.25 gibt es daher einen mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Winkel mit Winkelgröße $\frac{2\pi}{3}$. Könnten wir diesen Winkel mit Zirkel und Lineal dreiteilen, so erhielten wir einen mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Winkel mit Winkelgröße $\frac{2\pi}{9}$, so dass es nach Proposition 6.25 ein mit Zirkel und Lineal konstruierbares regelmäßiges 9-Eck geben müsste. [...]

- **Seite 237, Zeile 10:** Im Buch steht:

$$[\ldots] = (X - (p + q\sqrt{N}))(X - (p - q\sqrt{d_N}))(X - x_3)$$

Korrekt ist:

$$[\ldots] = (X - (p + q\sqrt{d_N}))(X - (p - q\sqrt{d_N}))(X - x_3)$$

- **Seite 265, Zeile -10ff:** Im Buch steht:

  6.2 ($\mathbb{E}$). Gegeben seien ein Kreis K mit Mittelpunkt M und n Punkte $A_1, \ldots, A_n$ auf K mit
  $$\measuredangle A_1MA_2 = \measuredangle A_2MA_3 = \ldots = \measuredangle A_nMA_1 = \frac{2\pi}{n}.$$
  Zeigen Sie, dass dann $\Pi A_1 \ldots A_n$ ein regelmäßiges n-Eck ist.

  Korrekt ist:

  6.2 ($\mathbb{E}$). Gegeben seien ein Kreis K mit Mittelpunkt M und n paarweise verschiedene Punkte $A_1, \ldots, A_n$ auf K mit
  $$\measuredangle A_1MA_2 = \measuredangle A_2MA_3 = \ldots = \measuredangle A_nMA_1 = \frac{2\pi}{n}.$$
  Zeigen Sie, dass dann $\Pi A_1 \ldots A_n$ ein regelmäßiges n-Eck ist.

Kapitel 7: Nichteuklidische Geometrie

- **Seite 323, Zeile -2ff:** Im Buch steht:

  Zur besseren Unterscheidbarkeit von den Konstruktionen in der euklidischen Standardebene $\mathbb{E}$ werden wir die entsprechenden Konstruktionen in $\mathbb{H}_k$ bzw. $\mathbb{H}_h$ künftig immer mit einem Index „k“ bzw. „h“ kennzeichnen. So bezeichnen wir beispielsweise die Verbindungsgerade zweier k-Punkte $A, B \in \mathbf{P}_k$ mit $\overleftrightarrow{AB}^k$.

  Korrekt ist:

  Zur besseren Unterscheidbarkeit von den Konstruktionen in der euklidischen Standardebene $\mathbb{E}$ werden wir die entsprechenden Konstruktionen in $\mathbb{H}_h$ künftig immer mit einem Index „h“ kennzeichnen. So bezeichnen wir beispielsweise die Verbindungsgerade zweier h-Punkte $A, B \in \mathbf{P}_h$ mit $\overleftrightarrow{AB}^h$.