

# Funktionentheorie 2

WS 2016/17

Hendrik Kasten

26. April 2018

---

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Riemann'sche Flächen</b>	<b>3</b>
1.1	Definition Riemann'scher Flächen . . . . .	3
1.2	Holomorphe Abbildungen zwischen Riemann'schen Flächen . . . . .	9
1.3	Meromorphe Funktionen . . . . .	11
1.4	Einfache Eigenschaften holomorpher Abbildungen . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Konstruktion meromorpher Funktionen</b>	<b>20</b>
2.1	Mittag-Leffler-Verteilungen . . . . .	20
2.2	Cousin-Verteilungen . . . . .	30
2.3	Unendliche Produkte . . . . .	33
2.4	Der Produktsatz von Weierstraß . . . . .	37
2.5	Die Gammafunktion . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Elliptische Funktionen</b>	<b>54</b>
3.1	Tori . . . . .	55
3.2	Der Begriff der elliptischen Funktion und die Liouville'schen Sätze . . . . .	58
3.3	Die Weierstraß'sche $\wp$ -Funktion . . . . .	64
3.4	Der Struktursatz . . . . .	70
3.5	Das Abel'sche Theorem für Tori . . . . .	73
3.6	Tori als algebraische Kurven ( $\star$ ) . . . . .	77

---

<b>4</b>	<b>Modulfunktionen und Modulformen</b>	<b>87</b>
4.1	Klassifikation von Möbiustransformationen . . . . .	87
4.2	Die volle Modulgruppe . . . . .	93
4.3	Kongruenzuntergruppen . . . . .	99
4.4	Modulkurven . . . . .	102
4.5	Die Geschlechtsformel ( $\star$ ) . . . . .	109
4.6	Der Begriff der Modulfunktion . . . . .	115
4.7	Fourierentwicklung . . . . .	117
4.8	Modulformen . . . . .	121
4.9	Beispiele für Modulformen . . . . .	124
4.10	Die Valenzformel und Folgerungen daraus . . . . .	130
4.11	Die $j$ -Invariante . . . . .	137

## Riemann'sche Flächen

---

In diesem Kapitel führen wir den Begriff der RIEMANN'schen Fläche<sup>1</sup> ein und studieren elementare Eigenschaften von diesen und Abbildungen zwischen ihnen. Dabei werden wir feststellen, dass der Begriff der holomorphen Abbildung zwischen zwei Riemann'schen Flächen nicht nur den der holomorphen Funktion aus der Funktionentheorie der komplexen Ebene  $\mathbb{C}$  umfasst, sondern auch die dort eingeführten meromorphen Funktionen beschreibt (siehe Abschnitt 1.3). In den Kapiteln 3 und 4 werden wir mit den elliptischen Funktionen und den Modulformen noch weitere Klassen holomorpher Abbildungen zwischen Riemann'schen Flächen studieren.

### 1.1 Definition Riemann'scher Flächen

Bevor wir den Begriff der Riemann'schen Fläche einführen, wollen wir uns ein paar topologische Grundbegriffe in Erinnerung rufen.

**Definition 1.1.** Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{T}$  eine Teilmenge ihrer Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$ . Genau dann heißt  $\mathcal{T}$  eine **Topologie** auf  $X$ , wenn die folgenden Bedingungen gelten.

- (i)  $X \in \mathcal{T}$  und  $\emptyset \in \mathcal{T}$ ,
- (ii) Vereinigungen beliebig vieler Elemente von  $\mathcal{T}$  liegen wieder in  $\mathcal{T}$ ,
- (iii) Durchschnitte endlich vieler Elemente von  $\mathcal{T}$  liegen wieder in  $\mathcal{T}$ .

Die Elemente einer Topologie  $\mathcal{T}$  von  $X$  nennt man auch die **offenen Teilmengen** von  $X$ . Ein Paar  $(X, \mathcal{T})$  aus einer Menge  $X$  mit einer Topologie  $\mathcal{T}$  darauf heißt ein **topologischer Raum**. Wenn klar ist, welche Topologie gemeint ist, schreibt man meist einfacher  $X$  für  $(X, \mathcal{T})$ .

---

<sup>1</sup>Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

**Definition 1.2.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$  beliebig. Dann heißt eine offene Menge in  $X$ , die  $x$  enthält, eine **offene Umgebung** von  $x$ . Weiter nennt man eine beliebige Teilmenge von  $X$ , die eine offene Umgebung von  $x$  enthält, eine **Umgebung** von  $x$ . Ein System  $\mathcal{U}(x, X)$  offener Umgebungen von  $x$  heißt **Umgebungsbasis** von  $x$ , wenn jede offene Umgebung von  $x$  eine Umgebung aus  $\mathcal{U}(x, X)$  als Teilmenge enthält.

**Bemerkung 1.3.** Wenn man definiert, dass die leere Vereinigung die leere Menge ist, dann sind die offenen Mengen eines topologischen Raums  $X$  gerade diejenigen Teilmengen, die sich als Vereinigung von Elementen einer Umgebungsbasis schreiben lassen,

denn: Eine beliebige offene Menge  $U \subseteq X$  enthält definitionsgemäß zu jedem Punkt  $x \in U$  ein Element  $U_x \in \mathcal{U}(x, X)$  als Teilmenge. Es gilt daher

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x.$$

Die Behauptung folgt, da umgekehrt jede Vereinigung von Elementen von Umgebungsbasen offen ist. #

Wir können dies ausnutzen, um auf einer gegebenen Menge  $X$  bequem eine Topologie zu definieren, indem wir in jedem Punkt  $x \in X$  eine Umgebungsbasis angeben. In Abschnitt 4.4 werden wir im Falle der Modulkurven so verfahren.

**Definition 1.4.** Ein topologischer Raum  $X$  mit der Trennungseigenschaft

$$\text{Für alle } x \neq y \in X \text{ gibt es offene Umgebungen } U_x \text{ von } x \text{ und } U_y \text{ von } y \text{ mit } U_x \cap U_y = \emptyset, \quad (T_2)$$

heißt **HAUSDORFF'sch**.<sup>2</sup>

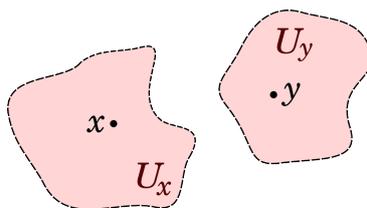


Abbildung 1.1: In einem Hausdorffraum lassen sich zwei beliebige Punkte durch offene Umgebungen trennen.

**Beispiel 1.5.** Für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ <sup>3</sup> ist  $\mathbb{R}^n$  Hausdorff'sch,

denn: Zu je zwei verschiedenen Punkten  $x \neq y \in \mathbb{R}^n$  betrachten wir die offenen Kugeln  $U_r(x)$  und  $U_r(y)$  mit Radius  $r = \frac{1}{3} \|x - y\|_2$ , wobei  $\|\cdot\|_2$  die EUKLID'sche Norm<sup>4</sup> auf  $\mathbb{R}^n$  bezeichne. #

Via  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  folgt, dass auch  $\mathbb{C}^n$  für beliebiges  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  Hausdorff'sch ist.

<sup>2</sup>Felix Hausdorff (1868-1942)

<sup>3</sup>In dieser Vorlesung ist stets Null eine natürliche Zahl; es bezeichnet also  $\mathbb{N}$  die Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen.

<sup>4</sup>Euklid von Alexandria ca. 360-280 v. Chr.

**Definition 1.6.** Ein topologischer Raum  $X$  erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, falls es eine höchstens abzählbare Menge offener Teilmengen  $\{U_0, U_1, \dots\}$  von  $X$  gibt, so dass es für jedes  $x \in X$  und jedes offene  $U \subseteq X$  mit  $x \in U$  ein  $k \in \mathbb{N}$  gibt mit  $x \in U_k \subseteq U$ .

**Beispiel 1.7.** Für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  erfüllt  $\mathbb{R}^n$  das zweite Abzählbarkeitsaxiom, wie man sieht, wenn man als abzählbare Menge  $\{U_0, U_1, \dots\}$  die Menge der offenen Kugeln  $U_r(q)$  mit  $r \in \mathbb{Q}$  und  $q \in \mathbb{Q}^n$  betrachtet. Entsprechend erfüllt auch  $\mathbb{C}^n$  das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

**Definition 1.8.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen zwei topologischen Räumen heißt **stetig**, wenn für alle in  $Y$  offenen Mengen  $V$  das jeweilige Urbild  $f^{-1}(V)$  in  $X$  offen ist. Ist  $f$  stetig und bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung, so nennen wir  $f$  einen **Homöomorphismus**.

**Bemerkung 1.9.** Es ist a priori nicht klar, wie dieser Stetigkeitsbegriff zu der aus der Analysis bekannten Definition passt. Tatsächlich kann man für eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen auch den Begriff der Stetigkeit in einem Punkt  $x \in X$  einführen. Seien nämlich  $\mathcal{U}(x, X)$  eine Umgebungsbasis von  $x$  in  $X$  und  $\mathcal{U}(f(x), Y)$  eine Umgebungsbasis von  $f(x)$  in  $Y$ . Genau dann heißt die Abbildung  $f$  **stetig in  $x$** , wenn es für jedes  $V \in \mathcal{U}(f(x), Y)$  ein  $U \in \mathcal{U}(x, X)$  mit  $f(U) \subseteq V$  gibt. Es ist leicht einzusehen, dass diese Definition nicht von der jeweiligen Wahl der Umgebungsbasen abhängt (Übung!). Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn sie in jedem  $x \in X$  stetig ist,

denn: Sei zunächst  $f$  stetig und  $x \in X$  beliebig. Nach Voraussetzung ist für ein beliebiges  $V \in \mathcal{U}(f(x), Y)$  das Urbild  $f^{-1}(V) \subseteq X$  eine offene Umgebung von  $x$ . Nach Definition gibt es also ein  $U \in \mathcal{U}(x, X)$  mit  $x \in U \subseteq f^{-1}(V)$  und somit  $f(x) \in f(U) \subseteq V$ . Das ist die Stetigkeit in  $x$  von  $f$ .

Sei umgekehrt  $f$  in allen  $x \in X$  stetig, und sei  $V \subseteq Y$  eine beliebige offene Teilmenge. Da sonst nichts zu zeigen ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, es gebe ein  $x \in X$  mit  $f(x) \in V$ . Nach Definition gibt es dann ein  $V_{f(x)} \in \mathcal{U}(f(x), Y)$  mit  $f(x) \in V_{f(x)} \subseteq V$ . Nach Voraussetzung gibt es nun ein  $U_x \in \mathcal{U}(x, X)$  mit

$$f(x) \in f(U_x) \subseteq V_{f(x)} \subseteq V$$

und insbesondere

$$x \in U_x \subseteq f^{-1}(f(U_x)) \subseteq f^{-1}(V_{f(x)}) \subseteq f^{-1}(V).$$

Da somit jedes Element aus dem Urbild von  $V$  eine offene Umgebung besitzt, die ebenfalls im Urbild liegt, folgt die Offenheit von  $f^{-1}(V)$  und also die Stetigkeit von  $f$ . #

Betrachtet man im Spezialfall, dass  $X$  und  $Y$  metrische Räume sind, als Umgebungsbasen jeweils die  $\varepsilon$ -Umgebungen, so ist man bei dem bekannten Stetigkeitsbegriff aus der Analysis angelangt.

**Definition 1.10.** Für einen Hausdorffraum  $X$  und eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  definieren wir

- (a) Eine ( **$n$ -dimensionale**) **reelle (bzw. komplexe) Karte** von  $X$  ist ein Homöomorphismus  $\varphi : U \rightarrow V$ , wobei  $U$  eine beliebige offene Teilmenge von  $X$  und  $V$  eine beliebige offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  (bzw.  $\mathbb{C}^n$ ) ist.
- (b) Ein **reeller (bzw. komplexer) Atlas** auf  $X$  ist ein System

$$\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \text{ (n-dimensionale) reelle (bzw. komplexe) Karte von } X \mid i \in I \text{ Indexmenge}\}$$

von Karten mit  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ .

**Definition 1.11.** Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig. Eine  $n$ -dimensionale reelle (bzw. komplexe) Mannigfaltigkeit ist dann ein Hausdorffraum  $X$  mit dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom und einem  $n$ -dimensionalen reellen (bzw. komplexen) Atlas.<sup>5</sup>

**Beispiel 1.12.** Für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  ist  $\mathbb{R}^n$  (bzw.  $\mathbb{C}^n$ ) eine  $n$ -dimensionale reelle (bzw. komplexe) Mannigfaltigkeit,

denn: Die Hausdorff-Eigenschaft und das zweite Abzählbarkeitsaxiom haben wir schon überprüft. Die Behauptung gilt, weil die Identität  $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$  (bzw.  $\text{id}_{\mathbb{C}^n}$ ) ein Homöomorphismus ist. #

Über die Identifikation zwischen  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{R}^2$  ist weiter  $\mathbb{C}^n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  eine  $2n$ -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit.

Einen allgemeinen topologischen Raum darauf zu überprüfen, ob er eine Mannigfaltigkeit ist, kann recht aufwändig sein. In einer recht großen Klasse von Beispielen gilt das zweite Abzählbarkeitsaxiom jedoch schon automatisch.

**Lemma 1.13.** Hat ein Hausdorffraum  $X$  einen reellen (bzw. komplexen) Atlas mit höchstens abzählbar vielen Karten, so erfüllt  $X$  das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

*Beweis.* Wie wir schon eingesehen haben, erfüllt  $\mathbb{R}^n$  und damit auch jede offene Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Sei nun

$$\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \text{ reelle Karte von } X \mid i \in I\} \quad \text{mit einer Indexmenge } I$$

ein reeller Atlas von  $X$  mit einer höchstens abzählbaren Indexmenge  $I$ . Dann erfüllen für alle  $i \in I$  die offenen Teilmengen  $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$  das zweite Abzählbarkeitsaxiom; es gibt also für jedes  $i \in I$  eine höchstens abzählbare Menge  $J_i$  und offene Teilmengen  $\{V_{i,j}\}_{j \in J_i}$  von  $V_i$ , so dass es für jedes  $x \in V_i$  und jedes offene  $\tilde{V}_i \subseteq V_i$  mit  $x \in \tilde{V}_i$  ein  $j \in J_i$  gibt mit  $x \in V_{i,j} \subseteq \tilde{V}_i$ .

Seien nun  $x \in X$  und  $U \subseteq X$  offen mit  $x \in U$  beliebig. Da  $\mathcal{A}$  ein reeller Atlas ist, gibt es dann ein  $i \in I$  mit  $x \in U_i \cap U$  und somit auch  $\varphi_i(x) \in \varphi_i(U_i \cap U) \subseteq V_i$ . Nach der obigen Überlegung gibt es ein  $j \in J_i$  mit  $\varphi_i(x) \in V_{i,j} \subseteq \varphi_i(U_i \cap U)$ . Wegen der Homöomorphie von  $\varphi_i$  ist dann auch  $\varphi_i^{-1}(V_{i,j})$  eine offene Teilmenge von  $X$  mit  $x \in \varphi_i^{-1}(V_{i,j}) \subseteq U_i \cap U \subseteq U$ .

Da die höchstens abzählbare Vereinigung höchstens abzählbarer Mengen wieder höchstens abzählbar ist, folgt die Behauptung für einen Hausdorffraum mit einem reellen Atlas mit höchstens abzählbar vielen Karten. Die entsprechende Aussage für einen komplexen Atlas mit höchstens abzählbar vielen Karten folgt sofort, weil sich jeder solche Atlas über die Identifikation von  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$  als reeller Atlas interpretieren lässt.  $\square$

Da jeder reelle (bzw. komplexe) Atlas auf einem kompakten Raum einen endlichen Teilatlas besitzt, wird dort die Situation besonders einfach.

**Korollar 1.14.** Hat ein kompakter Hausdorffraum  $X$  einen beliebigen reellen (bzw. komplexen) Atlas, so erfüllt  $X$  das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

<sup>5</sup>Etwas ungenau merken wir uns: Eine  $n$ -dimensionale reelle (bzw. komplexe) Mannigfaltigkeit sieht lokal so aus wie  $\mathbb{R}^n$  (bzw.  $\mathbb{C}^n$ ).

**Beispiel 1.15.** Die Riemann'sche Zahlenkugel  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ist eine kompakte eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit,

denn: Um zu zeigen, dass  $\bar{\mathbb{C}}$  Hausdorff'sch ist, müssen wir nur noch zeigen, dass sich der Punkt  $\infty$  von einem beliebigen  $z \in \mathbb{C}$  durch offene Umgebungen trennen lässt. Das ist klar, wenn wir uns die Topologie auf  $\bar{\mathbb{C}}$  und insbesondere die offenen Kreisscheiben

$$U_\varepsilon(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{\varepsilon}\} \cup \{\infty\}$$

aus Funktionentheorie 1 in Erinnerung rufen.

Nun wollen wir die Kompaktheit von  $\bar{\mathbb{C}}$  zeigen. Jede offene Überdeckung von  $\bar{\mathbb{C}}$  enthält eine Umgebung  $U_\infty$  von  $\infty$ , und nach Definition der Topologie von  $\bar{\mathbb{C}}$  enthält dieses  $U_\infty$  eine offene Menge  $U_\varepsilon(\infty)$  mit geeignetem  $\varepsilon > 0$  als Teilmenge. Die Menge

$$\overline{U_\varepsilon(\infty)} = \bar{\mathbb{C}} \setminus U_\varepsilon(\infty)$$

ist bekanntlich kompakt in  $\mathbb{C}$  und wird somit durch eine endliche Teilüberdeckung der ursprünglichen Überdeckung von  $\bar{\mathbb{C}}$  überdeckt. Die Kompaktheit von  $\bar{\mathbb{C}}$  folgt, weil wir durch Hinzunahme von  $U_\infty$  zu dieser endlichen Teilüberdeckung eine endliche Teilüberdeckung unserer beliebigen offenen Überdeckung von  $\bar{\mathbb{C}}$  gefunden haben.

Nach Korollar 1.14 und der Kompaktheit von  $\bar{\mathbb{C}}$  genügt es zum Beweis der Behauptung nun irgendeinen komplexen Atlas von  $\bar{\mathbb{C}}$  anzugeben. Tatsächlich ist

$$\varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ z & \mapsto z, \end{cases} \quad \text{und} \quad \varphi_2 : \begin{cases} \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ z & \mapsto \frac{1}{z} \end{cases} \quad (1.1)$$

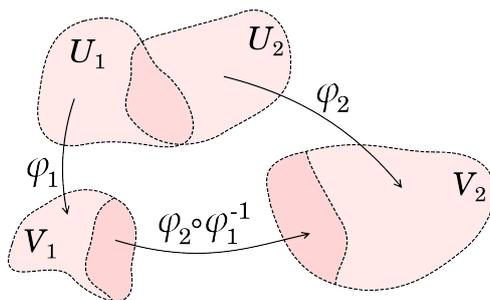
ein komplexer Atlas mit nur zwei Karten, denn dass  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup (\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$  eine offene Überdeckung von  $\bar{\mathbb{C}}$  darstellt und  $\varphi_1$  ein Homöomorphismus ist, ist klar. Und die Homöomorphie von  $\varphi_2$  gilt, weil  $\varphi_2 = \varphi_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$  eine selbstinverse meromorphe Funktion auf  $\bar{\mathbb{C}}$  mit einzigem Pol bei  $z = 0$  ist. #

**Definition 1.16.** Sei nun  $X$  speziell eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Dann definiert man die folgenden Begriffe.

- (a) Zwei komplexe Karten  $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$  von  $X$  mit  $i \in \{1, 2\}$  heißen **konform verträglich**, wenn die **Kartenwechselabbildung**

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

eine konforme Funktion ist.



- (b) Sind die komplexen Karten eines komplexen Atlas  $\mathcal{A}$  auf  $X$  paarweise konform verträglich, so nennt man  $\mathcal{A}$  einen **konformen Atlas** auf  $X$ .
- (c) Zwei konforme Atlanten  $\mathcal{A}_i$  von  $X$  mit  $i \in \{1, 2\}$  heißen **konform verträglich**, wenn jede komplexe Karte aus  $\mathcal{A}_1$  mit jeder komplexen Karte aus  $\mathcal{A}_2$  konform verträglich ist.
- (d) Offensichtlich ist die konforme Verträglichkeit konformer Atlanten von  $X$  eine Äquivalenzrelation. Eine Äquivalenzklasse unter dieser Relation nennen wir eine **komplexe Struktur** auf  $X$ .

**Definition 1.17.** Eine **Riemann'sche Fläche** ist ein Paar  $(X, \mathcal{S})$  bestehend aus einer zusammenhängenden eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  und einer komplexen Struktur  $\mathcal{S}$  auf  $X$ .<sup>6</sup>

**Beispiel 1.18.** (a) Die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  selbst sind eine Riemann'sche Fläche,

denn: Dass  $\mathbb{C}$  zusammen mit dem durch  $\mathcal{A} = \{\text{id}_{\mathbb{C}}\}$  gegebenen komplexen Atlas eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist, hatten wir schon gesehen. Die Behauptung folgt, da offensichtlich  $\mathbb{C}$  zusammenhängend und  $\mathcal{A}$  konform ist. #

- (b) Sei  $(X, \mathcal{S})$  eine Riemann'sche Fläche und  $D \subseteq X$  ein **Gebiet**, also eine zusammenhängende offene Teilmenge von  $X$ . Für jeden konformen Atlas  $\mathcal{A}$  aus  $\mathcal{S}$  ist die Menge

$$\mathcal{A}|_D := \{\varphi|_{U \cap D} : U \cap D \rightarrow \varphi(U \cap D) \mid (\varphi : U \rightarrow V) \in \mathcal{A}\}$$

ein konformer Atlas von  $D$  und liefert dort somit auch eine komplexe Struktur  $\mathcal{S}|_D$ . Das Paar  $(D, \mathcal{S}|_D)$  ist also wieder eine Riemann'sche Fläche. Die Zuordnung  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}|_D$  ist dabei offensichtlich wohldefiniert.

- (c) Die Riemann'sche Zahlenkugel  $\overline{\mathbb{C}}$  ist eine kompakte Riemann'sche Fläche,

denn: Wir wissen, dass  $\overline{\mathbb{C}}$  eine kompakte eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist. Außerdem ist  $\overline{\mathbb{C}}$  offensichtlich zusammenhängend. Die Behauptung folgt also, wenn wir zeigen können, dass der in (1.1) gegebene Atlas  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$  konform ist. Dem ist aber so, denn zum einen gilt

$$\varphi_1(\mathbb{C} \cap (\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\})) = \varphi_2(\mathbb{C} \cap (\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\})) = \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

und zum anderen ist

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{0\} & \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ z & \mapsto \frac{1}{z} \end{cases}$$

konform. #

Wir wollen ab sofort unsere Notation wieder etwas einfacher halten. Wenn klar ist, dass wir uns im Kontext einer Riemann'schen Fläche  $(X, \mathcal{S})$  bewegen, schreiben wir von nun an einfacher

- $X$  für  $(X, \mathcal{S})$ ,
- **Atlas von  $X$**  für einen konformen Atlas aus der komplexen Struktur  $\mathcal{S}$ ,
- **Karte von  $X$**  für eine komplexe Karte aus einem beliebigen konformen Atlas aus der komplexen Struktur  $\mathcal{S}$ .

<sup>6</sup>Eine komplexe Struktur ist im Allgemeinen schlecht anzugeben. Da andererseits jeder konforme Atlas einer eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit einer eindeutigen komplexen Struktur derselben zugeordnet ist, genügt in der Praxis die Angabe eines Paares  $(X, \mathcal{A})$  bestehend aus einer eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  und einem konformen Atlas  $\mathcal{A}$  von  $X$ . Man beachte jedoch, dass dies stets so zu verstehen sein muss, dass zur Riemann'schen Fläche alle Karten gehören, die in einem konformen Atlas aus der zu  $\mathcal{A}$  gehörigen komplexen Struktur enthalten sind.

## 1.2 Holomorphe Abbildungen zwischen Riemann'schen Flächen

**Definition 1.19.** Sei  $X$  eine Riemann'sche Fläche, und sei  $U \subseteq X$  offen. Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **holomorph** genau dann, wenn für alle Karten  $\varphi : U' \rightarrow V'$  von  $X$  die Funktion

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U' \cap U) \rightarrow \mathbb{C}$$

holomorph ist. Die Menge der holomorphen Funktionen auf  $U$  wird mit  $\mathcal{O}(U)$  bezeichnet.

**Bemerkung 1.20.** (a) Holomorphe Funktionen wie in der Definition sind stetig. (Übungsaufgabe 1.1)

- (b) Wir müssen die Holomorphiebedingung aus der Definition nicht für alle Karten von  $X$  überprüfen, sondern nur für die Karten aus einem fest gewählten Atlas von  $X$ . Wegen der konformen Verträglichkeit folgt die Aussage für die anderen Karten dann automatisch.
- (c) Punktweise Summen und Produkte holomorpher Funktionen sind offenbar wieder holomorph, genauso sind konstante Funktionen holomorph. Die Menge  $\mathcal{O}(U)$  trägt so die Struktur einer  $\mathbb{C}$ -Algebra.

Eine schöne Verallgemeinerung eines Satzes aus der Funktionentheorie 1 ist der folgende Satz.

**Satz 1.21** (Riemann'scher Hebbarkeitssatz). Sei  $X$  eine Riemann'sche Fläche, sei  $U \subseteq X$  offen, und sei  $x \in U$  ein beliebiger Punkt. Dann lässt sich jede beschränkte Funktion  $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{x\})$  eindeutig zu einer Funktion  $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$  fortsetzen.

*Beweis.* Es ist die Holomorphie von  $f$  in  $x$  zu zeigen. Sei  $\varphi : U' \rightarrow V'$  eine beliebige Karte von  $X$  mit  $x \in U'$ . Dann ist

$$f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{O}(\varphi(U' \cap (U \setminus \{x\})))$$

eine beschränkte holomorphe Funktion. Nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz aus Funktionentheorie 1 gibt es also eine holomorphe Fortsetzung

$$\widetilde{f \circ \varphi^{-1}} \in \mathcal{O}(\varphi(U' \cap U)).$$

Weil nach Definition der Riemann'schen Fläche alle Kartenwechselabbildungen konform sind, ist dann nach Definition 1.19

$$\tilde{f} := \widetilde{f \circ \varphi^{-1}} \circ \varphi \in \mathcal{O}(U' \cap U).$$

Die Behauptung folgt, da  $\varphi$  beliebig gewählt war und die Karten von  $X$  ganz  $X$  überdecken.  $\square$

**Definition 1.22.** Seien  $X$  und  $Y$  Riemann'sche Flächen. Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **holomorph**, falls für jedes Paar von Karten<sup>7</sup>  $\varphi : U \rightarrow V$  von  $X$  und  $\psi : U' \rightarrow V'$  von  $Y$  mit  $f(U) \subseteq U'$  die Funktion

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow V'$$

<sup>7</sup>An dieser Stelle ist es wichtig, sich zu verdeutlichen, dass die Karten von  $X$  und  $Y$  frei in der jeweiligen komplexen Struktur (und nicht nur in einem fest gewählten Atlas) ausgewählt werden dürfen, da es sonst sein kann, dass  $f$  keine Karte von  $X$  in eine Karte von  $Y$  abbildet und die Holomorphiebedingung somit trivial wäre.

holomorph ist. Die Menge der holomorphen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$  wird mit  $\text{Hol}(X, Y)$  bezeichnet.

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **konform**, wenn sie bijektiv ist und sowohl  $f$  als auch ihre Umkehrabbildung holomorph sind. Zwei Riemann'sche Flächen heißen **konform äquivalent**, wenn es eine konforme Abbildung zwischen ihnen gibt.

**Bemerkung 1.23.** (a) Im Spezialfall  $Y = \mathbb{C}$  gilt  $\text{Hol}(X, \mathbb{C}) = \mathcal{O}(X)$ .

(b) Hintereinanderausführungen holomorpher Abbildungen zwischen Riemann'schen Flächen sind wieder holomorph.

**Satz 1.24** (Identitätssatz für holomorphe Abbildungen). Seien  $X, Y$  Riemann'sche Flächen, und seien  $f, g \in \text{Hol}(X, Y)$  holomorphe Abbildungen, für die die Menge

$$N_{f-g} := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

in  $X$  einen Häufungspunkt  $x_0$  enthält.<sup>8</sup> Dann stimmen die Funktionen  $f$  und  $g$  auf ganz  $X$  überein.

*Beweis.* Wir betrachten die Menge

$$A := \{x \in X \mid \text{es gibt ein offenes } W = W(x) \subseteq X \text{ mit } x \in W \text{ und } f|_W \equiv g|_W\}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass  $A$  offen, abgeschlossen und nichtleer ist. Weil  $X$  als Riemann'sche Fläche zusammenhängend ist, folgt daraus die Gleichheit  $A = X$  und somit der Satz.

Es gilt  $x_0 \in A$ ,

denn: Sei  $\varphi : U \rightarrow V$  eine beliebige Karte von  $X$  mit  $x_0 \in U$ . Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass  $U$  zusammenhängt; sonst betrachten wir stattdessen diejenige Zusammenhangskomponente von  $U$ , die  $x_0$  enthält. Dann enthält  $U$  nach Voraussetzung unendlich viele Elemente von  $N_{f-g}$ , ohne Einschränkung können wir sogar annehmen, sie liegen alle in  $U$ . Wegen der Stetigkeit von  $\varphi$  ist folglich  $\varphi(x_0) \in V$  ein Häufungspunkt von  $\varphi(N_{f-g})$ . Für eine beliebige Karte  $\psi : U' \rightarrow V'$  von  $Y$  mit  $f(U), g(U) \subseteq U'$  gilt dann nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen auf Gebieten in  $\mathbb{C}$  die Gleichheit<sup>9</sup>

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})|_V \equiv (\psi \circ g \circ \varphi^{-1})|_V.$$

Es folgt sofort  $f|_U \equiv g|_U$  und somit  $x_0 \in A$  mit  $W(x_0) = U$ . #

$A$  ist offen, da mit jedem  $x \in A$  definitionsgemäß auch eine offene Umgebung  $W(x)$  von  $x$  in  $A$  enthalten ist und daher

$$A = \bigcup_{x \in A} W(x)$$

eine Vereinigung offener Mengen ist.<sup>10</sup>

$A$  ist abgeschlossen,

<sup>8</sup>Ein **Häufungspunkt** einer Teilmenge  $M \subseteq X$  ist hierbei wie üblich ein Punkt in  $X$ , für den jede offene Umgebung in  $X$  unendlich viele Punkte von  $M$  enthält.

<sup>9</sup>Eine solche Karte gibt es, da aus Stetigkeitsgründen  $f(x_0) = g(x_0)$  gilt.

<sup>10</sup>Man bemerke, dass diese Argumentation unabhängig von der Wahl der jeweiligen  $W(x)$  ist.

denn: Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass alle Randpunkte von  $A$  schon in  $A$  enthalten sind. Wegen der Stetigkeit von  $f$  und  $g$  gilt für einen solchen Randpunkt  $x$  die Gleichheit  $f(x) = g(x)$ . Es gibt daher Karten  $\varphi : U \rightarrow V$  von  $X$  und  $\psi : U' \rightarrow V'$  von  $Y$  mit  $x \in U$  und  $f(U), g(U) \subseteq U'$ . Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass  $U$  zusammenhängt; sonst betrachten wir stattdessen diejenige Zusammenhangskomponente von  $U$ , die  $x$  enthält. Als offene Umgebung des Randpunkts  $x$  von  $A$  hat  $U$  einen nichtleeren Durchschnitt mit  $A$ . Wir haben bereits eingesehen, dass  $A$  offen ist. Es folgt, dass  $U \cap A$ , und somit auch  $\varphi(U \cap A)$ , eine nichtleere offene Menge ist. Da  $V$  somit einen Häufungspunkt von  $\varphi(U \cap A)$  enthält, können wir den Identitätssatz für holomorphe Funktionen auf Gebieten in  $\mathbb{C}$  anwenden, nach dem die Gleichheit

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})|_V \equiv (\psi \circ g \circ \varphi^{-1})|_V$$

gilt. Hieraus folgt sofort  $f|_U \equiv g|_U$  und somit  $x \in A$  mit  $W(x) = U$ . #

□

### 1.3 Meromorphe Funktionen

In Verallgemeinerung der Definition aus Funktionentheorie 1 können wir nun auch auf beliebigen Riemann'schen Flächen, statt nur auf  $\mathbb{C}$  und  $\overline{\mathbb{C}}$ , meromorphe Funktionen definieren.

**Definition 1.25.** Sei  $X$  eine Riemann'sche Fläche,  $U \subseteq X$  offen, und sei  $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  eine Abbildung. Genau dann heißt  $f$  eine **meromorphe Funktion** auf  $U$ , falls gilt

- (i)  $S(f) := f^{-1}(\{\infty\})$  ist abgeschlossen in  $U$  und besteht nur aus isolierten Punkten.
- (ii)  $f_0 := f|_{U \setminus S(f)} \in \mathcal{O}(U \setminus S(f))$ .
- (iii) Für jeden Punkt  $x_0 \in S(f)$  gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty$ .

Die Punkte in  $S(f)$  heißen die **Polstellen** von  $f$ . Die Menge aller auf  $U$  meromorphen Funktionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{M}(U)$ .

**Bemerkung 1.26.** (a) Meromorphe Funktionen wie in der Definition sind stetig,

denn: Sei  $f \in \mathcal{M}(U)$ . Nach 1.25 (ii) ist dann  $f|_{U \setminus S(f)}$  holomorph und nach Bemerkung 1.20 insbesondere stetig. Um auf die Stetigkeit in ganz  $U$  zu schließen benutzen wir den Stetigkeitsbegriff aus Bemerkung 1.9 und müssen nur noch zeigen, dass  $f$  in jedem der Punkte aus  $S(f)$  stetig ist. Die offenen Mengen der Form

$$U_\varepsilon(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{\varepsilon}\} \cup \{\infty\} \quad \text{mit } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$$

bilden offenbar eine Umgebungsbasis von  $\infty$  in  $\overline{\mathbb{C}}$ . Sei nun  $x_0 \in S(f)$  beliebig und  $\varphi : U' \rightarrow V'$  eine beliebige Karte von  $U$  mit  $x_0 \in U'$ . Wegen der Homöomorphie von  $\varphi$  und 1.25 (iii) bildet  $f \circ \varphi^{-1}|_{V'}$  kleine  $\delta$ -Umgebungen von  $\varphi(x_0)$  in ein gegebenes  $U_\varepsilon(\infty)$  ab. Da  $\varphi$  homöomorph ist, gibt es ein Element  $W$  der Umgebungsbasis von  $x_0$  in  $U$ , dessen  $\varphi$ -Bild in einer solchen  $\delta$ -Umgebung liegt. Für dieses  $W$  gilt  $f(W) \subseteq U_\varepsilon(\infty)$ , was die Stetigkeit von  $f$  in  $x_0$  zeigt. #

- (b) Seien  $f, g \in \mathcal{M}(U)$ . Dann ist die punktweise Summe  $f_0 + g_0$  bzw. das punktweise Produkt  $f_0 \cdot g_0$  auf  $U \setminus (S(f) \cup S(g))$  eine holomorphe Funktion. Nach dem Riemann'schen Hebbbarkeitssatz 1.21 können wir diese Funktion auf eventuelle hebbare Singularitäten holomorph fortsetzen. Die Menge  $\mathcal{M}(U)$  trägt so die Struktur einer  $\mathbb{C}$ -Algebra.

Die meromorphen Funktionen auf einer Riemann'schen Fläche  $X$  können wir nun als holomorphe Abbildungen zwischen den Riemann'schen Flächen  $X$  und  $\overline{\mathbb{C}}$  erkennen. Genauer gilt

**Satz 1.27.** Sei  $X$  eine Riemann'sche Fläche. Dann gilt

$$\mathcal{M}(X) = \text{Hol}(X, \overline{\mathbb{C}}) \setminus \{\infty\},$$

wobei  $\infty$  die durch  $f(x) = \infty$  für alle  $x \in X$  gegebene konstante Funktion bezeichne.

*Beweis.* Sei zunächst  $f \in \mathcal{M}(X)$ . Nach Bemerkung 1.26 ist  $f$  auf ganz  $X$  stetig. Um  $f \in \text{Hol}(X, \overline{\mathbb{C}})$  einzusehen, müssen wir nun zeigen, dass für jedes Paar von Karten  $\varphi : U \rightarrow V$  von  $X$  und  $\psi : U' \rightarrow V'$  von  $\overline{\mathbb{C}}$  mit  $f(U) \subseteq U'$  die Funktion

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow V'$$

holomorph ist. Da  $f$  auf  $X \setminus S(f)$  holomorph ist, gilt die Holomorphie von  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  auf  $V \setminus \varphi(S(f) \cap U)$ . Außerdem ist  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  als Verkettung stetiger Abbildungen auf ganz  $V$  stetig. Da  $\varphi(S(f) \cap U) \subseteq V$  eine abgeschlossene Teilmenge aus isolierten Punkten ist, folgt die Behauptung mit dem Riemann'schen Fortsetzungssatz.

Sei nun  $f \neq \infty$  eine holomorphe Abbildung von  $X$  nach  $\overline{\mathbb{C}}$ . Dann sind Bedingungen (ii) und (iii) aus Definition 1.25 trivialerweise erfüllt. Zu zeigen bleibt, dass  $S(f)$  abgeschlossen in  $X$  ist und nur aus isolierten Punkten besteht. Das folgt unmittelbar aus der Annahme  $f \neq \infty$  und dem Identitätssatz 1.24.  $\square$

**Bemerkung 1.28.** Aus Satz 1.27 folgt, dass der Identitätssatz 1.24 auch für meromorphe Funktionen auf einer Riemann'schen Fläche  $X$  gilt. Deshalb hat eine Funktion  $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ , wobei 0 die durch  $f(x) = 0$  für alle  $x \in X$  gegebene konstante Funktion bezeichne, nur isolierte Nullstellen. Somit lassen sich Funktionen aus  $\mathcal{M}(X)$  invertieren, was  $\mathcal{M}(X)$  zu einem Körper macht.

Wir schließen diesen Abschnitt ab, indem wir das aus Funktionentheorie 1 für meromorphe Funktionen aus  $\mathcal{M}(\mathbb{C})$  bekannte Konzept der Laurententwicklung auf meromorphe Funktionen aus  $\mathcal{M}(X)$  für beliebige Riemann'schen Flächen  $X$  verallgemeinern.<sup>11</sup>

Sei also  $X$  eine Riemann'sche Fläche, und sei  $f \in \mathcal{M}(X)$ . Für jedes  $x_0 \in X$  gibt es dann eine Karte  $\varphi : U \rightarrow V$  von  $X$ , für die  $x_0$  in  $U$  enthalten ist und die Einschränkung  $f|_{U \setminus \{x_0\}}$  eine holomorphe Funktion ist. Definitionsgemäß hat dann

$$\hat{f} := f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{O}(\varphi(U \setminus \{x_0\}))$$

<sup>11</sup>In Funktionentheorie 1 haben wir dies ohne Kenntnisse über Riemann'sche Flächen bereits im Spezialfall  $X = \overline{\mathbb{C}}$  getan.

eine isolierte Singularität in  $z_0 := \varphi(x_0)$  und somit nach Funktionentheorie 1 eine Laurententwicklung

$$\hat{f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{mit } a_n \in \mathbb{C} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Diese konvergiert in einer hinreichend kleinen punktierten Kreisscheibe  $\dot{U}$  um  $z_0$ , die ganz in  $\varphi(U \setminus \{x_0\})$  enthalten ist, absolut und in kompakten Teilmengen davon gleichmäßig. Entsprechend nennen wir

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\varphi(x) - \varphi(x_0))^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{für alle } x \in \varphi^{-1}(\dot{U})$$

die *Laurententwicklung* von  $f$  in  $x_0$  bezüglich der Karte  $\varphi$ .

**Bemerkung 1.29.** Die Koeffizienten einer solchen Laurententwicklung hängen von der Wahl der benutzten Karte  $\varphi$  ab, wie man leicht sieht, wenn man etwa die Kartenabbildung  $\varphi$  um einen komplexen Faktor  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  abändert. Insbesondere lässt sich so der Begriff des Residuums aus Funktionentheorie 1 nicht auf beliebige Riemann'sche Flächen verallgemeinern. Unter Kartenwechsel unverändert bleibt aber die Ordnung

$$\text{ord}(f; x_0) := \min\{n \mid a_n \neq 0\},$$

so dass sich wie in Funktionentheorie 1 Null- und Polstellenordnung von  $f$  in  $x_0 \in X$  einführen lassen, vgl. Übungsaufgabe 1.5.

## 1.4 Einfache Eigenschaften holomorpher Abbildungen

In diesem Abschnitt beweisen wir einige elementare topologische Eigenschaften über holomorphe Abbildungen zwischen Riemann'schen Flächen und leiten daraus bekannte Sätze aus der Funktionentheorie der komplexen Ebene her, wie etwa den Satz von Liouville und den Fundamentalsatz der Algebra. Grundlegend ist hier der folgende Satz.

**Satz 1.30** (Lokale Gestalt holomorpher Abbildungen). Seien  $X, Y$  Riemann'sche Flächen mit  $x_0 \in X$ , und sei  $f \in \text{Hol}(X, Y)$  nichtkonstant mit  $y_0 := f(x_0)$ . Dann gibt es eine natürliche Zahl  $k \geq 1$  und Karten  $\varphi : U \rightarrow V$  von  $X$  bzw.  $\psi : U' \rightarrow V'$  von  $Y$  mit folgenden Eigenschaften.

- (i)  $x_0 \in U$  und  $\varphi(x_0) = 0$ .
- (ii)  $y_0 \in U'$  und  $\psi(y_0) = 0$ .
- (iii)  $f(U) \subseteq U'$ .
- (iv) Für die Abbildung  $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow V'$  gilt  $F(z) = z^k$  für alle  $z \in V$ .

*Beweis.* Es gibt Karten  $\varphi : U \rightarrow V$  von  $X$  und  $\psi : U' \rightarrow V'$ , welche die Eigenschaften (i)-(iii) erfüllen,

denn: Sei  $\psi : U' \rightarrow V'$  eine beliebige Karte mit  $y_0 \in U'$ . Dann können wir ohne Einschränkung  $\psi(y_0) = 0$  annehmen und sonst  $\psi$  durch  $\tau' \circ \psi$  mit der Translation  $\tau' : z \mapsto z - \psi(y_0)$  ersetzen.

Sei nun  $\varphi : U \rightarrow V$  eine beliebige Karte mit  $x_0 \in U$ . Dann können wir ohne Einschränkung  $f(U) \subseteq U'$  annehmen und sonst  $\varphi$  durch seine Einschränkung auf den (nichtleeren!) Durchschnitt von  $U$  mit dem Urbild unter  $f$  einer geeigneten offenen Umgebung von  $y_0$  in  $U'$  ersetzen. Weiter können wir ohne Einschränkung  $\varphi(x_0) = 0$  annehmen und sonst  $\varphi$  durch  $\tau \circ \varphi$  mit der Translation  $\tau : z \mapsto z - \varphi(x_0)$  ersetzen. #

Wir betrachten nun die holomorphe Funktion

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow V'.$$

Wäre diese konstant, so müsste auch die Einschränkung von  $f$  auf  $U$  konstant sein, was aber nach dem Identitätssatz 1.24 ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung wäre, dass  $f$  auf ganz  $X$  eine nichtkonstante Funktion ist. Da weiterhin  $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(0) = 0$  gilt, gibt es eine natürliche Zahl  $k \geq 1$  und eine Funktion  $g \in \mathcal{O}(V)$  mit  $g(0) \neq 0$ , so dass

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z) = z^k g(z) \quad \text{für alle } z \in V$$

gilt. In einer hinreichend kleinen Umgebung von  $z = 0$ , in der  $g$  keine Nullstelle haben soll, finden wir eine holomorphe Funktion  $h$  mit  $g = h^k$ . Mit dem Satz von der inversen Funktion<sup>12</sup> aus Analysis 2 lässt sich zeigen, dass die Zuordnung  $z \mapsto zh(z)$  eine kleine Umgebung  $V_1 \subseteq V$  von  $z = 0$  konform auf eine kleine Umgebung  $V_2$  von  $z = 0$  abbildet. Wir wollen diese konforme Abbildung mit  $\alpha : V_1 \rightarrow V_2$  bezeichnen. Wir ersetzen nun die Karte  $\varphi : U \rightarrow V$  durch die Karte

$$\alpha \circ \varphi : \varphi^{-1}(V_1) \rightarrow V_2.$$

Für die Abbildung  $F = \psi \circ f \circ (\alpha \circ \varphi)^{-1}$  gilt dann nach Konstruktion  $F(z) = z^k$  für alle  $z \in V_2$ , also Eigenschaft (iv).  $\square$

**Bemerkung 1.31.** Die Zahl  $k$  in Satz 1.30 kann wie folgt charakterisiert werden. Zu jeder Umgebung  $U_0$  von  $x_0$  gibt es Umgebungen  $U \subseteq U_0$  von  $x_0$  und  $U'$  von  $y_0 = f(x_0)$ , so dass für jeden Punkt  $y \in U'$  mit  $y \neq y_0$  die Menge  $f^{-1}(y) \cap U$  genau  $k$  Elemente hat. Wir nennen  $k$  die **Vielfachheit**, mit der die Abbildung  $f$  den Wert  $y_0$  im Punkt  $x_0$  annimmt und schreiben  $k = y_0\text{-ord}(f; x_0)$ .

**Beispiel 1.32.** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet, und seien  $z_0 \in D$  und  $w_0 \in \mathbb{C}$  beliebig.

- (a) Die Vielfachheit  $0\text{-ord}(f; z_0)$  gibt offensichtlich gerade die Nullstellenordnung einer holomorphen Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  im Punkt  $z = z_0$  an. Außerdem gilt

$$w_0\text{-ord}(f; z_0) = 0\text{-ord}(f - w_0; z_0).$$

- (b) Unter Benutzung der bekannten Karten von  $\overline{\mathbb{C}}$  rechnet man leicht nach, dass für eine meromorphe Funktion  $f \in \mathcal{M}(D)$  die Vielfachheit  $\infty\text{-ord}(f; z_0)$  gerade durch die Polstellenordnung von  $f$  im Punkt  $z = z_0$  gegeben ist (Übung!).

In Funktionentheorie 1 hatten wir gesehen, dass jedes Polynom  $P \in \mathbb{C}[X]$  in  $z = \infty$  einen Pol von Ordnung  $\deg(P)$  besitzt. Insbesondere gilt in diesem Fall also  $\infty\text{-ord}(P; \infty) = \deg(P)$ .

<sup>12</sup>Dass wir diesen auf holomorphe Funktionen anwenden können, haben wir bereits im Beweis des Satzes von der Gebietstreue in Funktionentheorie 1 gezeigt.

**Korollar 1.33** (Offenheitssatz). *Seien  $X, Y$  Riemann'sche Flächen, und sei  $f \in \text{Hol}(X, Y)$  nichtkonstant. Dann ist  $f$  offen, bildet also offene Mengen auf offene Mengen ab.*<sup>13</sup>

*Beweis.* Sei  $x_0 \in X$  beliebig. Dann gibt es nach Satz 1.30 Karten  $\varphi : U \rightarrow V$  von  $X$  und  $\psi : U' \rightarrow V'$  von  $Y$  mit  $x_0 \in U$  und  $f(U) \subseteq U'$ , so dass die Abbildung  $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow V'$  durch  $F(z) = z^k$  mit einem  $k \geq 1$  gegeben ist.  $F|_V$  ist offensichtlich offen. Die Offenheit von  $f|_U$  folgt, da die Kartenabbildungen Homöomorphismen sind.

Sei nun  $\tilde{U} \subseteq X$  eine beliebige offene Teilmenge. Dann gibt es nach der obigen Überlegung für jedes  $x_0 \in \tilde{U}$  eine offene Menge  $U_x$ , so dass  $f|_{U_x}$  offen ist. Für jedes  $x$  ist daher die Menge  $f(\tilde{U} \cap U_x)$  eine offene Umgebung von  $f(x_0)$  in  $f(\tilde{U})$ . Es folgt die Offenheit von  $f(\tilde{U})$  und damit die Behauptung.  $\square$

**Korollar 1.34** (Konformitätskriterium). *Seien  $X, Y$  Riemann'sche Flächen, und sei  $f \in \text{Hol}(X, Y)$  injektiv. Dann liefert  $f$  eine konforme Abbildung von  $X$  nach  $f(X)$ .*<sup>14</sup>

*Beweis.* Wegen der Injektivität von  $f$  in der lokalen Beschreibung von Satz 1.30 muss stets  $k = 1$  gelten. Für Karten  $\varphi : U \rightarrow V$  von  $X$  und  $\psi : U' \rightarrow V'$  von  $Y$  mit  $x_0 \in U$  und  $f(U) \subseteq U'$  wie dort ist daher  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \text{id}_V$  und somit insbesondere holomorph invertierbar. Da  $\varphi$  und  $\psi$  als Karten invertierbar sind, ist  $f|_U$  invertierbar, und mit der Definition des Begriffs der holomorphen Abbildung zwischen Riemann'schen Flächen folgt, dass  $f^{-1}|_{f(U)}$  holomorph ist. Das Konformitätskriterium folgt.  $\square$

**Korollar 1.35** (Maximumprinzip). *Sei  $X$  eine Riemann'sche Fläche, und sei  $f \in \mathcal{O}(X)$  nichtkonstant. Dann nimmt  $f$  auf  $X$  kein lokales Betragsmaximum an.*

*Beweis.* Genau wie für den Beweis des Maximumprinzips in Funktionentheorie 1. Wir verwenden den Offenheitssatz statt des Satzes von der Gebietstreue.  $\square$

**Satz 1.36.** *Seien  $X, Y$  Riemann'sche Flächen, und sei  $f \in \text{Hol}(X, Y)$  nichtkonstant. Ist  $X$  kompakt, so ist auch  $Y$  kompakt und  $f$  surjektiv.*

*Beweis.* Nach dem Offenheitssatz ist  $f(X)$  offen. Da  $X$  kompakt und  $f$  stetig ist, ist  $f(X)$  auch kompakt und, da  $Y$  Hausdorff'sch ist, insbesondere abgeschlossen. Da  $Y$  als Riemann'sche Fläche zusammenhängend ist, folgt  $f(X) \in \{\emptyset, Y\}$ . Da  $f(X)$  als Bild der nichtleeren Menge  $X$  unter  $f$  nicht leer ist, folgt  $f(X) = Y$  und somit der Satz.  $\square$

**Korollar 1.37** (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat eine komplexe Nullstelle.*

<sup>13</sup>In Funktionentheorie 1 hatten wir den Offenheitssatz bereits für Gebiete  $X \subseteq \mathbb{C}$  und  $Y = \mathbb{C}$  gezeigt. Es war dort eine direkte Folgerung aus dem Satz von der Gebietstreue.

<sup>14</sup>In Funktionentheorie 1 hatten wir das Konformitätskriterium bereits für Gebiete  $X, Y \subseteq \mathbb{C}$  gezeigt.

*Beweis.* Die durch ein nichtkonstantes Polynom  $P \in \mathbb{C}[X]$  gegebene Funktion liegt in  $\mathcal{O}(\mathbb{C})$  und kann durch  $P(\infty) = \infty$  zu einer nichtkonstanten Funktion aus

$$\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}}) \stackrel{\text{Satz 1.27}}{=} \text{Hol}(\overline{\mathbb{C}}, \overline{\mathbb{C}}) \setminus \{\infty\}$$

fortgesetzt werden. Wegen der Kompaktheit von  $\overline{\mathbb{C}}$  können wir Satz 1.36 anwenden und erhalten die Surjektivität von  $P$ . Wegen  $P(\infty) = \infty \neq 0$  folgt  $0 \in P(\mathbb{C})$  und somit das Korollar.  $\square$

**Korollar 1.38.** *Auf einer kompakten Riemann'schen Fläche ist jede holomorphe Funktion konstant.*

*Beweis.* Das folgt sofort aus Satz 1.36, weil  $\mathbb{C}$  nicht kompakt ist.  $\square$

**Korollar 1.39** (Satz von Liouville). *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

*Beweis.* Nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz 1.21 lässt sich jede beschränkte ganze Funktion zu einer holomorphen Funktion aus  $\mathcal{O}(\overline{\mathbb{C}})$  fortsetzen. Solche Funktionen sind nach Korollar 1.38 konstant.  $\square$

Zum Abschluss dieses Abschnitts untersuchen wir noch ein wenig das so genannte Verzweigungsverhalten holomorpher Abbildungen zwischen kompakten Riemann'schen Flächen. Wir werden die Resultate in den Kapiteln 3 und 4 benötigen.

**Definition 1.40.** *Seien  $X, Y$  Riemann'sche Flächen und  $f \in \text{Hol}(X, Y)$  eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen ihnen. Ein Punkt  $x_0 \in X$  heißt ein **Verzweigungspunkt** von  $f$ , wenn*

$$k := f(x_0)\text{-ord}(f; x_0) > 1$$

*gilt. Wir nennen  $k - 1$  auch die **Verzweigungsordnung** von  $f$  in  $x_0$ .*

**Proposition 1.41.** *Seien  $X, Y$  kompakte Riemann'sche Flächen, und sei  $f \in \text{Hol}(X, Y)$  nicht konstant. Dann hat  $f$  nur endlich viele Verzweigungspunkte.<sup>15</sup>*

*Beweis.* Betrachten wir eine Überdeckung  $X = \bigcup_{x \in X} U_x$  durch offene Umgebungen  $U_x$  wie in Satz 1.30. Da  $X$  kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung  $X = \bigcup_{v=1}^n U_{x_v}$ . Nach Konstruktion besitzt für alle  $v \in \{1, \dots, n\}$  die Einschränkung  $f|_{U_{x_v}}$  höchstens in  $x_v$  einen Verzweigungspunkt, so dass die Behauptung folgt.  $\square$

**Definition 1.42.** *Seien  $X, Y$  kompakte Riemann'sche Flächen, und sei  $f \in \text{Hol}(X, Y)$  nicht konstant. Dann heißt die nach Bemerkung 1.41 endliche Summe*

$$v_f := \sum_{x_0 \in X} (f(x_0)\text{-ord}(f; x_0) - 1)$$

*die **Gesamtverzweigungsordnung** von  $f$ .*

<sup>15</sup>Für nicht-kompakte Riemann'sche Flächen stimmt dies im Allgemeinen nicht, wie man am Beispiel der Funktion  $\sin^2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sieht. Diese hat in jedem Punkt  $x_k := \pi k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  einen Verzweigungspunkt mit Verzweigungsordnung 1.

**Proposition 1.43.** Seien  $X, Y$  kompakte Riemann'sche Flächen, und sei  $f \in \text{Hol}(X, Y)$  nicht konstant. Dann ist die natürliche Zahl

$$\mu_f := \sum_{x_0 \in f^{-1}(y_0)} y_0\text{-ord}(f; x_0)$$

unabhängig vom Punkt  $y_0 \in Y$  und heißt der **Grad** von  $f$ .

*Beweis.* Da  $Y$  als Riemann'sche Fläche zusammenhängt, genügt es zu zeigen, dass die Abbildung

$$\mu_f : \begin{cases} Y & \rightarrow \mathbb{N}, \\ y & \mapsto \sum_{x \in f^{-1}(y)} y\text{-ord}(f; x) \end{cases}$$

lokalkonstant ist.

Nach Satz 1.36 ist für jedes  $y \in Y$  das Urbild  $f^{-1}(y)$  nichtleer. Andererseits folgt durch Anwenden des Identitätssatzes 1.24 auf  $f$  und die konstante Funktion  $y$ , dass  $f^{-1}(y) \subseteq X$  abgeschlossen ist und aus isolierten Punkten besteht. Mit der Kompaktheit von  $X$  folgt also, dass  $f^{-1}(y)$  eine nichtleere endliche Menge  $\{x_1, \dots, x_\ell\} \subseteq X$  ist.

Seien nun für jedes  $\lambda \in \{1, \dots, \ell\}$  wie in Satz 1.30 Karten  $\varphi_\lambda : \tilde{U}_\lambda \rightarrow V_\lambda$  von  $X$  mit  $x_\lambda \in \tilde{U}_\lambda$  und  $\psi_\lambda : U'_\lambda \rightarrow V'_\lambda$  von  $Y$  mit  $y \in U'_\lambda$  gegeben, so dass

$$F_\lambda(z) = \psi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1}(z) = z^{k_\lambda} \quad \text{mit } k_\lambda \in \mathbb{N}$$

gilt. Ohne Einschränkung dürfen wir dabei annehmen, die Mengen  $\tilde{U}_\lambda$  für  $\lambda \in \{1, \dots, \ell\}$  seien paarweise disjunkt. Alle genannten Eigenschaften treffen auch noch zu, wenn wir die soeben eingeführten Kartenabbildungen einschränken auf eine beliebige offene Umgebung  $U' \subseteq \bigcap_{\lambda=1}^{\ell} f(\tilde{U}_\lambda) \subseteq U'_\lambda$  von  $y$  bzw. auf  $U_\lambda := (f|_{\tilde{U}_\lambda})^{-1}(U') \subseteq \tilde{U}_\lambda$  für alle  $\lambda \in \{1, \dots, \ell\}$ . Wir können dabei  $U'$  so wählen, dass

$$f^{-1}(U') = \bigcup_{\lambda=1}^{\ell} (f|_{\tilde{U}_\lambda})^{-1}(U') = \bigcup_{\lambda=1}^{\ell} U_\lambda$$

gilt,

*denn:* Klar, dass für alle solchen  $U'$  die rechte Seite in der linken enthalten ist. Auszuschließen ist also lediglich, dass  $f^{-1}(U')$  noch Elemente enthält, die nicht in  $U := \bigcup_{\lambda=1}^{\ell} U_\lambda$  liegen. Um dies zu zeigen halten wir zunächst fest, dass in unserer Situation die Abbildung  $f$  abgeschlossen ist,<sup>16</sup>

*denn:* Sei  $A \subseteq X$  abgeschlossen. Da  $X$  kompakt ist, ist  $A$  auch kompakt. Da  $f$  stetig ist, ist auch  $f(A)$  kompakt. Da  $Y$  Hausdorff'sch ist, ist  $f(A)$  abgeschlossen. #

Wegen dieser Abgeschlossenheit ist dann

$$Y \setminus f(X \setminus U) = \{\tilde{y} \in Y \mid f^{-1}(\tilde{y}) \subseteq U\}$$

<sup>16</sup>Es sind also Bilder von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen.

offen. Diese Menge enthält unser festes  $y$ , so dass es eine offene Umgebung  $U'$  von  $y$  gibt mit  $U' \subseteq \bigcap_{\lambda=1}^{\ell} f(\tilde{U}_{\lambda})$  und  $f^{-1}(U') \subseteq U$ . #

Nach Konstruktion und Satz 1.30 folgt nun

$$\mu_f(y') = \sum_{\lambda=1}^{\ell} k_{\lambda} \quad \text{für alle } y' \in U'$$

und somit die Proposition.  $\square$

## Übungsaufgaben

**Aufgabe 1.1.** Zeigen Sie, dass holomorphe Funktionen auf Riemann'schen Flächen stetig sind. (Teil (a) von Bemerkung 1.20)

**Aufgabe 1.2.** Für  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei  $\mathbb{P}^n$  die Menge der eindimensionalen komplexen Untervektorräume von  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Der durch den Vektor  $0 \neq (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$  aufgespannte  $\mathbb{C}$ -Untervektorraum von  $\mathbb{C}^{n+1}$  wird im Folgenden mit  $[z_1 : \dots : z_{n+1}] \in \mathbb{P}^n$  bezeichnet. Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} [z_1 : \dots : z_{n+1}] &= [z'_1 : \dots : z'_{n+1}] \text{ in } \mathbb{P}^n \\ \iff \text{es gibt ein } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} &\text{ mit } (z_1, \dots, z_{n+1}) = \lambda \cdot (z'_1, \dots, z'_{n+1}). \end{aligned}$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) Für  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  bezeichne  $U_i \subseteq \mathbb{P}^n$  die Menge aller eindimensionalen komplexen Untervektorräume  $\mathbb{C}^{n+1}$ , die nicht in der durch  $z_i = 0$  gegebenen Hyperebene von  $\mathbb{C}^{n+1}$  liegen. Dann gilt  $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$ , und es existieren bijektive Abbildungen

$$\varphi_i : \begin{cases} U_i & \rightarrow \mathbb{C}^n, \\ [z_1 : \dots : z_{n+1}] & \mapsto \left( \frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i} \right). \end{cases}$$

- (b) Die Teilmenge

$$\{\varphi_i^{-1}(V) \mid V \subseteq \mathbb{C}^n \text{ offen}, i \in \{1, \dots, n+1\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{P}^n)$$

definiert eine Topologie<sup>17</sup> auf der Menge  $\mathbb{P}^n$ . Letztere wird dadurch zu einem kompakten, zusammenhängenden Hausdorffraum und die Abbildungen  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$  sind Homöomorphismen.

- (c) Die Menge  $\mathcal{A} := \{\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n \mid i \in \{1, \dots, n+1\}\}$  ist ein konformer Atlas auf  $\mathbb{P}^n$ .  
 (d) Die so definierte Riemann'sche Fläche  $\mathbb{P}^1$  ist konform äquivalent zur Riemann'schen Zahlenkugel  $\overline{\mathbb{C}}$ .

<sup>17</sup>Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ . Dann definiert  $\mathcal{S}$  auf  $X$  dadurch eine Topologie, dass genau diejenigen Teilmengen von  $X$  als offen gesetzt werden, die sich als beliebige Vereinigung von endlichen Schnitten von Elementen aus  $\mathcal{S}$  schreiben lassen.  $\mathcal{S}$  wird dann als *Subbasis* dieser Topologie bezeichnet.

**Aufgabe 1.3.** Als Gebiete in der komplexen Ebene  $\mathbb{C}$  sind die offene Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

und  $\mathbb{C}$  selbst Beispiele Riemann'scher Flächen. Zeigen Sie, dass  $\mathbb{E}$  und  $\mathbb{C}$  als topologische Räume homöomorph, jedoch nicht als Riemann'sche Flächen konform äquivalent sind.

**Aufgabe 1.4.** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \mid i \in I\}$  ein Atlas von  $X$ . Es bezeichne  $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die komplexe Konjugation. Es sei ferner

$$\mathcal{A}^\sigma := \{\sigma \circ \varphi_i \mid U_i \rightarrow \sigma(V_i) \mid \varphi_i \in \mathcal{A}, i \in I\}.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- (a)  $\mathcal{A}^\sigma$  ist ein konformer Atlas auf der  $X$  zugrunde liegenden komplexen Mannigfaltigkeit. Die dadurch induzierte Riemannsche Fläche bezeichnen wir mit  $X^\sigma$ .
- (b) Die Atlanten  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}^\sigma$  sind nicht konform verträglich.
- (c) Die Riemannschen Flächen  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{C}^\sigma$  sind konform äquivalent, wobei  $\mathbb{C}$  wie üblich mit der durch den Atlas  $\{\text{id}_{\mathbb{C}}\}$  induzierten komplexen Struktur ausgestattet sei. Wie lassen sich die Elemente von  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\sigma)$  durch die von  $\mathcal{O}(\mathbb{C})$  charakterisieren?

**Aufgabe 1.5.** Sei  $X$  eine Riemann'sche Fläche, sei  $x_0 \in X$  ein ausgezeichnete Punkt, und sei  $f \in \mathcal{M}(X)$  eine meromorphe Funktion. Zeigen Sie, dass sich dann wie in Bemerkung 1.29 unabhängig von der Wahl der benutzten Karte die Null- und die Polstellenordnung von  $f$  in  $x_0$  definieren lassen.

**Aufgabe 1.6.** Sei  $f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$  eine meromorphe Funktion auf der Riemann'schen Zahlenkugel. Zeigen Sie, dass es dann Polynome  $p, q \in \mathbb{C}[X]$  gibt mit

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } q(z) \neq 0.$$

---

### Konstruktion meromorpher Funktionen

---

Im vorigen Kapitel haben wir die meromorphen Funktionen auf einer Riemann'schen Fläche  $X$  als holomorphe Abbildungen von  $X$  in die Riemann'sche Zahlenkugel  $\bar{\mathbb{C}}$  kennengelernt. Das ist eine konzeptionell befriedigende Beschreibung, hilft uns aber nicht dabei, konkrete meromorphe Funktionen mit bestimmten Eigenschaften zu konstruieren. In den Abschnitten 2.1, 2.2 und 2.4 wollen wir Beispiele für solche Eigenschaften studieren. Vorgegeben sind hier jeweils meromorphe Funktionen auf offenen Mengen, die unsere Riemann'sche Fläche  $X$  überdecken, und gesucht ist jeweils eine globale meromorphe Funktion. In Abschnitt 2.1 sollen sich hierbei die meromorphen Funktionen in den Übergängen nur um einen holomorphen Summanden unterscheiden, in den Abschnitten 2.2 und 2.4 nur um einen invertierbaren holomorphen Faktor. Wir formulieren die jeweiligen Fragestellungen für eine allgemeine Riemann'sche Fläche  $X$ , liefern Antworten aber (zunächst) nur in Spezialfällen, in denen wir auf bereits in Funktionentheorie 1 eingeführte Methoden zurückgreifen können. In Abschnitt 2.5 lernen wir schließlich mit der Gammafunktion eine in der analytischen Zahlentheorie und der Stochastik sehr wichtige meromorphe Funktion kennen, die sich als Lösung eines Interpolationsproblems an unendlich vielen Stellen definieren lässt.

#### 2.1 Mittag-Leffler-Verteilungen

**Definition 2.1.** Sei  $X$  eine Riemann'sche Fläche und  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  für eine geeignete Indexmenge  $I$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Sei weiter für jedes  $i \in I$  eine meromorphe Funktion  $f_i \in \mathcal{M}(U_i)$  gegeben, so dass für je zwei  $i_1, i_2 \in I$  die Differenz  $(f_{i_1} - f_{i_2})$  eine holomorphe Funktion in  $\mathcal{O}(U_{i_1} \cap U_{i_2})$  ist. Die Menge  $\{f_i\}_{i \in I}$  nennt man dann eine **MITTAG-LEFFLER-Verteilung**<sup>18</sup>.

Unter einer **Lösung der Mittag-Leffler-Verteilung** versteht man eine meromorphe Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)$  mit  $(f|_{U_i} - f_i) \in \mathcal{O}(U_i)$  für alle  $i \in I$ .

---

<sup>18</sup>Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846-1927)

Auf nicht-kompakten Riemann'schen Flächen sind stets alle Mittag-Leffler-Verteilungen lösbar.<sup>19</sup> Auf nicht einfach zusammenhängenden kompakten Riemann'schen Flächen gibt es dagegen stets unlösbare Mittag-Leffler-Verteilungen.

Wir studieren in diesem Abschnitt die Spezialfälle  $X = \overline{\mathbb{C}}$  und  $X = \mathbb{C}$  und zeigen in den Sätzen 2.4 und 2.8, dass es dort für alle Mittag-Leffler-Verteilungen Lösungen gibt. In Kapitel 3 untersuchen wir außerdem noch Mittag-Leffler-Verteilungen auf so genannten Tori, deren Lösbarkeit durch eine Residuenbedingung beschrieben wird, vgl. Satz 3.14 und Bemerkung 3.15.

**Lemma 2.2.** *Ist  $f$  eine Lösung einer Mittag-Leffler-Verteilung auf einer gegebenen Riemann'schen Fläche  $X$  bezüglich einer beliebigen offenen Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ , so ist die Menge aller möglichen Lösungen durch*

$$f + \mathcal{O}(X) = \{f + g \mid g \in \mathcal{O}(X)\}$$

gegeben.

*Beweis.* Offensichtlich ist mit  $f$  auch jede Funktion aus  $f + \mathcal{O}(X)$  eine mögliche Lösung. Sind andererseits  $f$  und  $\tilde{f}$  zwei Lösungen, so ist  $f - \tilde{f}$  auf jedem  $U_i$  mit  $i \in I$  eine holomorphe Funktion aus  $\mathcal{O}(U_i)$ . Da Holomorphie lokal definiert ist, folgt daraus  $f - \tilde{f} \in \mathcal{O}(X)$  und somit die Behauptung.  $\square$

**Lemma 2.3.** *Sei  $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  ein Gebiet und  $\{f_i\}_{i \in I}$  für eine geeignete Indexmenge  $I$  eine Mittag-Leffler-Verteilung auf einer offenen Überdeckung  $D = \bigcup_{i \in I} U_i$  von  $D$ . Sei  $S(f_i)$  für jedes  $i \in I$  die Menge der Polstellen von  $f_i$  in  $U_i$ , und sei*

$$S := \bigcup_{i \in I} S(f_i).$$

- (a) *Liegt ein  $s \in S$  im Durchschnitt mehrerer Mengen  $U_i$  mit  $i \in I$ , so stimmen die Hauptteile  $h_{s,i}$  der Laurentzerlegungen der jeweiligen  $f_i$  in  $s$  überein,<sup>20</sup> so dass wir zu jedem  $s \in S$  eine holomorphe Funktion  $h_s(z)$  mit  $h_s(0) = 0$  erhalten.*
- (b) *Eine Lösung der Mittag-Leffler-Verteilung  $\{f_i\}_{i \in I}$  ist nichts anderes als eine meromorphe Funktion  $f \in \mathcal{M}(D)$ , deren Hauptteile an den Stellen  $s \in S$  mit den gegebenen  $h_s$  übereinstimmen, also eine Lösung der durch  $\{h_s\}_{s \in S}$  gegebenen **Hauptteilverteilung**.*

*Beweis.* Liege  $s$  in  $S \cap (U_{i_1} \cap U_{i_2})$ . Da nach Voraussetzung die Differenz  $(f_{i_1} - f_{i_2})$  eine holomorphe Funktion aus  $\mathcal{O}(U_{i_1} \cap U_{i_2})$  ist, müssen die Hauptteile  $h_{s,i_1}$  und  $h_{s,i_2}$  der Laurentzerlegungen von  $f_{i_1}$  bzw.  $f_{i_2}$  übereinstimmen. Das zeigt Behauptung (a) und sogleich die Hinrichtung von Behauptung (b).

<sup>19</sup>Das wurde 1884 für  $X = \mathbb{C}$  von Mittag-Leffler und 1948 in voller Allgemeinheit von HERTA FLORACK (?-?) bewiesen.

<sup>20</sup>Da  $s$  nach Voraussetzung ein isolierter Punkt ist, ist es natürlich insbesondere eine isolierte Singularität, so dass die jeweiligen Laurentzerlegungen wohldefiniert sind. Die Laurententwicklung einer meromorphen Funktion  $f_i(z)$  um  $z = \infty$  ist hierbei wie aus Funktionentheorie 1 bekannt durch die Laurententwicklung von  $f_i(\frac{1}{z})$  um  $z = 0$  gegeben.

Es verbleibt die Rückrichtung von Behauptung (b) zu zeigen. Sei dafür  $f$  eine Lösung der Hauptteilverteilung  $\{h_s\}_{s \in S}$ . Dann gilt für ein beliebiges  $i \in I$  die Identität  $S \cap U_i = S(f_i)$ . Außerdem haben die Funktionen  $f$  und  $f_i$  in jedem  $s \in S(f_i)$  die selben Hauptteile und sind ansonsten holomorph. Es folgt  $f|_{U_i} - f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ , so dass  $f$  auch eine Lösung der gegebenen Mittag-Leffler-Verteilung ist.  $\square$

**Satz 2.4.** (a) Auf der Riemann'schen Fläche  $\bar{\mathbb{C}}$  ist jede Mittag-Leffler-Verteilung lösbar.

(b) Die Lösung einer gegebenen Mittag-Leffler-Verteilung auf  $\bar{\mathbb{C}}$  ist bis auf eine additive Konstante aus  $\mathbb{C}$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Sei  $\bar{\mathbb{C}} = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine beliebige offene Überdeckung und  $\{f_i\}_{i \in I}$  eine darauf vorgegebene Mittag-Leffler-Verteilung. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $I$  endlich ist,

denn: Weil  $\bar{\mathbb{C}}$  kompakt ist, hat jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung. Offensichtlich ist jede Lösung bezüglich dieser Teilüberdeckung bereits eine Lösung bezüglich der ursprünglichen Überdeckung.  $\#$

Die Vereinigung  $S := \bigcup_{i \in I} S(f_i)$  der Polstellenmengen ist endlich,

denn: Für jeden Punkt aus  $s \in S$  gibt es wegen der Isoliertheit der Polstellen meromorpher Funktionen in jedem  $U_i$  eine offene Umgebung  $\tilde{U}_i$ , in der kein weiterer Pol von  $f_i$  liegt. Der Durchschnitt  $\bigcap_{i \in I} \tilde{U}_i$  dieser endlich vielen Umgebungen ist eine offene Umgebung von  $s$  in  $\bar{\mathbb{C}}$ , in der kein weiteres Element von  $S$  liegt. Es folgt, dass jeder Punkt  $s \in S$  ein isolierter Punkt in  $\bar{\mathbb{C}}$  ist. Außerdem ist  $S$  als endliche Vereinigung abgeschlossener Polstellenmengen selbst wieder eine abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums  $\bar{\mathbb{C}}$ , also selbst wieder kompakt. Die Behauptung folgt, da jede kompakte Teilmenge eines beliebigen topologischen Raums endlich ist, wenn sie nur aus isolierten Punkten besteht.<sup>21</sup>  $\#$

Eine Lösung der zu  $\{f_i\}_{i \in I}$  gehörigen (endlichen) Hauptteilverteilung  $\{h_s\}_{s \in S}$  lässt sich leicht angeben durch

$$f(z) := \begin{cases} \sum_{s \in S} h_s\left(\frac{1}{z-s}\right) & \text{für } \infty \notin S, \\ \sum_{s \in S \setminus \{\infty\}} h_s\left(\frac{1}{z-s}\right) + h_\infty(z) & \text{für } \infty \in S, \end{cases} \quad (2.1)$$

so dass wir nun Behauptung (a) bewiesen haben.

Es verbleibt die Eindeutigkeitsaussage (b) zu zeigen. Diese folgt aber unmittelbar aus Lemma 2.2, weil nach Korollar 1.38 alle holomorphen Funktionen auf der kompakten Riemann'schen Fläche  $\bar{\mathbb{C}}$  konstant sind.  $\square$

**Korollar 2.5.** Der Körper  $\mathcal{M}(\bar{\mathbb{C}})$  der meromorphen Funktionen auf  $\bar{\mathbb{C}}$  ist als Menge identisch mit der Menge der **rationalen Funktionen**  $\mathbb{C}(X)$ , also der Menge der Quotienten je zweier durch Polynome aus  $\mathbb{C}[X]$  gegebener Funktionen. Letztere erhält so natürlich die Struktur eines Körpers.

<sup>21</sup>Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $S \subseteq X$  eine kompakte Teilmenge von isolierten Punkten. Wegen der Isoliertheit aller Punkte  $s \in S$  gibt es für jedes solche  $s$  eine offene Umgebung  $U_s$ , die außer  $s$  kein weiteres Element aus  $S$  enthält. Offenbar ist  $S \subseteq \bigcup_{s \in S} U_s$  eine offene Überdeckung von  $S$ , die wegen der Kompaktheit von  $S$  eine endliche Teilüberdeckung haben muss. Da in jeder in der Überdeckung verwendeten offenen Teilmenge  $U_s \subseteq X$  genau ein Element von  $S$  liegt, folgt die Endlichkeit von  $S$ .

*Beweis.* Dass rationale Funktionen meromorphe Funktionen auf  $\bar{\mathbb{C}}$  sind, wissen wir aus Funktionentheorie 1. Für die andere Inklusion betrachten wir eine beliebige meromorphe Funktion  $f$  auf  $\bar{\mathbb{C}}$ . Diese löst für eine beliebige Überdeckung  $\bar{\mathbb{C}} = \bigcup_{i \in I} U_i$  die Mittag-Leffler-Verteilung  $\{f|_{U_i}\}_{i \in I}$ . Letztere hat nach Teil (a) von Satz 2.4 aber auch eine Lösung  $\tilde{f}$  wie in (2.1). Nach Teil (b) von Satz 2.4 unterscheiden sich je zwei Lösungen einer Mittag-Leffler-Verteilung auf  $\bar{\mathbb{C}}$  nur um eine additive Konstante. Für ein beliebiges  $z_0 \in \bar{\mathbb{C}} \setminus S$  gilt also

$$f(z) = \tilde{f}(z) + (f - \tilde{f})(z_0) \quad \text{für alle } z \in \bar{\mathbb{C}}.$$

Betrachten wir die Lösung  $\tilde{f}$  aus (2.1) genauer, so stellen wir fest, dass die dort vorkommenden endlich vielen Funktionen  $h_s(z)$  allesamt Hauptteile meromorpher Funktionen auf offenen Teilmengen von  $\mathbb{C}$ <sup>22</sup> und somit Polynomfunktionen sind.  $\square$

Mit etwas mehr Aufwand lässt sich Korollar 2.5 auch schon direkt aus Korollar 1.38 folgern. Aus Korollar 2.5 wiederum erhalten wir unmittelbar noch zwei weitere Ergebnisse.

**Korollar 2.6.** *Jede meromorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$ , die keine rationale Funktion ist, hat als Funktion auf  $\bar{\mathbb{C}}$  betrachtet in  $z = \infty$  eine wesentliche Singularität.<sup>23</sup>*

**Korollar 2.7** (Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen). *Seien  $P$  und  $Q \not\equiv 0$  zwei Polynome in  $\mathbb{C}[X]$ , und sei*

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{für alle } z \in \bar{\mathbb{C}}$$

*die zugehörige rationale Funktion. Seien  $s_1, \dots, s_k$  die verschiedenen Polstellen von  $R$  und  $u_1, \dots, u_k$  die zugehörigen Ordnungen. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome  $h_1, \dots, h_k$  und  $h_\infty \in \mathbb{C}[X]$  mit  $h_\kappa(0) = 0$  für alle  $\kappa \in \{1, \dots, k\}$  und*

$$R(z) = \sum_{\kappa=1}^k h_\kappa\left(\frac{1}{z - s_\kappa}\right) + h_\infty(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

*Es gilt hierbei  $\deg(h_\kappa) = u_\kappa$  für alle  $\kappa \in \{1, \dots, k\}$ .*

Wir wollen nun auch die Lösbarkeit beliebiger Mittag-Leffler-Verteilungen auf  $\mathbb{C}$  beweisen. Da  $\mathbb{C}$  im Gegensatz zu  $\bar{\mathbb{C}}$  nicht kompakt ist, können wir hier bei der Lösung der entsprechenden Hauptteilverteilung allerdings nicht von einer endlichen Polstellenmenge ausgehen, und für unendliches  $S$  ist die Summe über die Hauptteile

$$\sum_{s \in S} h_s\left(\frac{1}{z - s}\right)$$

im Allgemeinen divergent. Wir werden uns mit der Einführung so genannter *konvergenzzeugender Summanden* behelfen.

<sup>22</sup>Diese meromorphe Funktion ist im Falle  $s \neq \infty$  durch ein geeignetes  $f_i(z)$  gegeben, im Falle  $s = \infty$  durch ein geeignetes  $f_i(\frac{1}{z})$ .

<sup>23</sup>Diesen Begriff hatten wir für Funktionen  $f$  auf  $\bar{\mathbb{C}}$  in Funktionentheorie 1 eingeführt. Zu testen ist das Verhalten der Funktion  $\hat{f}(z) := f(\frac{1}{z})$  in  $z = 0$ . Beispielhaft hatten wir gezeigt, dass  $\exp(z)$  in  $z = \infty$  eine wesentliche Singularität hat.

**Satz 2.8** (Satz von Mittag-Leffler). *Auf der Riemann'schen Fläche  $\mathbb{C}$  sind alle Mittag-Leffler-Verteilungen lösbar.*

*Beweis.* Sei  $\mathbb{C} = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine beliebige offene Überdeckung und  $\{f_i\}_{i \in I}$  eine darauf vorgegebene Mittag-Leffler-Verteilung. Dann ist die Vereinigung  $S := \bigcup_{i \in I} S(f_i)$  der Polstellenmengen nicht überabzählbar,

*denn:* Sei  $K \subseteq \mathbb{C}$  ein beliebige kompakte und somit beschränkte Menge. Hätte die beschränkte Menge  $K \cap S$  unendlich viele Elemente, so enthielte sie nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS<sup>24</sup> zwangsläufig einen Häufungspunkt, was wegen der Isoliertheit der Punkte in  $S$  nicht sein kann. Ist  $S$  endlich, so ist nichts mehr zu zeigen. Ist  $S$  unendlich, so betrachten wir die kompakten Mengen  $K_n := \overline{U_n(0)} \subseteq \mathbb{C}$  mit  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Eine Abzählung von  $S$  erhalten wir, indem wir zunächst die endlich vielen Elemente von  $K_1 \cap S$  anordnen, dann die endlich vielen in  $K_2 \cap S$ , die nicht schon in  $K_1 \cap S$  liegen, dann die endlich vielen in  $K_3 \cap S$ , die nicht schon in  $K_2 \cap S$  liegen, usw. #

Es gilt nun, die Lösbarkeit der zu  $\{f_i\}_{i \in I}$  gehörigen Hauptteilverteilung  $\{h_s\}_{s \in S}$  zu untersuchen.

**Fall 1:  $S$  ist endlich.** Hier ist offenbar

$$f(z) = \sum_{s \in S} h_s \left( \frac{1}{z-s} \right)$$

eine mögliche Lösung von  $\{h_s\}_{s \in S}$ .

**Fall 2:  $S$  ist abzählbar.** Sei  $s_0, s_1, s_2, \dots$  eine Aufzählung von  $S$  mit

$$|s_0| \leq |s_1| \leq |s_2| \leq \dots$$

Für diese gelten die beiden offensichtlichen Folgerungen

$$0 \in S \implies s_0 = 0 \quad \text{und} \quad n \geq 1 \implies |s_n| > 0.$$

Für  $n \geq 1$  ist daher die Funktion  $h_n \left( \frac{1}{z-s_n} \right) := h_{s_n} \left( \frac{1}{z-s_n} \right)$  holomorph auf der offenen Kreisscheibe  $U_{|s_n|}(0)$  und besitzt dort eine TAYLORreihenentwicklung<sup>25</sup> um den Punkt  $z = 0$ , die auf Kompakta gleichmäßig absolut konvergiert. Durch Abbrechen dieser Entwicklung an geeigneter Stelle erhalten wir also ein Polynom  $P_n(z)$  mit

$$\left| h_n \left( \frac{1}{z-s_n} \right) - P_n(z) \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{für alle } z \text{ aus dem Kompaktum } \overline{U_{\frac{|s_n|}{2}}(0)}. \quad (2.2)$$

Sei nun  $K \subseteq \mathbb{C}$  ein beliebiges Kompaktum. Dann gibt es eine natürliche Zahl  $N$  mit

$$K \subseteq \overline{U_{\frac{|s_n|}{2}}(0)} \quad \text{für alle } n \geq N.$$

<sup>24</sup>Bernadus Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848) und Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815-1897)

<sup>25</sup>Brook Taylor (1685-1731)

Wegen (2.2) und  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$  folgt somit, dass die Reihe

$$h(z) := h_0\left(\frac{1}{z-s_0}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( h_n\left(\frac{1}{z-s_n}\right) - P_n(z) \right)$$

auf Kompakta  $K \subseteq \mathbb{C} \setminus S$  gleichmäßig absolut konvergiert. Mit dem Approximationssatz von Weierstraß zeigt man, dass  $h$  auf  $\mathbb{C} \setminus S$  holomorph ist und somit nach Konstruktion eine Lösung der Hauptteilverteilung. Das beweist den Satz.  $\square$

**Korollar 2.9.** Sei  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$  eine meromorphe Funktion mit Hauptteilen  $h_s$  für  $s \in S(f)$ . Dann gibt es eine ganze Funktion  $g$  und für jedes  $s \in S(f)$  ein Polynom  $P_s \in \mathbb{C}[X]$  mit

$$f(z) = \sum_{s \in S(f)} \left( h_s\left(\frac{1}{z-s}\right) - P_s(z) \right) + g(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

wobei die Reihe rechts auf Kompakta  $K \subseteq \mathbb{C} \setminus S$  gleichmäßig absolut konvergiert.

*Beweis.* Die Hauptteilverteilung  $\{h_s\}_{s \in S(f)}$  hat nach Konstruktion  $f$  als eine mögliche Lösung, aber auch die im Beweis von Satz 2.8 explizit konstruierte. Nach Lemma 2.2 unterscheiden sich die beiden somit nur um eine ganze Funktion  $g$ , was die Behauptung zeigt.  $\square$

Die Partialbruchzerlegung einer meromorphen Funktion  $f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$  ist leicht zu berechnen. Ein „Kochrezept“ zur expliziten Berechnung einer Darstellung einer meromorphen Funktion  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$  wie in Korollar 2.9 ist das folgende.

- (i) Bestimme die Hauptteile  $h_s$  für alle  $s \in S(f)$ .
- (ii) Untersuche  $\sum_{s \in S(f)} h_s\left(\frac{1}{z-s}\right)$  auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls für alle  $s \in S(f)$  konvergenzerzeugende Summanden, also Polynome  $P_s$ , so dass

$$\sum_{s \in S(f)} \left( h_s\left(\frac{1}{z-s}\right) - P_s(z) \right)$$

auf Kompakta  $K \subseteq \mathbb{C} \setminus S$  gleichmäßig absolut konvergiert. Es bietet sich hier an, die ersten Terme der Taylorreihen der jeweiligen Hauptteile zu versuchen.

- (iii) Versuche (sic!) eine ganze Funktion  $g$  mit

$$f(z) = \sum_{s \in S(f)} \left( h_s\left(\frac{1}{z-s}\right) - P_s(z) \right) + g(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

zu finden.

**Beispiel 2.10** (Partialbruchzerlegung von  $\frac{1}{\sin^2}$ ). Es gilt

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}, \quad (2.3)$$

wobei die rechte Seite auf Kompakta  $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  gleichmäßig absolut konvergiert.

*Beweis.* Die Polstellenmenge in diesem Fall ist offensichtlich auf beiden Seiten durch  $S = \mathbb{Z}$  gegeben, so dass es genügt, die behaupteten Aussagen für holomorphe Funktionen auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  zu zeigen.

Wir wollen nun als Punkt (i) des „Kochrezepts“ die Hauptteile von  $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$  in den  $n \in \mathbb{Z}$  bestimmen. Zunächst einmal gilt

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

und somit auch

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(\pi z)^2}{3!} + \frac{(\pi z)^4}{5!} \mp \dots} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Für alle  $z \in \dot{U}_r(0)$  mit hinreichend kleinem  $r$  stellt der Bruch ganz rechts eine holomorphe Funktion dar, so dass wir

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} (1 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots) \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_r(0)$$

mit geeigneten Koeffizienten  $a_\nu \in \mathbb{C}$  für alle  $\nu \in \mathbb{N}_0$  schreiben können. In dieser Notation folgt

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \frac{1}{z^2} (1 + 2a_2 z^2 + \dots) = \frac{1}{z^2} + 2a_2 + \dots \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_r(0).$$

Der Hauptteil von  $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$  in  $z = 0$  ist also durch  $h_0(z) = z^2$  gegeben. Wegen

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(z-n) + \pi n)} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(z-n))} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

können wir die Überlegungen zu  $h_0$  direkt auf die anderen Hauptteile anwenden und erhalten  $h_n(z) = z^2$  für den Hauptteil von  $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$  in  $z = n$  für ein beliebiges  $n \in \mathbb{Z}$ .

Für Punkt (ii) des „Kochrezepts“ wollen wir nun zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

auf Kompakta in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  gleichmäßig absolut konvergiert. Für eine beliebige kompakte Teilmenge  $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  lässt sich ein  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  finden mit  $K \subseteq \overline{U_c(0)}$ , so dass also

$$|z-n| \geq |n| - |z| \geq |n| - c \geq \frac{|n|}{2} \quad \text{für alle } n \geq 2c$$

gilt. Es folgt

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \geq 2c}} \frac{1}{|z-n|^2} \leq 4 \cdot \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \geq 2c}} \frac{1}{n^2} < \infty$$

und somit die gewünschte gleichmäßig absolute Konvergenz auf  $K$ .

Es folgt somit, dass beide Seiten von (2.3) die gleiche Polstellenmenge  $S = \mathbb{Z}$  mit den jeweils gleichen Hauptteilen haben. Wie in Korollar 2.9 gezeigt, gibt es also eine ganze Funktion  $g$  mit

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} + g(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Für Punkt (iii) des „Kochrezepts“ werden wir zeigen, dass  $g$  identisch verschwindet. Dafür halten wir zunächst fest, dass  $g$  auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  periodisch mit Periode 1 ist, weil die beiden anderen Terme in der obigen Gleichung es sind. Aus Stetigkeitsgründen gilt dann sogar

$$g(z+1) = g(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Ebenfalls wegen der Stetigkeit ist  $g$  auf der Menge

$$\{x + iy \in \mathbb{C} \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

beschränkt. Können wir nun noch die Beschränktheit von  $g$  auf der Menge

$$R := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid |x| \leq 1, |y| > 1\}$$

zeigen, so folgt mit der 1-Periodizität auch schon die Beschränktheit von  $g$  auf ganz  $\mathbb{C}$ , so dass  $g$  nach dem Satz von LIOUVILLE<sup>26</sup> konstant sein muss. Diese Beschränktheit gilt aber tatsächlich,

denn: Zum einen gilt

$$\begin{aligned} |\sin^2(\pi z)| &= \left| \frac{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}}{2i} \right|^2 \\ &= -\frac{1}{4} (e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}) (e^{\pi i\bar{z}} - e^{-\pi i\bar{z}}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{2\pi y} + e^{-2\pi y} - e^{2\pi ix} - e^{-2\pi ix}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{2\pi y} + e^{-2\pi y}) - \frac{1}{2} \cos(2\pi x) \\ &\underset{y \rightarrow \infty}{\rightarrow} \infty \end{aligned} \quad \text{(gleichmäßig in } x)$$

und somit auch

$$\left| \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} \right| \underset{y \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0, \quad \text{(gleichmäßig in } x)$$

so dass  $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$  auf  $R$  beschränkt ist. Zum anderen gilt für  $n \neq 0$  und alle  $z \in R$

$$\begin{aligned} |z-n|^2 &= |(x-n) + iy|^2 = (x-n)^2 + y^2 = |n-x|^2 + y^2 \\ &\geq (|n|-|x|)^2 + y^2 \geq (|n|-1)^2 + y^2 \geq (|n|-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

<sup>26</sup>Joseph Liouville (1809-1882)

und also

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z - n|^2} = \frac{1}{|z|^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{|z - n|^2} \leq 1 + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{(|n| - 1)^2 + 1} < \infty, \quad (2.4)$$

so dass auch  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2}$  auf  $R$  beschränkt ist. Wie bei der Periodizität folgt die Behauptung aus der Definition von  $g$ . #

Die Abschätzung (2.4) zeigt die gleichmäßig absolute Konvergenz von  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2}$  auf  $R$ . Halten wir nun ein  $x \in [-1, 1]$  fest, so gilt

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2} \right| \leq \lim_{y \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z - n|^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{|x - n|^2 + y^2} = 0$$

Vorhin hatten wir schon gezeigt, dass auch  $|\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}|$  auf  $R$  für  $y \rightarrow \infty$  gleichmäßig in  $x$  gegen Null geht. Wieder folgt die entsprechende Aussage für  $g$ . Mit der Konstanz von  $g$  folgt schließlich die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 2.11** (Partialbruchzerlegung des Kotangens). *Es gilt*

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}, \quad (2.5)$$

wobei die rechte Seite auf Kompakta  $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  gleichmäßig absolut gegen einen Wert aus  $\mathbb{C}$  konvergiert.

*Beweis.* Die Polstellenmenge ist offensichtlich wie im letzten Beispiel auf beiden Seiten durch  $S = \mathbb{Z}$  gegeben, so dass es wieder genügt, die behaupteten Aussagen für holomorphe Funktionen auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  zu zeigen.

Die Hauptteile der linken Seite berechnen sich genauso wie die für  $\frac{1}{\sin}$ , nämlich zu

$$h_n(z) = z,$$

womit wir Punkt (i) des „Kochrezepts“ genüge getan haben.

Die Reihe  $\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{z - n}$  konvergiert nicht für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ,

denn: Nehmen wir an, die Reihe konvergierte für ein  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Dann konvergierte auch die Teilreihe<sup>27</sup>

$$\sum_{n=\lceil x \rceil}^{\infty} \frac{1}{x - n}$$

aus negativen Summanden und somit auch deren Abschätzung

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

<sup>27</sup>  $\lceil x \rceil$  bezeichnet hierbei die kleinste ganze Zahl  $n$ , für die  $n - x$  positiv ist.

was bekanntermaßen nicht sein kann. Die Reihe konvergiert also in keinem  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  und insbesondere nicht in allen  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ . #

In Punkt (ii) des „Kochrezepts“ müssen wir daher für alle  $n \in \mathbb{Z}$  konvergenzerzeugende Summanden  $P_n$  finden. Für  $n \neq 0$  ist der konstante Term der Taylorentwicklung von  $\frac{1}{z-n}$  gleich

$$\left(\frac{1}{z-n}\right)\Big|_{z=0} = -\frac{1}{n}.$$

Nach Übungsaufgabe 2.1 konvergiert die Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

auf Kompakta  $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  gleichmäßig absolut. Nach Korollar 2.9 gibt es daher eine ganze Funktion  $g$  mit

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) + g(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \quad (2.6)$$

Es verbleibt zum Beweis der Behauptung zu zeigen, dass  $g$  auf ganz  $\mathbb{C}$  identisch verschwindet. Dafür leiten wir beide Seiten von (2.6) ab; nach dem Satz von Weierstraß dürfen wir dies auf der rechten Seite gliedweise tun. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) + g(z) \right) &= -\frac{1}{z^2} - \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-n)^2}\right) + g'(z) \\ &= -\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} + g'(z) \end{aligned}$$

für die rechte Seite und

$$\frac{\partial}{\partial z} (\pi \cot(\pi z)) = \pi \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right) = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$$

für die linke Seite. Nach (2.3) folgt hieraus  $g'(z) \equiv 0$  für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ . Weil letzteres ein Gebiet ist, folgt hieraus, dass  $g$  auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  eine konstante Funktion ist. Andererseits ist  $g$  eine ungerade Funktion,

denn: Die Funktion  $\pi \cot(\pi z)$  ist bekanntermaßen ungerade, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{(-z)} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(-z)-n} + \frac{1}{n}\right) &= -\left(\frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= -\left(\frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)\right), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Gleichheitszeichen die Reihe mit  $n \mapsto -n$  umsortiert haben, was wir wegen der bereits gezeigten absoluten Konvergenz tun dürfen.  $g$  ist somit nach (2.6) die Differenz zweier ungerader Funktionen und als solche selbst wieder ungerade. #

Die Behauptung folgt, da es außer der Nullfunktion keine weitere ungerade konstante Funktion gibt.  $\square$

## 2.2 Cousin-Verteilungen

**Definition 2.12.** Die Menge der (multiplikativ) invertierbaren Elemente in einem Ring  $R$  wird mit  $R^\times$  bezeichnet. Man überprüft leicht, dass  $R^\times$  zusammen mit der Einschränkung der Multiplikation von  $R$  die Struktur einer Gruppe trägt. Man nennt  $R^\times$  daher die **multiplikative Gruppe** von  $R$ .

**Beispiel 2.13.** Sei  $X$  eine Riemann'sche Fläche und  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge.

- (a) Die Menge  $\mathcal{O}(U)^\times$  der invertierbaren Elemente im Ring  $\mathcal{O}(U)$  der holomorphen Funktionen auf  $U$  besteht aus den nullstellenfreien holomorphen Funktionen auf  $U$ .
- (b) Die Menge  $\mathcal{M}(U)^\times$  der invertierbaren Elemente im Ring  $\mathcal{M}(U)$  der meromorphen Funktionen auf  $U$  ist durch alle meromorphen Funktionen auf  $U$  gegeben, die auf keiner Zusammenhangskomponente von  $U$  identisch verschwinden.

**Definition 2.14.** Sei  $X$  eine Riemann'sche Fläche und  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  für eine geeignete Indexmenge  $I$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Sei weiter für jedes  $i \in I$  eine meromorphe Funktion  $f_i \in \mathcal{M}(U_i)^\times$  gegeben, so dass für je zwei  $i_1, i_2 \in I$

$$\frac{f_{i_1}}{f_{i_2}} \in \mathcal{O}(U_{i_1} \cap U_{i_2})^\times$$

gilt. Die Menge  $\{f_i\}_{i \in I}$  nennt man dann eine **(multiplikative)<sup>28</sup> COUSIN-Verteilung<sup>29</sup>**.

Unter einer **Lösung der Cousin-Verteilung** versteht man eine meromorphe Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)^\times$  mit

$$\frac{f|_{U_i}}{f_i} \in \mathcal{O}(U_i)^\times \quad \text{für alle } i \in I.$$

Auf nicht-kompakten Riemann'schen Flächen sind stets alle Cousin-Verteilungen lösbar.<sup>30</sup> Wir werden dies mit dem Weierstraß'schen Produktsatz 2.26 im Spezialfall der Riemann'schen Fläche  $\mathbb{C}$  beweisen. Auf kompakten Riemann'schen Flächen wird die Lösbarkeit durch das ABEL'sche Theorem<sup>31</sup> beschrieben, das wir in Satz 2.17 für die Riemann'sche Zahlenkugel  $\overline{\mathbb{C}}$  und in Satz 3.38 für Tori beweisen werden. Über die Valenzformel 4.65 werden wir die notwendige Richtung des Abel'schen Theorems für Modulkurven studieren.

**Lemma 2.15.** Ist  $f$  eine Lösung einer Cousin-Verteilung auf einer gegebenen Riemann'schen Fläche  $X$  bezüglich einer beliebigen offenen Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ , so ist die Menge aller möglichen Lösungen durch

$$f \cdot \mathcal{O}(X)^\times = \{f \cdot g \mid g \in \mathcal{O}(X)^\times\}$$

gegeben.

<sup>28</sup>Das Wort „multiplikativ“ dient zur Abgrenzung, da manche Autoren die Bezeichnung „additive Cousin-Verteilung“ für Mittag-Leffler-Verteilungen verwenden.

<sup>29</sup>Pierre Auguste Cousin (1867-1933)

<sup>30</sup>Das wurde wie schon die entsprechende Aussage für Mittag-Leffler-Verteilungen im Jahr 1948 von Herta Florack bewiesen.

<sup>31</sup>Dieses gibt eine äquivalente Bedingung für die Lösbarkeit einer Cousin-Verteilung an, deren eine Richtung 1828 von Niels Henrik Abel (1802-1829) gezeigt wurde, die andere Richtung 1865 von RUDOLPH FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH (1833-1872).

*Beweis.* Offensichtlich ist mit  $f$  auch jede Funktion aus  $f \cdot \mathcal{O}(X)^\times$  eine mögliche Lösung. Sind andererseits  $f$  und  $\tilde{f}$  zwei Lösungen, so ist ihr Quotient auf jedem  $U_i$  mit  $i \in I$  eine invertierbare holomorphe Funktion aus  $\mathcal{O}(U_i)^\times$ . Da Holomorphie lokal definiert ist, folgt daraus

$$\frac{f}{\tilde{f}} \in \mathcal{O}(X)^\times$$

und somit die Behauptung.  $\square$

**Lemma 2.16.** Sei  $X$  eine Riemann'sche Fläche und  $\{f_i\}_{i \in I}$  für eine geeignete Indexmenge  $I$  eine Cousin-Verteilung auf einer offenen Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  von  $X$ . Sei  $S(f_i)$  (bzw.  $T(f_i)$ ) für jedes  $i \in I$  die Menge der Polstellen (bzw. der Nullstellen) von  $f_i$  in  $U_i$ , und sei

$$S := \bigcup_{i \in I} S(f_i) \quad \text{und} \quad T := \bigcup_{i \in I} T(f_i).$$

- (a) Liegt ein  $s \in S$  (bzw. ein  $t \in T$ ) im Durchschnitt mehrerer Mengen  $U_i$  mit  $i \in I$ , so stimmen die Vielfachheiten  $u_s$  (bzw.  $u_t$ ) überein, mit der die entsprechenden Funktionen  $f_i$  in  $s$  (bzw. in  $t$ ) den Wert  $\infty$  (bzw. den Wert 0) annehmen.<sup>32</sup>
- (b) Eine Lösung der gegebenen Cousin-Verteilung ist nichts anderes als eine meromorphe Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)^\times$  ohne Null- und Polstellen in  $X \setminus (S \cup T)$  und mit Vielfachheiten

$$\infty\text{-ord}(f; s) = u_s \text{ für alle } s \in S \quad \text{und} \quad 0\text{-ord}(f; t) = u_t \text{ für alle } t \in T,$$

also eine Lösung der durch  $(\{u_s\}_{s \in S}, \{u_t\}_{t \in T})$  gegebenen Null- und Polstellenverteilung.

*Beweis.* Liege  $s$  in  $S \cap (U_{i_1} \cap U_{i_2})$  für zwei Werte  $i_1, i_2 \in I$ . Da nach Voraussetzung

$$\frac{f_{i_1}}{f_{i_2}} \in \mathcal{O}(U_{i_1} \cap U_{i_2})^\times$$

holomorph und nullstellenfrei ist, müssen die Polstellenordnungen  $\infty\text{-ord}(f_{i_1}; s)$  und  $\infty\text{-ord}(f_{i_2}; s)$  übereinstimmen. Die entsprechende Aussage für ein  $t \in T \cap (U_{i_1} \cap U_{i_2})$  zeigt man analog, so dass wir nun Behauptung (a) und sogleich die Hinrichtung von Behauptung (b) bewiesen haben.

Es verbleibt die Rückrichtung von Behauptung (b) zu zeigen. Sei dafür  $f$  eine Lösung der Null- und Polstellenverteilung  $(\{u_s\}_{s \in S}, \{u_t\}_{t \in T})$ . Dann gelten für ein beliebiges  $i \in I$  die Identitäten  $S \cap U_i = S(f_i)$  und  $T \cap U_i = T(f_i)$ . Außerdem haben die Funktionen  $f$  und  $f_i$  in jedem  $s \in S(f_i)$  die selbe Pol- und in jedem  $t \in T(f_i)$  die selbe Nullstellenordnung und sind ansonsten null- und polstellenfrei. Es folgt

$$\frac{f|_{U_i}}{f_i} \in \mathcal{O}(U_i)^\times,$$

so dass  $f$  auch eine Lösung der gegebenen Cousin-Verteilung ist.  $\square$

<sup>32</sup>Hierbei ist wie aus Funktionentheorie 1 bekannt die Polstellenordnung (bzw. Nullstellenordnung) einer Funktion  $f$  an der Stelle  $z = \infty$  durch die Nullstellenordnung (bzw. Polstellenordnung) von  $f(\frac{1}{z})$  in  $z = 0$  gegeben.

**Satz 2.17** (Abel'sches Theorem auf  $\overline{\mathbb{C}}$ ). (a) *Auf der Riemann'schen Fläche  $\overline{\mathbb{C}}$  sind genau jene Cousin-Verteilungen lösbar, deren zugehörige Null- und Polstellenverteilung in der Notation von Lemma 2.16 die Bedingung*

$$\sum_{s \in S} u_s = \sum_{t \in T} u_t \quad (2.7)$$

*erfüllt.*

(b) *Die Lösung einer gegebenen Cousin-Verteilung auf  $\overline{\mathbb{C}}$  ist bis auf eine multiplikative Konstante aus  $\mathbb{C}^\times$  eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Sei  $\overline{\mathbb{C}} = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine beliebige offene Überdeckung und  $\{f_i\}_{i \in I}$  eine darauf vorgegebene Cousin-Verteilung. Genau wie im Beweis von Satz 2.4 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $I$  endlich ist.

Wenn wir berücksichtigen, dass mit den Polstellen einer meromorphen Funktion auch ihre Nullstellen isolierte Punkte sind, können wir mit einer nur leichten Abwandlung der entsprechenden Stelle im Beweis von Satz 2.4 auch zeigen, dass die Mengen  $S$  und  $T$  endlich sind (*Übung!*).

In Korollar 2.5 haben wir gezeigt, dass die meromorphen Funktionen auf  $\overline{\mathbb{C}}$  gerade die rationalen Funktionen, also Brüche von Polynomfunktionen, sind. Die Gesamtstellenordnung einer komplexen Polynomfunktion  $P$  ist nach dem Fundamentalsatz der Algebra gleich  $\deg(P)$ . Aus Funktionentheorie 1 wissen wir, dass  $P$  in keinem  $z \in \mathbb{C}$  einen Pol hat, und dass seine Polstellenordnung in  $z = \infty$  gleich  $\deg(P)$  ist. Insgesamt folgt, dass Polynome und somit auch alle meromorphen Funktionen aus  $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$  Bedingung (2.7) erfüllen. Nur in diesem Fall kann es also eine Lösung der Null- und Polstellenverteilung geben.

Ist (2.7) erfüllt, so lässt sich eine Lösung der (endlichen) Null- und Polstellenverteilung  $(\{u_s\}_{s \in S}, \{u_t\}_{t \in T})$  leicht angeben durch

$$f(z) := \frac{\prod_{t \in T \setminus \{\infty\}} (z - t)^{u_t}}{\prod_{s \in S \setminus \{\infty\}} (z - s)^{u_s}}. \quad (2.8)$$

Insgesamt haben wir nun Behauptung (a) bewiesen.

Es verbleibt die Eindeutigkeitsaussage (b) zu zeigen. Diese folgt aber unmittelbar aus Lemma 2.15, weil nach Korollar 1.38 alle holomorphen Funktionen auf der kompakten Riemann'schen Fläche  $\overline{\mathbb{C}}$  konstant sind.  $\square$

Wir würden nun gerne noch die Lösbarkeit beliebiger Cousin-Verteilungen auf  $\mathbb{C}$  beweisen. Da letzteres im Gegensatz zu  $\overline{\mathbb{C}}$  nicht kompakt ist, können wir hier bei der Lösung der entsprechenden Null- und Polstellenverteilung allerdings nicht von endlichen Null- und Polstellenmengen ausgehen. Um auch für unendliche  $S$  und  $T$  eine Lösung angeben zu können, bietet es sich in Hinsicht auf (2.8) an, „unendliche Produkte“ einzuführen und ihr Konvergenzverhalten zu studieren. Das werden wir im nächsten Abschnitt tun und danach in Abschnitt 2.4 wieder auf die Cousin-Verteilungen zurückkommen.

## 2.3 Unendliche Produkte

Das Ziel in diesem Abschnitt soll es sein, auf sinnvolle Weise ein Produkt unendlich vieler komplexer Zahlen einzuführen. Die naheliegende Methode, dies zu tun, ist die folgende.

Sei  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge komplexer Zahlen. Genau dann heißt das Produkt  $\prod_{n \in \mathbb{N}} p_n$  konvergent, wenn die Folge  $(P_N)_{N \in \mathbb{N}}$  der Partialprodukte  $P_N := \prod_{n=0}^N p_n$  konvergiert. Gilt hierbei  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N = P$ , so setzen wir  $\prod_{n \in \mathbb{N}} p_n := P$ .

Das Problem an dieser Definition ist, dass schon ein einziges Folgenglied  $p_n = 0$  dafür sorgt, dass das unendliche Produkt mit Grenzwert 0 konvergiert. Wir definieren darum etwas sorgfältiger

**Definition 2.18.** Sei  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge komplexer Zahlen, für die die Menge  $\{n \in \mathbb{N} \mid p_n = 0\}$  endlich ist, und sei  $m$  die kleinste natürliche Zahl, die größer als jedes Element dieser Menge ist. Genau dann heißt das Produkt  $\prod_{n \in \mathbb{N}} p_n$  konvergent, wenn die Folge  $(P_{N,m})_{N \geq m}$  der Partialprodukte

$$P_{N,m} := \prod_{n=m}^N p_n$$

konvergiert und einen von 0 verschiedenen Grenzwert  $P$  hat. Wir setzen dann

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} p_n := p_0 \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_{m-1} \cdot P.$$

**Bemerkung 2.19.** Nach dieser Definition nimmt ein konvergentes Produkt genau dann den Wert 0 an, wenn einer seiner Terme gleich 0 ist.

**Beispiel 2.20.** (a)  $\prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2})$  ist konvergent und hat den Wert  $\frac{1}{2}$ ,

denn: Alle Terme  $p_n$  sind ungleich Null. Weiter gilt

$$P_{N,2} = \prod_{n=2}^N (1 - \frac{1}{n^2}) = \prod_{n=2}^N \left( \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \right) = \frac{1}{N} \cdot \frac{N+1}{2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

#

(b)  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2})$  ist wie in Teil (a) gesehen konvergent und hat den Wert 0.

(c)  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist nicht konvergent,

$$\text{denn: } P_{N,1} = \prod_{n=1}^N \frac{1}{n} = \frac{1}{N!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

#

**Lemma 2.21** (Notwendige Konvergenzbedingung). Sei  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge komplexer Zahlen. Ist  $\prod_{n \in \mathbb{N}} p_n$  konvergent, so folgt  $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .

*Beweis.* Die Behauptung gilt, weil in der Notation von Definition 2.18 für  $N \geq m$

$$p_{N+1} = \frac{P_{N+1,m}}{P_{N,m}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{P}{P} = 1$$

gilt. Hierfür benötigen wir  $p_n \neq 0$  für alle  $N \geq m$  und  $P \neq 0$ .  $\square$

**Satz 2.22** (Konvergenzkriterium). Sei  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge komplexer Zahlen mit  $p_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt die folgende Äquivalenz.

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} p_n \text{ konvergiert} \iff \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Log } p_n \text{ konvergiert.}^{33}$$

Genauer gelten

$$(a) \quad \prod_{n \in \mathbb{N}} p_n = P \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Log } p_n = \text{Log } P + 2\pi i h \text{ für ein } h \in \mathbb{Z},$$

$$(b) \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Log } p_n = S \implies \prod_{n \in \mathbb{N}} p_n = e^S.$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Behauptung (b). Sei dafür  $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Log } p_n$ , also

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \quad \text{mit } S_N := \sum_{n=0}^N \text{Log } p_n.$$

Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt dann

$$\begin{aligned} e^S &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{S_N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left( \sum_{n=0}^N \text{Log } p_n \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^N \exp(\text{Log } p_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^N p_n = \lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,0}, \end{aligned}$$

und somit die Behauptung.

Wir wollen nun Behauptung (a) beweisen. Konvergiere also das Produkt  $\prod_{n \in \mathbb{N}} p_n$  gegen den Wert  $P$ . Dann gilt auch

$$(a_N)_{N \in \mathbb{N}} := \left( \frac{\prod_{n=0}^N p_n}{P} \right)_{N \in \mathbb{N}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1.$$

Setzen wir nun  $\varepsilon_N := \text{Log } a_N$ , so folgt wegen der Stetigkeit des Logarithmus in  $z = 1$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N = \text{Log } 1 = 0. \quad (2.9)$$

Für jedes  $N \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $h_N \in \mathbb{Z}$  mit

$$\varepsilon_N = \sum_{n=0}^N \text{Log } p_n - \text{Log } P + 2\pi i h_N, \quad (2.10)$$

<sup>33</sup>Hierbei ist wie in Funktionentheorie 1 mit  $\text{Log } z = \log |z| + i \text{Arg } z$  mit  $\text{Arg } z \in (-\pi, \pi]$  der Hauptwert des Logarithmus bezeichnet.

denn: Nach Definition von  $\varepsilon_N$  und dem Additionstheorem der Exponentialfunktion gilt

$$\exp \varepsilon_N = \frac{\prod_{n=0}^N p_n}{P} = \exp \left( \sum_{n=0}^N \operatorname{Log} p_n - \operatorname{Log} P \right).$$

Die Behauptung folgt, da bekanntermaßen das Urbild einer festen komplexen Zahl  $w \in \mathbb{C}$  unter der Exponentialfunktion durch  $\exp^{-1}(\{w\}) = \operatorname{Log} w + 2\pi i\mathbb{Z}$  gegeben ist. #

Durch Vergleich von (2.10) für  $N$  und für  $N+1$  erhalten wir

$$2\pi i(h_{N+1} - h_N) = (\varepsilon_{N+1} - \varepsilon_N) - \operatorname{Log} p_{N+1}. \quad (2.11)$$

Nach Konstruktion gehen hierbei  $\varepsilon_{N+1}$  und  $\varepsilon_N$  für  $N \rightarrow \infty$  gegen Null. Desweiteren gilt wegen der Konvergenz von  $\prod_{n \in \mathbb{N}} p_n$  nach Lemma 2.21

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_N = 1,$$

so dass auch der letzte Summand auf der rechten Seite von (2.11) für  $N \rightarrow \infty$  gegen Null strebt. Da die  $h_N$  für  $N \in \mathbb{N}$  ganze Zahlen sind, folgt hieraus, dass für ein hinreichend großes  $N \in \mathbb{N}$  die Folge  $(h_N)_{N \in \mathbb{N}}$  konstant wird, etwa  $h_N = h \in \mathbb{Z}$  für  $N \gg 1$ . Mit (2.9) und (2.10) folgt dann

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Log} p_n = \operatorname{Log} P - 2\pi i h$$

und somit die Behauptung. □

Satz 2.22 liefert uns ein Kriterium für die Konvergenz unendlicher Produkte. Leider sind die dort vorkommenden unendlichen Summen von Logarithmen immer noch recht schwer zu kontrollieren. Dieses Problem soll das folgende Lemma beheben.

**Lemma 2.23.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge komplexer Zahlen mit  $a_n \neq -1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt folgende Äquivalenz.

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Log}(1 + a_n) \text{ konvergiert absolut} \iff \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \text{ konvergiert absolut.}$$

*Beweis.* Ist  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$  konvergent, so ist nach dem notwendigen Konvergenzkriterium die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge.

Ist  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\operatorname{Log}(1 + a_n)|$  konvergent, so ist ebenfalls die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge,

denn: Wieder mit dem notwendigen Konvergenzkriterium folgt, dass  $(\operatorname{Log}(1 + a_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist. Setzen wir die Folge in die Exponentialfunktion ein, erhalten wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n) = 1$  und somit die Behauptung. #

Es gilt

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z) - \operatorname{Log}(1)}{z} = \left( \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Log} z \right) (1) = 1 \quad \text{für alle } \dot{U}_1(0).$$

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es daher ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > N$  die Abschätzungen

$$(1 - \varepsilon) |a_n| \leq |\operatorname{Log}(1 + a_n)| \leq (1 + \varepsilon) |a_n| \quad (2.12)$$

gelten.<sup>34</sup> Das Lemma folgt somit aus dem Majorantenkriterium für Reihen.  $\square$

Wir können das Gezeigte nun in dem folgenden Kriterium für unbedingte Konvergenz unendlicher Produkte zusammenfassen.

**Satz 2.24** (Unbedingtes Konvergenzkriterium). *Ist die Reihe  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  absolut konvergent, so konvergiert auch das unendliche Produkt  $\prod_{n \in \mathbb{N}} (1 + a_n)$ . Die Konvergenz des Produkts ist hierbei sogar **unbedingt**, das heißt, der Wert des Produkts hängt nicht von der Reihenfolge der Faktoren ab.*

*Beweis.* Ist die Reihe  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$  konvergent, so strebt insbesondere die Folge  $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen Null. Es gibt also ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n| < \frac{1}{2}$  für alle  $n > N$ . Für solche  $n$  ist dann auch  $a_n \neq -1$ , und wir können Lemma 2.23 verwenden. Hiermit und mit Satz 2.22 folgt dann sofort die Konvergenz des unendlichen Produkts.

Die Unbedingtheit der Konvergenz ergibt sich, weil eine Reihe genau dann absolut konvergiert, wenn sie unbedingt konvergiert.  $\square$

Wir wollen im Folgenden ja unendliche Produkte holomorpher Funktionen betrachten. Es bietet sich daher an auch zu untersuchen, wann ein solches Produkt unbedingt konvergiert.

**Satz 2.25.** *Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge holomorpher Funktionen  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ , für die die Reihe  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(z)$  auf jeder kompakten Teilmenge von  $D$  gleichmäßig absolut konvergiert. Dann ist für jedes  $z \in D$  das Produkt*

$$f(z) = \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 + f_n(z))$$

*unbedingt konvergent, und die so definierte Funktion  $f(z)$  ist auf  $D$  holomorph.*

*Beweis.* Die unbedingte Konvergenz des Produkts für jedes  $z \in D$  folgt unmittelbar aus Satz 2.24, wenn wir dort  $a_n = f_n(z)$  setzen.

Es verbleibt die Holomorphie von  $f$  auf  $D$  zu zeigen. Wir können  $D$  mit offenen Mengen  $U$  überdecken, deren topologischer Abschluss  $\bar{U}$  kompakt ist und gänzlich in  $D$  liegt. Da Holomorphie lokal definiert ist, genügt es daher, die Holomorphie von  $f$  auf solchen offenen Mengen  $U$  zu untersuchen.

Nach Voraussetzung konvergiert  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(z)$  auf  $\bar{U}$  und also auch auf  $U$  gleichmäßig absolut. Nach dem notwendigen Konvergenzkriterium für gleichmäßige Konvergenz konvergiert daher die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $U$  gleichmäßig gegen Null. Insbesondere gibt es ein  $N_1 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > N_1$

$$|f_n(z)| < 1 \quad \text{für alle } z \in U$$

<sup>34</sup>Für  $a_n = 0$  sind diese Abschätzungen trivialerweise richtig.

gilt. Wir können also die Abschätzung (2.12) aus dem Beweis von Lemma 2.23 anwenden und tun dies mit der speziellen Wahl  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Es gibt dann ein  $N_2 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > N_2$  die Abschätzung

$$|\operatorname{Log}(1 + f_n(z))| \leq \frac{3}{2} |f_n(z)| \quad \text{für alle } z \in U$$

gilt. Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe  $\sum_{n=N_2+1}^{\infty} f_n(z)$  gleichmäßig auf  $U \subseteq \bar{U}$ , und nach der obigen Abschätzung gilt dasselbe auch für

$$S(z) := \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + f_n(z)).$$

Nach dem Satz von Weierstraß ist also  $S(z)$  auf  $U$  holomorph, und nach dem Konvergenzkriterium 2.22 gilt das auch für

$$e^{S(z)} = \prod_{n=N_2+1}^{\infty} (1 + f_n(z)).$$

Es folgt, dass auch

$$f(z) = (1 + f_1(z)) \cdot \dots \cdot (1 + f_{N_2}(z)) \cdot e^{S(z)}$$

eine auf  $U$  holomorphe Funktion ist, was zu zeigen war.  $\square$

## 2.4 Der Produktsatz von Weierstraß

**Satz 2.26** (Produktsatz von Weierstraß). (a) Auf der Riemann'schen Fläche  $\mathbb{C}$  sind alle Cousin-Verteilungen lösbar.

(b) Die Lösung einer gegebenen Cousin-Verteilung auf  $\mathbb{C}$  ist bis auf einen Faktor  $e^{h(z)}$  mit  $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Sei  $\mathbb{C} = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine beliebige offene Überdeckung und  $\{f_i\}_{i \in I}$  eine darauf vorgegebene Cousin-Verteilung.

Wenn wir berücksichtigen, dass mit den Polstellen einer meromorphen Funktion auch ihre Nullstellen isolierte Punkte sind, können wir mit einer nur leichten Abwandlung der entsprechenden Stelle im Beweis von Satz 2.8 auch zeigen, dass in der Notation von Lemma 2.16 die Mengen  $S$  und  $T$  nicht überabzählbar sind (*Übung!*).

Es gilt nun, die Lösbarkeit der zu  $\{f_i\}_{i \in I}$  gehörigen Null- und Polstellenverteilung

$$(\{u_s\}_{s \in S}, \{u_t\}_{t \in T})$$

zu zeigen. Hierfür ist es offenbar ausreichend, wenn wir für jede Nullstellenverteilung  $\{u_t\}_{t \in T}$  eine holomorphe Lösung in  $\mathcal{O}(\mathbb{C})$  finden.

**Fall 1:  $T$  ist endlich.** Hier ist offenbar

$$f(z) = \prod_{t \in T} (z - t)^{u_t}$$

eine mögliche Lösung von  $\{u_t\}_{t \in T}$ .

**Fall 2:  $T$  ist abzählbar.** Sei  $t_0, t_1, t_2, \dots$  eine Aufzählung von  $T$  mit

$$|t_0| \leq |t_1| \leq |t_2| \leq \dots \quad (2.13)$$

und schreiben wir kurz  $u_n$  statt  $u_{t_n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Da wir eine Nullstelle der Ordnung  $u$  in  $z = 0$  durch nachträgliches Multiplizieren mit  $z^u$  erzwingen können, dürfen wir ohne Einschränkung  $0 \notin T$  annehmen. Daraus folgt offensichtlich  $|t_n| > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Das hat den Vorteil,<sup>35</sup> dass wir statt Faktoren der Form  $(z - t_n)^{u_n}$  solche der Form  $(1 - \frac{z}{t_n})^{u_n}$  betrachten können.

Die Funktion  $(1 - \frac{z}{t_n})^{u_n}$  ist auf dem Elementargebiet  $U_{|t_n|}(0)$  holomorph und nullstellenfrei, so dass es eine Funktion  $h_n \in \mathcal{O}(U_{|t_n|}(0))$  gibt mit

$$\left(1 - \frac{z}{t_n}\right)^{u_n} = e^{-h_n(z)} \quad \text{für alle } z \in U_{|t_n|}(0). \quad (2.14)$$

Ohne Einschränkung gilt dabei  $h_n(0) = 0$ ,

denn: Setzen wir in der definierenden Gleichung  $z = 0$ , so erhalten wir

$$1 = \left(1 - \frac{0}{t_n}\right)^{u_n} = e^{-h_n(0)}$$

und somit  $h_n(0) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ . Durch Addition eines geeigneten ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi i$  erhalten wir also  $h_n(0) = 0$ . #

Die Taylorentwicklung von  $h_n$  um  $z = 0$  konvergiert auf dem Kompaktum

$$K_n := \overline{U_{\frac{|t_n|}{2}}(0)}$$

gleichmäßig absolut. Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es also ein Polynom  $P_n$  mit

$$|h_n(z) - P_n(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in K_n.$$

Da die Exponentialfunktion stetig ist, gibt es insbesondere ein Polynom  $P_n$  mit

$$\left| \left(1 - \frac{z}{t_n}\right)^{u_n} \cdot e^{P_n(z)} - 1 \right| = |e^{P_n(z) - h_n(z)} - 1| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{für alle } z \in K_n.$$

Wegen (2.13) ist ein beliebiges Kompaktum  $K \subseteq \mathbb{C}$  für alle  $n > N$  mit einem hinreichend großen  $N \in \mathbb{N}$  in  $K_n$  enthalten. Es folgt also, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \left(1 - \frac{z}{t_n}\right)^{u_n} \cdot e^{P_n(z)} - 1 \right)$$

auf beliebigen Kompakta  $K \subseteq \mathbb{C}$  gleichmäßig absolut konvergiert. Nach Satz 2.25 ist somit das unendliche Produkt

$$f(z) := \prod_{n=0}^{\infty} \left( \left(1 - \frac{z}{t_n}\right)^{u_n} \cdot e^{P_n(z)} \right) \quad 36$$

<sup>35</sup>Wir erhoffen uns hiervon bessere Konvergenzeigenschaften.

auf ganz  $\mathbb{C}$  unbedingt konvergent und stellt eine holomorphe Funktion dar. Nach Konstruktion ist offensichtlich  $f$  eine Lösung der Nullstellenverteilung  $\{u_t\}_{t \in T}$ , so dass wir Behauptung (a) gezeigt haben.

Nach Lemma 2.15 unterscheiden sich zwei Lösungen einer Cousin-Verteilung auf  $\mathbb{C}$  um einen Faktor  $H \in \mathcal{O}(\mathbb{C})^\times$ . In Funktionentheorie 1 haben wir gesehen, dass diese Funktionen von der Form

$$H(z) = e^{h(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

sind mit einem  $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ . Damit haben wir auch Behauptung (b) gezeigt.  $\square$

**Korollar 2.27.** Sei  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  eine holomorphe Funktion mit Nullstellenmenge  $T(f)$ , und sei  $u_t := 0\text{-ord}(f; t)$  für alle  $t \in T(f)$ . Dann gibt es eine holomorphe Funktion  $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  und für jedes  $t \in T(f)$  ein Polynom  $P_t \in \mathbb{C}[X]$  mit

$$f(z) = \begin{cases} \prod_{t \in T(f)} \left( \left(1 - \frac{z}{t}\right)^{u_t} \cdot e^{P_t(z)} \right) \cdot e^{g(z)} & \text{falls } 0 \notin T(f), \\ z^{u_0} \cdot \prod_{t \in T(f) \setminus \{0\}} \left( \left(1 - \frac{z}{t}\right)^{u_t} \cdot e^{P_t(z)} \right) \cdot e^{g(z)} & \text{falls } 0 \in T(f), \end{cases}$$

wobei das jeweilige Produkt rechts auf  $\mathbb{C}$  unbedingt konvergiert.

*Beweis.* Die Nullstellenverteilung  $\{u_t\}_{t \in T(f)}$  hat nach Konstruktion  $f$  als eine mögliche Lösung, aber auch die im Beweis von Teil (a) von Satz 2.26 explizit konstruierte. Nach Teil (b) von Satz 2.26 unterscheiden sich die beiden also um einen Faktor der Form  $e^g$  mit  $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ , was die Behauptung zeigt.  $\square$

**Korollar 2.28.** Jede nicht identisch verschwindende meromorphe Funktion aus  $\mathcal{M}(\mathbb{C})$  ist Quotient zweier holomorpher Funktionen aus  $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ .<sup>37</sup>

*Beweis.* Sei  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ . Dann besteht die Polstellenmenge  $S(f)$  von  $f$  aus isolierten Punkten. Setzen wir  $u_s := \infty\text{-ord}(f; s)$  für alle  $s \in S(f)$ , so hat nach dem Weierstraß'schen Produktsatz 2.26 die Nullstellenverteilung  $\{u_s\}_{s \in S(f)}$  eine Lösung  $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ . Nach Konstruktion ist das Produkt  $g := fh$  in  $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ , so dass wir mit  $f = \frac{g}{h}$  eine Darstellung wie gewünscht gefunden haben.  $\square$

Wir wollen nun in Analogie zum „Kochrezept“ zur Berechnung der Lösung einer Mittag-Leffler-Verteilung auf  $\mathbb{C}$  auch die Lösung einer Cousin-Verteilung auf  $\mathbb{C}$  explizit berechnen können.

<sup>36</sup>Offenbar spielen hier die Faktoren  $e^{P_n(z)}$  die analoge Rolle zu den konvergenzerzeugenden Summanden im Beweis des Satzes von Mittag-Leffler 2.8. Man spricht daher auch von *konvergenzerzeugenden Faktoren*.

<sup>37</sup>Etwas eleganter formuliert besagt das Korollar, dass der Körper  $\mathcal{M}(\mathbb{C})$  der meromorphen Funktionen auf  $\mathbb{C}$  der Quotientenkörper des nullteilerfreien Rings  $\mathcal{O}(\mathbb{C})$  der ganzen Funktionen ist.

**Proposition 2.29.** *Die im Beweis des Weierstraß'schen Produktsatz 2.26 in (2.14) durch*

$$\left(1 - \frac{z}{t_n}\right)^{u_n} = e^{-h_n(z)} \quad \text{für alle } z \in U_{|t_n|}(0) \quad \text{und} \quad h_n(0) = 0$$

eingeführte Funktion  $h_n \in \mathcal{O}(U_{|t_n|}(0))$  ist eindeutig und hat die Reihendarstellung

$$h_n(z) = u_n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k \cdot t_n^k} \quad \text{für alle } z \in U_{|t_n|}(0).$$

*Beweis.* Seien  $h_n$  und  $\tilde{h}_n$  zwei Funktionen, die den beiden obigen Bedingungen genügen. Dann gilt

$$e^{-h_n(z)} = e^{-\tilde{h}_n(z)} \quad \text{für alle } z \in U_{|t_n|}(0).$$

Es gibt also eine ganzzahlige Funktion  $h(z)$  mit

$$h_n(z) = \tilde{h}_n(z) + 2\pi i h(z) \quad \text{für alle } z \in U_{|t_n|}(0).$$

Wegen der Stetigkeit von  $h_n$  und  $\tilde{h}_n$  ist  $h(z)$  auf  $U_{|t_n|}(0)$  konstant, und wegen  $h_n(0) = \tilde{h}_n(0) = 0$  verschwindet  $h(z)$  sogar identisch. Die Eindeutigkeitsaussage haben wir somit bewiesen.

Es gilt

$$\left(1 - \frac{z}{t_n}\right) \in U_1(1) \quad \text{für alle } z \in U_{|t_n|}(0),$$

so dass wir dort den (Hauptzweig des) Logarithmus aus der definierenden Gleichung ziehen können und äquivalent

$$h_n(z) = -u_n \cdot \text{Log}\left(1 - \frac{z}{t_n}\right)$$

erhalten. Die Proposition folgt mit der Taylorreihenentwicklung

$$\text{Log}(1 - w) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k} \quad \text{für alle } w \in U_1(0).^{38}$$

□

**Bemerkung 2.30.** *Will man ein Weierstraß-Produkt zu einer Nullstellenverteilung  $\{u_t\}_{t \in T}$  explizit angeben, so kann man wegen der gleichmäßig absoluten Konvergenz von Taylorreihen innerhalb ihres Konvergenzradiuses für die Polynome  $P_t$  geeignete Partialsummen der Reihen aus Proposition 2.29 wählen.*

**Bemerkung 2.31.** *Wir haben den Weierstraß'schen Produktsatz direkt gezeigt. Man kann ihn aber auch aus dem Satz von Mittag-Leffler herleiten, vgl. Übungsaufgabe 2.2.*

<sup>38</sup>Differenzieren beider Seiten liefert  $-\frac{1}{1-w}$  bzw.  $-\sum_{k=0}^{\infty} w^k$ , so dass sich diese höchstens um eine additive Konstante  $C \in \mathbb{C}$  unterscheiden. Setzt man in beiden Seiten  $w = 0$  ein, so erhält man sofort  $C = 0$ .

**Beispiel 2.32.** (a) Die Nullstellenverteilung  $\{1\}_{t \in T}$  mit  $T = \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$  wird durch

$$f(z) = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

gelöst. Die unbedingte Konvergenz des Produkts folgt hierbei nach Satz 2.25 aus der Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n^2}$  auf Kompakta.

(b) Die Nullstellenverteilung  $\{1\}_{t \in \mathbb{Z}}$  wird durch

$$f(z) = z \cdot \prod_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

gelöst,

*Beweis.* Da die Reihe  $\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{z}{n}$  nicht auf Kompakta absolut konvergiert, müssen wir wie in der obigen Bemerkung explizit Polynome  $P_t$  konstruieren. Der lineare Term von  $h_n$  mit  $n \neq 0$  in der Reihenentwicklung von Proposition 2.29 ist  $\frac{z}{n}$ . Mit der bekannten Taylorentwicklung der Exponentialfunktion gilt

$$\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = \left(1 - \frac{z}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{n} + \frac{1}{2!} \left(\frac{z}{n}\right)^2 + \dots\right) = 1 + \left(\frac{z}{n}\right)^2 \cdot B\left(\frac{z}{n}\right)$$

mit einer holomorphen Funktion  $B \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  mit  $B(0) = -1 + \frac{1}{2!} = -\frac{1}{2}$ . Die unbedingte Konvergenz des linken Produkts aus der Behauptung folgt nun wieder nach Satz 2.25 aus der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{z}{n}\right)^2 B\left(\frac{z}{n}\right)$$

auf Kompakta. Wegen der unbedingten Konvergenz dürfen wir schließlich die Faktoren umsortieren und erhalten so das rechte Produkt aus der Behauptung.  $\square$

(c) Es gilt

$$\sin(\pi z) = \pi z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

*Beweis.* Die Funktion  $\sin(\pi z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  ist bekanntermaßen eine Lösung der Nullstellenverteilung  $\{1\}_{t \in \mathbb{Z}}$ . Für die rechte Seite haben wir dies in (b) gezeigt. Da  $\mathbb{C}$  ein Elementargebiet ist, gibt es nach der Eindeutigkeitsaussage des Produktsatzes 2.26 eine ganze Funktion  $h$  mit

$$e^{h(z)} \cdot \sin(\pi z) = \pi z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass  $h$  identisch verschwindet.

Nach der bekannten Taylorentwicklung des Sinus hat  $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$  in  $z = 0$  eine hebbare Singularität und nimmt dort den Wert 1 an. Werten wir die Gleichung

$$e^{h(z)} \cdot \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \tag{2.15}$$

an der Stelle  $z = 0$  aus, erhalten wir daher  $e^{h(0)} = 1$ , also  $h(0) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ . Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, es gelte  $h(0) = 0$ , und ändern  $h$  sonst um ein geeignetes ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi i$  ab.

Für  $z \in U_1(0)$  sind alle Faktoren im Produkt auf der rechten Seite von (2.15) ungleich Null, so dass wir Satz 2.22 anwenden können. Da für Argumente nahe bei Eins die aus dem Reellen bekannten Logarithmusrechenregeln gelten,<sup>39</sup> gibt es für  $z \in U_r(0)$  mit  $r < 1$  klein eine ganzzahlige Funktion  $t$  mit

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) &\stackrel{2.22}{=} \operatorname{Log}\left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)\right) \\ &= \operatorname{Log}\left(e^{h(z)} \cdot \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}\right) + 2\pi i t(z) \\ &= h(z) + \operatorname{Log}\left(\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}\right) + 2\pi i t(z). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Da die Reihe auf der linken Seite von (2.16) auf Kompakta in  $U_r(0)$  gleichmäßig absolut konvergiert, stellt sie dort eine holomorphe und insbesondere stetige Funktion dar. Es folgt

$$t(z) := t \quad \text{konstant auf } U_r(0).$$

Nach dem Satz von Weierstraß können wir gliedweise ableiten und erhalten für alle  $z \in \dot{U}_r(0)$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2 \frac{z}{n^2}}{1 - \frac{z^2}{n^2}} \\ &= h'(z) + \frac{\frac{\partial}{\partial z} \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}}{\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}} \\ &= h'(z) + \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} \cdot \frac{\pi(\pi z \cos(\pi z) - \sin(\pi z))}{(\pi z)^2} \\ &= h'(z) + \pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt mit der Partialbruchzerlegung des Kotangens (2.5) für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

so dass wir insgesamt

$$h'(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_r(0)$$

erhalten. Nach dem Identitätssatz folgt, dass  $h'$  auf ganz  $\mathbb{C}$  identisch verschwindet und  $h$  somit eine konstante Funktion ist. Die Behauptung folgt wegen  $h(0) = 0$ .  $\square$

<sup>39</sup>Nämlich  $\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w)$  und  $\operatorname{Log}(e^z) = z$ .

## 2.5 Die Gammafunktion

Wir wollen abschließend in diesem Kapitel eine einzelne funktionentheoretische Funktion untersuchen, die als Interpolation der natürlichen Fakultätsfunktion  $n \mapsto n!$  konstruierte  $\Gamma$ -Funktion. Diese hat wichtige Anwendungen in verschiedenen Teilgebieten der Mathematik, liefert etwa in gemeinsamer Verallgemeinerung der Exponentialverteilung und der ERLANG-Verteilung<sup>40</sup> eine in der Warteschlangentheorie verwendete kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung und spielt in der analytischen Zahlentheorie eine zentrale Rolle beim Auffinden der Funktionalgleichungen von durch DIRICHLETreihen<sup>41</sup> gegebenen Funktionen wie der Riemann'schen Zetafunktion. Während unseres Studiums der  $\Gamma$ -Funktion werden wir uns sowohl mit Hauptteilverteilungen (siehe Satz 2.36) als auch mit Nullstellenverteilungen (siehe Proposition 2.38) befassen und so die bisherigen Themen dieses Kapitels wieder aufgreifen.

**Proposition 2.33.** *Durch die Vorschrift*

$$\Gamma(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z (n-1)!}{z \cdot (z+1) \cdot \dots \cdot (z+n-1)}$$

wird eine auf  $D_{-\mathbb{N}} := \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \{0, -1, -2, \dots\}\}$  holomorphe Funktion definiert.<sup>42</sup> Diese heißt  $\Gamma$ -Funktion, die obige Darstellung wird die **GAUSS'sche Produktdarstellung**<sup>43</sup> genannt. Eine alternative Schreibweise ist durch die **EULER'sche Produktdarstellung**<sup>44</sup>

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^z}{1 + \frac{z}{n}} \quad \text{für alle } z \in D_{-\mathbb{N}}$$

gegeben.

*Beweis.* Für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  schreiben wir

$$\Gamma_n(z) := \frac{n^z (n-1)!}{z \cdot (z+1) \cdot \dots \cdot (z+n-1)} \quad \text{für alle } z \in D_{-\mathbb{N}}.$$

Dann gilt

$$\frac{\Gamma_{n+1}(z)}{\Gamma_n(z)} = \frac{\frac{(n+1)^z n!}{z \cdot (z+1) \cdot \dots \cdot (z+n)}}{\frac{n^z (n-1)!}{z \cdot (z+1) \cdot \dots \cdot (z+n-1)}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^z \cdot \frac{n}{z+n} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^z}{1 + \frac{z}{n}} \quad \text{für alle } z \in D_{-\mathbb{N}}.$$

Über ein Teleskopprodukt sind also die Konvergenz der Gaußdarstellung und die Konvergenz der Eulerdarstellung äquivalent. Mit  $\Gamma_1(z) = \frac{1}{z}$  sehen wir, dass sie im Falle der Konvergenz auch die selbe Funktion beschreiben.

<sup>40</sup>Agner Krarup Erlang (1878-1929)

<sup>41</sup>Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

<sup>42</sup>Wir erinnern uns aus Funktionentheorie 1 an die Festsetzung  $x^z = e^{z \log(x)}$  für alle  $x \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $z \in \mathbb{C}$ .

<sup>43</sup>Johann Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

<sup>44</sup>Leonhard Euler (1707-1783)

Zum Beweis der Proposition genügt es also die Konvergenz der Euler'schen Darstellung auf  $D_{-\mathbb{N}}$  zu beweisen. Dafür müssen wir ein wenig ausholen. Für festes  $z \in \mathbb{C}$  ist

$$(1+w)^z = e^{z \operatorname{Log}(1+w)} \quad \text{für alle } w \in U_1(0)$$

holomorph und hat in  $w = 0$  die Taylorreihenentwicklung

$$(1+w)^z = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{z}{\nu} w^\nu \quad \text{für alle } w \in U_1(0)$$

$$\text{mit } \binom{z}{\nu} = \frac{z \cdot (z-1) \cdot \dots \cdot (z-\nu+1)}{\nu!}.^{45}$$

Schreiben wir

$$A(z, w) := \sum_{\nu=2}^{\infty} \binom{z}{\nu} w^{\nu-2} \quad \text{für alle } w \in U_1(0),$$

so folgt

$$(1+w)^z = 1 + zw + A(z, w)w^2 \quad \text{für alle } w \in U_1(0).$$

Nun ist die Funktion  $A(z, w)$  auf Kompakta der Form

$$K_{c_1, c_2} := \overline{U_{c_1}(0)} \times \overline{U_{c_2}(0)} \subseteq \mathbb{C}^2 \quad \text{mit } c_1 \in (0, \infty), c_2 \in (0, 1)$$

beschränkt,

denn: Dort gilt

$$\begin{aligned} |A(z, w)| &\leq \sum_{\nu=2}^{\infty} \left| \binom{z}{\nu} \right| |w|^{\nu-2} \\ &\leq \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{|z| \cdot (|z|+1) \cdot \dots \cdot (|z|+\nu-1)}{\nu!} |w|^{\nu-2} \\ &\leq \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{c_1 \cdot (c_1+1) \cdot \dots \cdot (c_1+\nu-1)}{\nu!} c_2^{\nu-2} \\ &= \sum_{\nu=2}^{\infty} (-1)^\nu \binom{-c_1}{\nu} c_2^{\nu-2} \\ &= \sum_{\nu=2}^{\infty} \binom{-c_1}{\nu} (-c_2)^{\nu-2} \\ &= A(-c_1, -c_2) < \infty, \end{aligned}$$

so dass  $A(z, w)$  auf  $K_{c_1, c_2}$  in der Tat beschränkt ist. #

Sei nun  $K \subseteq D_{-\mathbb{N}}$  kompakt. Dann gilt mit  $w_n := \frac{1}{n}$  mit  $n \in \mathbb{N}_{>1}$

$$(z, w_n) \in \overline{U_{c_1}(0)} \times \overline{U_{c_2}(0)} \quad \text{für alle } z \in K, n > n_0 \in \mathbb{N}_{>1}$$

<sup>45</sup>Das zeigt man induktiv durch sukzessives Ableiten.

für geeignete  $c_1 \in (0, \infty)$  und  $c_2 \in (0, 1)$ . Wir können so die obige Beschränktheit ausnutzen und erhalten für große  $n$ <sup>46</sup>

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{n}} - 1 \right| &= \left| \left(1 + z \frac{1}{n} + A\left(z, \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{n} + O\left(\left(\frac{z}{n}\right)^2\right)\right) - 1 \right| \\ &= \left| \frac{z^2}{n^2} + \left(1 + \frac{z}{n}\right) O\left(\left(\frac{z}{n}\right)^2\right) + A\left(z, \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{z}{n}\right) + A\left(z, \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n^2} O\left(\left(\frac{z}{n}\right)^2\right) \right| \\ &\leq \frac{C}{n^2} \quad \text{mit einem geeigneten } C > 0. \end{aligned}$$

Da  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$  konvergiert, folgt aus dieser Abschätzung nach Satz 2.25 die unbedingte Konvergenz und die Holomorphie des Produkts

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z}{1 + \frac{z}{n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{n+1}(z)}{\Gamma_n(z)} \quad \text{für alle } z \in D_{-\mathbb{N}}.$$

Da jeder Faktor in diesem Produkt ungleich Null ist, gilt nach der Definition der Gammafunktion

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{n+1}(z)}{\Gamma_n(z)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{\Gamma_{n+1}(z)}{\Gamma_n(z)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_{N+1}(z)}{\Gamma_1(z)} = z \Gamma(z) \quad \text{für alle } z \in D_{-\mathbb{N}}$$

und damit die Proposition. □

**Lemma 2.34.** *Es gilt  $\Gamma(1) = 1$  und  $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$  für alle  $z \in D_{-\mathbb{N}}$ .*

*Beweis.*  $\Gamma(1) = 1$  ist klar. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{z+1}(n-1)!}{(z+1) \cdot (z+2) \cdot \dots \cdot (z+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nz}{z+n} \cdot \frac{n^z(n-1)!}{z \cdot (z+1) \cdot \dots \cdot (z+n-1)} \\ &= z \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{z}{n} + 1} \cdot \frac{n^z(n-1)!}{z \cdot (z+1) \cdot \dots \cdot (z+n-1)} = z \cdot \Gamma(z). \end{aligned}$$

□

Induktiv folgt aus dem Lemma sofort

**Korollar 2.35.** *Es gilt  $\Gamma(n) = (n-1)!$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ , die  $\Gamma$ -Funktion interpoliert also die Fakultäten der natürlichen Zahlen.*

**Satz 2.36.**  *$\Gamma(z)$  ist eine meromorphe Funktion in  $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ . Sie ist holomorph in  $D_{-\mathbb{N}}$  und erfüllt*

$$\infty\text{-ord}(\Gamma; -n) = 1 \quad \text{und} \quad \text{res}_{z=-n} \Gamma = \frac{(-1)^n}{n!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

<sup>46</sup>Im ersten Umformungsschritt benötigen wir  $n > c_1$ . Dann gilt  $|\frac{z}{n}| < 1$  für alle  $z \in K$ , so dass wir die geometrische Reihe anwenden können. In der Abschätzung klammern wir  $\frac{1}{n^2}$  aus und verwenden die Beschränktheit der  $A(\cdot, \cdot)$  und das bekannte asymptotische Verhalten der restlichen Ausdrücke auf  $K_{c_1, c_2}$ .

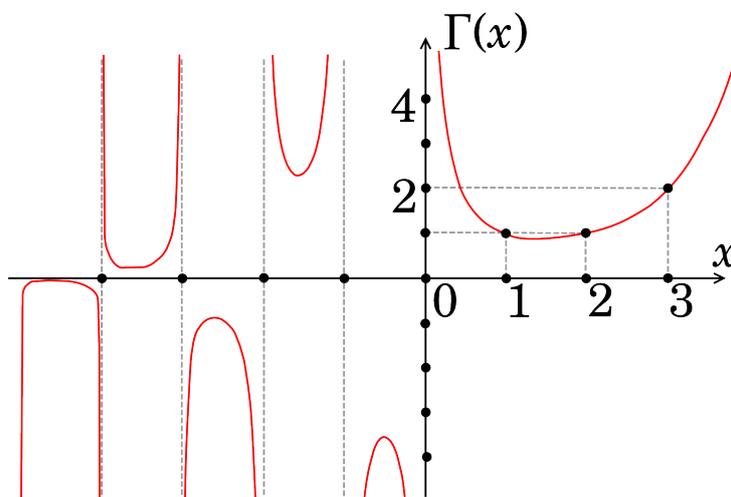


Abbildung 2.1: Der reelle Graph der  $\Gamma$ -Funktion. Gut erkennt man die Polstellen in den nicht-positiven ganzen Zahlen.

*Beweis.* Dass  $\Gamma$  in  $D_{-\mathbb{N}}$  holomorph ist, haben wir schon in Proposition 2.33 gesehen. Per Definition sind somit die Punkte aus  $-\mathbb{N}$  isolierte Singularitäten von  $\Gamma$ .

Nach Lemma 2.34 gilt induktiv für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(z + n + 1) = z \cdot (z + 1) \cdot \dots \cdot (z + n) \cdot \Gamma(z) \quad \text{für alle } z \in D_{-\mathbb{N}}.$$

Uns interessieren besonders die Punkte  $z$  aus einer kleinen punktierten Umgebung  $\dot{U}_r(-n)$  von  $-n$ . Dort folgt nämlich

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + n + 1)}{z \cdot (z + 1) \cdot \dots \cdot (z + n)} = \frac{g(z)}{z + n} \quad \text{mit } g(z) := \frac{\Gamma(z + n + 1)}{z \cdot (z + 1) \cdot \dots \cdot (z + n - 1)}.$$

Für  $r < 1$  ist  $g$  in  $U_r(-n)$  holomorph und erfüllt  $g(-n) \neq 0$ . Nach Definition hat also  $\Gamma(z)$  in  $z = -n$  einen Pol erster Ordnung. Für das Residuum gilt

$$\text{res}_{z=-n} \Gamma = \lim_{z \rightarrow -n} (z + n) \Gamma(z) = g(-n) = \frac{\Gamma(1)}{(-n) \cdot (-n + 1) \cdot \dots \cdot (-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

wie behauptet. □

**Korollar 2.37.** Die Funktion  $\frac{1}{\Gamma(z)}$  hat hebbare Singularitäten in den Punkten  $-n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und ist somit eine ganze Funktion.

*Beweis.* In der Euler'schen Produktdarstellung von  $\Gamma$  auf  $D_{-\mathbb{N}}$  ist jeder Faktor ungleich Null, so dass  $\Gamma$  auf ganz  $D_{-\mathbb{N}}$  keine Nullstelle hat. Es folgt, dass mit  $\Gamma$  auch  $\frac{1}{\Gamma}$  auf  $D_{-\mathbb{N}}$  holomorph ist.

In den Punkten  $-n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  hat  $\Gamma$  einfache Polstellen, so dass  $\frac{1}{\Gamma}$  dort hebbare Singularitäten hat und einfache Nullstellen annimmt. □

**Proposition 2.38.** Die ganze Funktion  $\frac{1}{\Gamma}$  besitzt eine Darstellung

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \cdot e^{\gamma z} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

als Weierstraß-Produkt wie in Satz 2.26. Hierbei bezeichnet

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{v=1}^n \frac{1}{v} - \log n \right) \approx 0,57221$$

die **Euler-MASCHERONI-Konstante**.<sup>47</sup>

*Beweis.* Die reelle Folge  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  mit

$$a_n := \sum_{v=1}^n \frac{1}{v} - \log n$$

ist monoton fallend und nach unten beschränkt, so dass ihr Grenzwert  $\gamma$  existiert und gleich ihrer größten unteren Schranke ist,

denn: Einerseits gilt

$$a_n - a_{n+1} = \left( \sum_{v=1}^n \frac{1}{v} - \log n \right) - \left( \sum_{v=1}^{n+1} \frac{1}{v} - \log(n+1) \right) = -\frac{1}{n+1} + \log \frac{n+1}{n},$$

andererseits aber auch

$$\log \frac{n+1}{n} = \int_1^{\frac{n+1}{n}} \frac{dt}{t} \geq \int_1^{\frac{n+1}{n}} \frac{n}{n+1} dt = \left( \frac{n+1}{n} - 1 \right) \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

und somit  $a_n \geq a_{n+1}$  für alle  $n \geq 1$ , so dass  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  monoton fällt. Wegen

$$\sum_{v=1}^n \frac{1}{v} = \sum_{v=1}^n \int_v^{v+1} \frac{dt}{v} \geq \sum_{v=1}^n \int_v^{v+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \log(n+1) > \log n$$

ist außerdem  $a_n > 0$  für alle  $n \geq 1$ , so dass  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  durch Null nach unten beschränkt ist. #

Durch Multiplikation mit einer komplexen Variablen und anschließendem Exponieren erhalten wir

$$\frac{n^z}{\exp\left(z \cdot \sum_{v=1}^n \frac{1}{v}\right)} = e^{-a_n z} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\gamma z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \quad (2.17)$$

Daher folgt für alle  $z \in D_{-\mathbb{N}}$

$$z \cdot \Gamma(z) = \Gamma(z+1)$$

<sup>47</sup>Lorenzo Mascheroni (1750-1800)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{z+1}(n-1)!}{(z+1) \cdot (z+2) \cdot \dots \cdot (z+n)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z}{\exp(z \cdot \sum_{v=1}^n \frac{1}{v})} \cdot \frac{\exp(z \cdot \sum_{v=1}^n \frac{1}{v}) \cdot n!}{(z+1) \cdot (z+2) \cdot \dots \cdot (z+n)} \\
&\stackrel{(2.17)}{=} e^{-\gamma z} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(z \cdot \sum_{v=1}^n \frac{1}{v})}{(1 + \frac{z}{1}) \cdot (1 + \frac{z}{2}) \cdot \dots \cdot (1 + \frac{z}{n})} \\
&= e^{-\gamma z} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{v=1}^n \frac{e^{\frac{z}{v}}}{1 + \frac{z}{v}}.
\end{aligned}$$

Da die Faktoren des Produkts rechts allesamt nicht Null sind, erhalten wir daraus für alle  $z \in D_{-\mathbb{N}}$  die Produktdarstellung wie verlangt.

Für  $z \in -\mathbb{N}$  ist die Produktdarstellung trivialerweise richtig, da beide Seiten den Wert Null annehmen: Für die linke Seite haben wir das in Satz 2.36 gezeigt, und für die rechte Seite ist das offensichtlich.  $\square$

**Satz 2.39** (Euler'scher Ergänzungssatz). *Es gilt*

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

*Beweis.* Wegen  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  gilt auch

$$\Gamma(1-z) = \Gamma(1+(-z)) = (-z)\Gamma(-z).$$

Mit der Weierstraß'schen Darstellung 2.38 von  $\frac{1}{\Gamma}$  folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} &= \frac{1}{\Gamma(z)} \cdot \frac{1}{-z\Gamma(-z)} \\
&= \left( z \cdot e^{\gamma z} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right) \cdot \frac{1}{-z} \cdot \left( (-z) \cdot e^{-\gamma z} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \right) \\
&= z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Der Satz folgt demnach mit der Darstellung des Sinus als Weierstraßprodukt, die wir in Teil (c) von Beispiel 2.32 gezeigt haben.  $\square$

**Bemerkung 2.40.** *Es gilt  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .*

*denn: Mit dem Ergänzungssatz 2.39 gilt*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \pi.$$

Die Behauptung folgt durch Wurzelziehen, da wir etwa Euler'schen Produktdarstellung der Gammafunktion entnehmen können, dass  $\Gamma(\frac{1}{2})$  eine positive reelle Zahl ist.  $\#$

**Lemma 2.41.** Die  $\Gamma$ -Funktion ist in jedem abgeschlossenen Vertikalstreifen

$$S_a^b := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \in [a, b]\}$$

mit  $0 < a \leq b$  beschränkt.<sup>48</sup>

*Beweis.* Für  $N \in \mathbb{N}$  und  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  gelten bekanntermaßen

$$|N^z| = |e^{(x+iy)\log N}| = e^{x\log N} = N^x, \quad (2.18)$$

$$\operatorname{Re}(z) = x \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|. \quad (2.19)$$

Aus der Gauß'schen Darstellung 2.33 der  $\Gamma$ -Funktion folgt somit

$$\begin{aligned} |\Gamma(z)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^z (n-1)!}{z \cdot (z+1) \cdot \dots \cdot (z+n-1)} \right| \\ &\stackrel{(2.18)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x (n-1)!}{|z \cdot (z+1) \cdot \dots \cdot (z+n-1)|} \\ &\stackrel{(2.19)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x (n-1)!}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)} \\ &= \Gamma(x). \end{aligned}$$

Als stetige Funktion ist  $\Gamma(x)$  auf dem Kompaktum  $[a, b]$  beschränkt, und die Behauptung folgt.  $\square$

**Satz 2.42** (WIELANDT<sup>49</sup>). Sei  $D \subseteq D_{-\mathbb{N}}$  ein Gebiet, das den abgeschlossenen Vertikalstreifen  $S_1^2$  enthält. Sei weiter  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion mit

- (i)  $f$  ist auf  $S_1^2$  beschränkt.
- (ii)  $f(z+1) = z f(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z, z+1 \in D$ .

Dann gilt

$$f(z) = f(1) \Gamma(z) \quad \text{für alle } z \in D.$$

*Beweis.* Zu zeigen ist, dass die holomorphe Funktion

$$h(z) := f(z) - f(1) \Gamma(z) \quad \text{für alle } z \in D$$

identisch verschwindet. Nach Konstruktion und Lemma 2.41 erfüllt auch  $h$  die Voraussetzungen (i) und (ii) des Satzes und lässt sich daher zu einer holomorphen Funktion in  $\mathcal{O}(\mathbb{C})$  fortsetzen,

<sup>48</sup>Mit Lemma 2.34 zeigt man leicht, dass das Lemma auch für Vertikalstreifen mit  $a \leq b < 0$  gilt, wenn das zugehörige Intervall  $[a, b]$  keine ganze Zahl enthält (Übung!).

<sup>49</sup>Der Satz wurde 1939 von Helmut Wielandt (1910-2001) gezeigt und ist eine Verallgemeinerung des entsprechenden reellen Satzes von HARALD AUGUST BOHR (1887-1951) und JOHANNES MOLLERUP (1872-1937) aus dem Jahr 1922.

denn: Durch die Vorschrift  $h(z+1) := zh(z)$  lässt sich  $h$  sukzessive holomorph auf die Gebiete

$$D+k := \{z+k \mid z \in D\} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

fortsetzen. Genauso wird  $h$  durch die Vorschrift  $h(z) := \frac{h(z+1)}{z}$  sukzessive meromorph auf die Gebiete

$$D-k := \{z-k \mid z \in D\} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

fortgesetzt, mit Polstellen höchstens in  $z = -n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Wegen

$$h(z) = \frac{h(z+n+1)}{z \cdot (z+1) \cdot \dots \cdot (z+n)} = \frac{h(z+n+1)}{z \cdot (z+1) \cdot \dots \cdot (z+n-1)} \cdot \frac{1}{z+n} \quad \text{für alle } z \in D_{-\mathbb{N}}$$

liegt in  $z = -n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  höchstens eine Polstelle erster Ordnung vor. Für das zugehörige Residuum gilt

$$\operatorname{res}_{z=-n} h = \frac{(-1)^n}{n!} h(1) = \frac{(-1)^n}{n!} (f(1) - f(1)\Gamma(1)) = 0.$$

Insgesamt erhalten wir daher wie verlangt  $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ . #

Weiter ist  $h$  auch auf dem Streifen  $S_0^1$  beschränkt,

denn: Auf der kompakten Menge der  $z \in S_0^1$  mit  $|\operatorname{Im}(z)| \leq 1$  folgt das aus der Stetigkeit von  $h$ , und für  $z \in S_0^1$  mit  $|\operatorname{Im}(z)| > 1$  wegen  $h(z) = \frac{h(z+1)}{z}$  aus der Beschränktheit von  $h$  in  $S_1^2$ . #

Da  $h(1-z)$  und  $h(z)$  in  $S_0^1$  den selben Wertevorrat haben, ist auch die ganze Funktion

$$H(z) := h(z)h(1-z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

auf  $S_0^1$  beschränkt. Die Funktionalgleichung von  $h$  impliziert ferner

$$H(z+1) = -H(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Folglich ist  $H$  auf ganz  $\mathbb{C}$  beschränkt und also konstant nach dem Satz von Liouville. Wegen  $H(1) = h(1)h(0) = 0$  gilt  $H(z) = 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Es folgt, dass  $h$  in  $\mathbb{C}$  überabzählbar viele Nullstellen hat und somit nach dem Identitätssatz identisch verschwindet, was zu zeigen war.  $\square$

**Satz 2.43** (LEGENDRE'sche Duplikationsformel<sup>50</sup>). *Es gilt*

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{1-z} \Gamma(z) \quad \text{für alle } z \in D_{-\mathbb{N}}.$$

*Beweis.* Zum Beweis wollen wir den Satz von Wielandt 2.42 benutzen. Offenbar ist  $D_{-\mathbb{N}}$  ein Gebiet in  $D_{-\mathbb{N}}$ , das den Streifen  $S_1^2$  enthält. Außerdem ist die Funktion

$$f: \begin{cases} D_{-\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ z & \mapsto 2^{z-1} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) \end{cases}$$

<sup>50</sup>Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

nach Konstruktion (bzw. Lemma 2.41) auf  $D_{-\mathbb{N}}$  holomorph und auf  $S_1^2$  beschränkt. Schließlich gilt mit der Funktionalgleichung der Gammafunktion

$$f(z+1) = 2^z \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right) = 2^z \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) \frac{z}{2} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) = z f(z).$$

Wir können also den Satz von Wielandt 2.42 auf  $f$  anwenden und erhalten mit Bemerkung 2.40

$$f(z) = f(1) \Gamma(z) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1) \Gamma(z) = \sqrt{\pi} \Gamma(z).$$

Die Duplikationsformel folgt sofort, wenn wir die Definition von  $f$  einsetzen.  $\square$

**Lemma 2.44.** *Das uneigentliche Integral*

$$\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

ist für  $\operatorname{Re}(z) > 0$  absolut konvergent.

*Beweis.* Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  mit  $x > 0$  fest gewählt. Dann gilt für jedes  $A \in (0, 1)$

$$\int_A^1 |t^{z-1} e^{-t}| dt \stackrel{(2.18)}{=} \int_A^1 t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_A^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} A^x \leq \frac{1}{x}$$

und für jedes  $B \in (1, \infty)$

$$\int_1^B |t^{z-1} e^{-t}| dt \stackrel{(2.18)}{=} \int_1^B t^{x-1} e^{-t} dt \leq C \cdot \int_1^B e^{-\frac{t}{2}} dt = C \cdot (2e^{-\frac{1}{2}} - 2e^{-\frac{B}{2}}) \leq 2Ce^{-\frac{1}{2}},$$

wobei wir  $C$  so wählen, dass  $t^{x-1} \leq Ce^{\frac{t}{2}}$  gilt.<sup>51</sup>

Aus der reellen Analysis wissen wir, dass wegen der obigen Abschätzungen die Grenzwerte

$$\lim_{A \rightarrow 0} \int_A^1 |t^{z-1} e^{-t}| dt \quad \text{und} \quad \lim_{B \rightarrow \infty} \int_1^B |t^{z-1} e^{-t}| dt$$

existieren, was äquivalent zur Behauptung des Lemmas ist.  $\square$

**Proposition 2.45.** *Es gilt die Euler'sche Integraldarstellung*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

*Beweis.* Im Beweis schreiben wir kurz

$$D := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\} \quad \text{und} \quad f(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{für alle } z \in D.$$

Wir wollen den Satz von Wielandt 2.42 benutzen und müssen also zeigen, dass  $f$  den dortigen Voraussetzungen genügt.

<sup>51</sup>Da die reelle Exponentialfunktion für  $t$  gegen  $\infty$  schneller wächst als jedes Polynom, ist dies offensichtlich möglich.

- Zunächst ist offensichtlich  $D$  ein Gebiet in  $D_{-\mathbb{N}}$ , das den Streifen  $S_1^2$  enthält.
- Weiter ist  $f$  auf  $D$  holomorph,  
denn: Für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  ist

$$f_n(z) := \int_{\frac{1}{n}}^n t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{für alle } z \in D$$

nach der Leibniz'schen Regel holomorph. Mit der selben Abschätzung wie in Lemma 2.44 zeigt man, dass die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$  auf Kompakta gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Nach dem Satz von Weierstraß ist  $f$  somit holomorph. #

- $f$  ist auf  $S_1^2$  beschränkt,  
denn: Es gilt

$$|f(z)| \leq \int_0^\infty |t^{z-1} e^{-t}| dt \stackrel{(2.18)}{=} \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^\infty e^{(x-1) \log t} e^{-t} dt.$$

Wegen  $0 \leq t \leq 1$  und  $1 \leq x$  gilt für das erste Integral auf der rechten Seite

$$\int_0^1 e^{(x-1) \log t} e^{-t} dt \leq \int_0^1 e^0 e^{-t} dt = \int_0^1 e^{-t} dt < \infty.$$

Wegen  $1 \leq t$  und  $x \leq 2$  gilt für das zweite Integral auf der rechten Seite

$$\int_1^\infty e^{(x-1) \log t} e^{-t} dt \leq \int_1^\infty e^{\log t} e^{-t} dt = \int_1^\infty t e^{-t} dt < \infty,$$

wie man mit partieller Integration einsieht. #

- $f(z+1) = z f(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z, z+1 \in D$ ,  
denn: Mit partieller Integration gilt

$$f(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = [t^z (-e^{-t})]_0^\infty - \int_0^\infty z t^{z-1} (-e^{-t}) dt = [t^z (-e^{-t})]_0^\infty + z f(z).$$

Wegen  $t^z e^{-t} = e^{z \log t - t}$  gilt

$$[t^z (-e^{-t})]_0^\infty = 0 - 0 = 0,$$

so dass die Behauptung folgt. #

Mit dem Satz von Wielandt 2.42 folgt dann  $f(z) = f(1)\Gamma(z)$  auf  $D$ . Die Proposition ergibt sich schließlich mit

$$f(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 0 - (-1) = 1.$$

□

## Übungsaufgaben

**Aufgabe 2.1.** Zeigen Sie, dass die Reihe  $\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$  auf Kompakta  $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  gleichmäßig absolut konvergiert.

**Aufgabe 2.2.** Leiten Sie den Weierstraß'schen Produktsatz 2.26 aus dem Satz von Mittag-Leffler 2.8 her, indem Sie die folgenden Aussagen zeigen.

- (a)  $f$  ist genau dann eine Lösung der Nullstellenverteilung  $\{u_t\}_{t \in T} := (\emptyset, \{u_t\}_{t \in T})$  auf  $\mathbb{C}$ , wenn  $\frac{f'}{f}$  eine Lösung der Hauptteilverteilung  $\{h_t(z) = u_t z\}_{t \in T}$  auf  $\mathbb{C}$  ist.
- (b) Zu jeder meromorphen Funktion  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ , deren Pole alle einfach sind und positive ganzzahlige Residuen haben, gibt es eine ganze Funktion  $g$  mit  $f = \frac{g'}{g}$ .

**Hinweis:** Für jedes  $R > 0$  findet man eine auf  $U_R(0)$  definierte holomorphe Funktion  $g_R$  mit  $f = \frac{g'_R}{g_R}$  auf  $U_R(0)$ . Dabei ist  $g_R$  eindeutig bestimmt bis auf einen Faktor aus  $\mathbb{C}^\times$ . Durch geeignetes Abändern können die  $g_R$  mit  $R \in \mathbb{N}$  zu einer ganzen Funktion zusammengesetzt werden.

- (c) Die Lösbarkeit der Nullstellenverteilung  $\{u_t\}_{t \in T}$  in  $\mathbb{C}$  folgt nun mit dem Satz von Mittag-Leffler 2.8.

**Aufgabe 2.3.** Zeigen Sie  $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \pi$ .

**Aufgabe 2.4.** Zeigen Sie: In Verallgemeinerung von Legendres Duplikationsformel 2.43 gilt<sup>52</sup>

$$\prod_{v=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{z+v}{n}\right) = (\sqrt{2\pi})^{n-1} n^{\frac{1}{2}-z} \Gamma(z) \quad \text{für alle } z \in D_{-\mathbb{N}}.$$

<sup>52</sup>Dieses Ergebnis wurde 1812, und somit nur drei Jahre nach der Duplikationsformel, von Gauß bewiesen. Diese Konstellation ergab sich wiederholt: Legendre leistete wichtige Beiträge auf vielen verschiedenen Gebieten der Mathematik, die aber häufig schon zu seinen Lebzeiten von denen des 25 Jahre jüngeren Gauß übertroffen wurden. Letzterer arbeitete fast auf den selben Gebieten wie Legendre, drang häufig aber tiefer vor. Legendre erkannte die Beiträge von Gauß an und berücksichtigte sie auch in der stark überarbeiteten zweiten Auflage seiner Zahlentheorie von 1808, beklagte sich aber gleichzeitig bitter darüber, dass Gauß umgekehrt alle Prioritäten für sich in Anspruch nahm. (Quelle: Wikipedia)

---

## Elliptische Funktionen

---

Historischer Ausgangspunkt für die Theorie der elliptischen Funktionen sind die so genannten *elliptischen Integrale*, also durch Integrale der Form

$$E(x) := \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} \quad \text{mit } P \text{ Polynom vom Grad 3 oder 4 ohne mehrfache Nullstellen}$$

gegebene reelle Funktionen, die bei der Berechnung der Länge von Ellipsenbögen auftreten. Solche Integrale sind ohne numerische Hilfsmittel nur schwer auszuwerten, so dass ihre Berechnung lange Zeit ein großes Problem darstellte. Im Jahr 1827 fand Abel heraus, dass ein elliptisches Integral  $E$  unter den richtigen Umständen eine Umkehrfunktion besitzt, die sich zu meromorphen Funktion  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$  mit zwei unabhängigen Perioden fortsetzen lässt. Eine solche Funktion  $f$  nennt man heute eine elliptische Funktion. Es stellte sich heraus, dass sich die meisten tiefliegenden Sätze über elliptische Integrale recht leicht aus der (sehr viel schöneren) Theorie der elliptischen Funktionen herleiten lassen, so dass die Theorie der elliptischen Integrale aus heutiger Sicht als ein Korollar der Theorie der elliptischen Funktionen erscheint.<sup>53</sup>

Wir werden in diesem Kapitel einen weiteren Schritt gehen und in Abschnitt 3.2 die Menge der elliptischen Funktionen (mit festgehaltenen Perioden) als die Menge der meromorphen Abbildungen auf einer geeigneten Riemann'schen Fläche, dem in Abschnitt 3.1 eingeführten Periodentorus, interpretieren. Aus der bloßen Definition ist zunächst einmal nicht klar, ob es denn außer den konstanten Funktionen überhaupt elliptische Funktionen gibt. Diese Frage beantworten wir in Abschnitt 3.3, indem wir mit der Weierstraß'schen  $\wp$ -Funktion ein konkretes Beispiel für eine nichtkonstante elliptische Funktion angeben. In Abschnitt 3.4 zeigt sich, dass wir alle elliptischen Funktionen durch die  $\wp$ -Funktion beschreiben können.

Die Frage nach der Lösbarkeit von Mittag-Leffler-Verteilungen und Cousin-Verteilungen auf Periodentori behandeln wir in den Abschnitten 3.2 und 3.5.

---

<sup>53</sup>Aus Zeitgründen werden wir elliptische Integrale in dieser Vorlesung nicht behandeln.

### 3.1 Tori

In diesem Abschnitt wollen wir eine Klasse weiterer Riemann'scher Flächen einführen, auf denen wir holomorphe Funktionen studieren wollen. Für die Konstruktion derselben holen wir ein wenig aus.

**Definition 3.1.** Seien  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  zwei über  $\mathbb{R}$  linear unabhängige komplexe Zahlen. Dann heißt

$$\Lambda := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 := \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$$

das von  $\omega_1$  und  $\omega_2$  aufgespannte **Gitter** und  $\{\omega_1, \omega_2\}$  eine **Basis** von  $\Lambda$ . Offensichtlich lässt sich ein beliebiger Punkt  $z \in \mathbb{C}$  schreiben als Summe  $z = \bar{z} + \omega$  mit einem  $\omega \in \Lambda$  und einem  $\bar{z}$  aus der **Fundamentalmasche**

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}_\Lambda := \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \mid t_1, t_2 \in [0, 1]\}$$

des Gitters  $\Lambda$ . Diese Schreibweise ist eindeutig, falls  $\bar{z}$  nicht auf dem Rand  $\partial\mathcal{F}$  von  $\mathcal{F}$  liegt. Wir erhalten eine Überdeckung

$$\mathbb{C} = \bigcup_{\omega \in \Lambda} (\mathcal{F}_\Lambda + \omega)$$

der komplexen Ebene mit Kopien der Fundamentalmasche.<sup>54</sup>

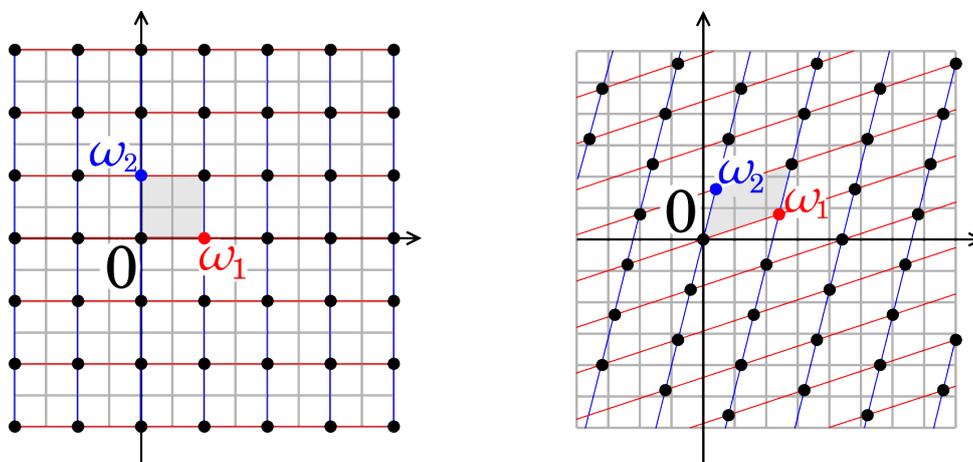


Abbildung 3.1: Zwei Gitter, jeweils mit markierter Fundamentalmasche. Im ersten Fall ist  $\omega_1 = 1$  und  $\omega_2 = i$ , im zweiten Fall  $\omega_1 = \frac{6}{5} + \frac{2}{5}i$  und  $\omega_2 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}i$ .

<sup>54</sup>Diese Überdeckung wird überschneidungsfrei und somit eine Parkettierung, wenn man statt der Fundamentalmasche  $\mathcal{F}$  die halboffene Menge

$$\{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \mid t_1, t_2 \in [0, 1)\}$$

betrachtet. Dass wir dennoch die abgeschlossene Menge als Fundamentalmasche festlegen, liegt zum einen daran, dass so die „Verklebung“ des Fundamentalbereichs zu einem Torus (vgl. Definition 3.4 bis Satz 3.6) etwas konzeptioneller ausfällt, weil so klar ist, womit ein Randpunkt verklebt werden soll. Zum anderen lässt sich aber auch die Analogie zur Definition 4.8 des Fundamentalbereichs für die Aktion geeigneter Gruppen auf der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$  besser herstellen.

**Bemerkung 3.2.** Zwei  $\mathbb{R}$ -Basen  $\{\omega_1, \omega_2\}$  und  $\{\omega'_1, \omega'_2\}$  von  $\mathbb{C}$  sind genau dann Basen des selben Gitters  $\Lambda$ , wenn es eine Matrix

$$M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} \mid \det(A) \in \{\pm 1\}\}$$

gibt mit

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix},$$

denn: Übungsaufgabe 3.1

#

**Bemerkung 3.3.** Ein beliebiges Gitter  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  bildet zusammen mit der Addition eine Untergruppe der abelschen Gruppe  $(\mathbb{C}, +)$ . Es folgt, dass der Quotient

$$\mathbb{C}/\Lambda := \{z + \Lambda \mid z \in \mathbb{C}\}$$

mit der vererbten Addition wieder die Struktur einer abelschen Gruppe trägt. Konstruktionsgemäß ist hierbei für ein beliebiges  $z \in \mathbb{C}$  die Menge  $[z] := [z]_\Lambda := z + \Lambda$  die Äquivalenzklasse unter der durch

$$z \sim_\Lambda z' :\iff z - z' \in \Lambda$$

gegebenen Äquivalenzrelation und  $\mathbb{C}/\Lambda$  die Menge solcher Äquivalenzklassen. Durchläuft  $z$  ein nicht näher spezifiziertes Vertretersystem der Äquivalenzklassen von  $\mathbb{C}/\Lambda$ , so schreiben wir in Missbrauch der Notation manchmal auch  $z \in \mathbb{C}/\Lambda$ .

**Definition 3.4.** Sei  $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subseteq \mathbb{C}$  ein beliebiges Gitter. Dann heißt der Quotient  $\mathbb{C}/\Lambda$  aus Bemerkung 3.3 der **Periodentorus** zu den, gemäß Bemerkung 3.2 nicht eindeutigen, **Perioden**  $\omega_1$  und  $\omega_2$  und die Abbildung

$$\pi := \pi_\Lambda : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda, \\ z & \mapsto [z]_\Lambda \end{cases}$$

die **kanonische Projektion modulo  $\Lambda$** .

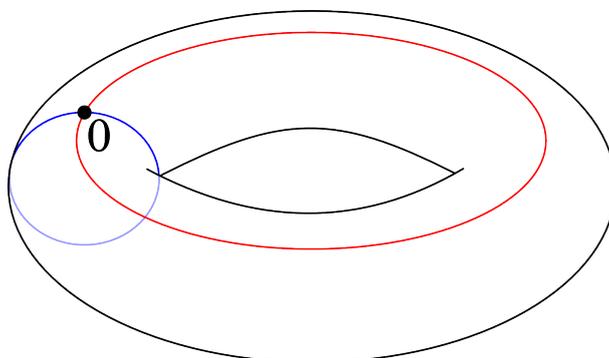


Abbildung 3.2: Den Periodentorus  $\mathbb{C}/\Lambda$  kann man sich in der Form eines Doughnuts vorstellen. Die eingezeichneten Linien in **rot** und **blau** lassen die Fundamentalmasche  $\mathcal{F}_\Lambda$  wie in Abbildung 3.1 erkennen.

Wir wollen nun für ein beliebiges Gitter  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  den Torus  $\mathbb{C}/\Lambda$  mit der Struktur einer Riemann'schen Fläche versehen. Zuerst müssen wir dafür eine Topologie auf  $\mathbb{C}/\Lambda$  angeben. Wir nutzen dabei aus, dass wir auf  $\mathbb{C}$  mit der Standardtopologie bereits eine Topologie kennen und versehen  $\mathbb{C}/\Lambda$  mit der **Quotiententopologie** bezüglich der kanonischen Projektion  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ . Genauer bedeutet das

$$U \subseteq \mathbb{C}/\Lambda \text{ ist offen} \iff \pi^{-1}(U) \text{ ist offen in } \mathbb{C}.$$

Auf diese Weise wird  $\pi$  automatisch zu einer stetigen Abbildung. Andererseits ist  $\pi$  auch offen, denn: Es ist zu zeigen, dass das Bild  $\pi(V)$  einer beliebigen offenen Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{C}$  offen ist. Nach Definition der Quotiententopologie genügt es, stattdessen die Offenheit von  $\pi^{-1}(\pi(V))$  zu zeigen. Diese gilt aber, weil letzteres die Vereinigung der offenen Mengen  $\omega + V$  mit  $\omega \in \Lambda$  beliebig ist. #

Für den Torus lassen sich damit die folgenden Eigenschaften herleiten.

**Lemma 3.5.** Für ein beliebiges Gitter  $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subseteq \mathbb{C}$  ist der Torus  $\mathbb{C}/\Lambda$  ein kompakter Hausdorffraum.

*Beweis.* Die Kompaktheit gilt, da  $\mathbb{C}/\Lambda$  das Bild des Kompaktums  $\mathcal{F}$  unter der stetigen Abbildung  $\pi$  ist.

Wir müssen nun noch die Hausdorffeigenschaft zeigen. Seien dafür  $w_1, w_2$  zwei verschiedene Punkte in  $\mathbb{C}/\Lambda$ , und seien  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  zwei Zahlen mit  $\pi(z_j) = w_j$  für  $j \in \{1, 2\}$ . Ohne Einschränkung können wir dabei annehmen, dass  $z_2 - z_1$  in der Fundamentalmasche  $\mathcal{F}$  liegt. Da  $\mathbb{C}$  Hausdorff'sch ist, gibt es offene Umgebungen  $U_1$  von  $z_1$  und  $U_2$  von  $z_2$  mit  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Dann gilt trivialerweise  $w_1 \in \pi(U_1)$  und  $w_2 \in \pi(U_2)$ . Ohne Einschränkung können wir außerdem annehmen,  $U_1$  und  $U_2$  seien offene Kreisscheiben, deren Radius kleiner ist als die Hälfte des Minimums der Beträge  $|z_2 - z_1|, |z_2 - (z_1 + \omega_1)|, |z_2 - (z_1 + \omega_2)|$  und  $|z_2 - (z_1 + \omega_1 + \omega_2)|$ .

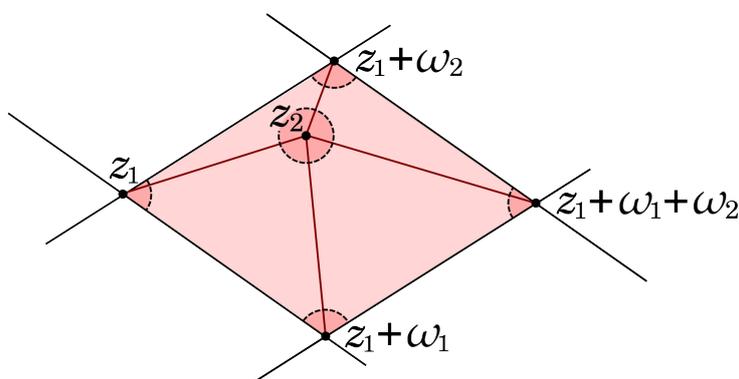


Abbildung 3.3: Die Umgebungen um  $z_1$  und  $z_2$  sind so klein gewählt, dass ihr Radius kleiner ist als die Hälfte des minimalen Abstands zwischen  $z_2$  und einer der vier „Ecken“ der um  $z_1$  verschobenen Fundamentalmasche.

Dann gilt auch  $\pi(U_1) \cap \pi(U_2) = \emptyset$ . Wegen der Offenheit von  $\pi$  sind schließlich  $\pi(U_1)$  und  $\pi(U_2)$  auch offen, so dass wir offene Umgebungen von  $w_1$  und  $w_2$  gefunden haben, durch die sich die beiden Punkte trennen lassen. #

□

**Satz 3.6.** Für ein beliebiges Gitter  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  ist der Torus  $\mathbb{C}/\Lambda$  eine kompakte Riemann'sche Fläche.

*Beweis.* Nach Lemma 3.5 und Korollar 1.14 genügt es zum Beweis des Satzes irgendeinen konformen Atlas für  $\mathbb{C}/\Lambda$  anzugeben. Das machen wir wie folgt. Sei  $V \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge, die kein Paar voneinander verschiedener modulo  $\Lambda$  äquivalenter Punkte enthält. Wegen dieser Eigenschaft und der Stetigkeit und der Offenheit von  $\pi$  ist  $\pi|_V : V \rightarrow \pi(V) =: U$  ein Homöomorphismus und seine Umkehrabbildung  $\varphi : U \rightarrow V$  eine Karte von  $\mathbb{C}/\Lambda$ . Die Menge  $\mathcal{A}$  aller Karten, die sich so erhalten lassen, ist offensichtlich ein komplexer Atlas von  $\mathbb{C}/\Lambda$ . Es verbleibt also zu zeigen, dass je zwei Karten aus  $\mathcal{A}$  konform verträglich sind.

Seien also  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  und  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  zwei Karten aus  $\mathcal{A}$ . Wir wollen die Konformität der Funktion

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

zeigen. Tatsächlich ist für  $i \in \{1, 2\}$  auf  $\varphi_i(U_1 \cap U_2) \subseteq V_i$  der Homöomorphismus  $\pi$  invers zur Karte  $\varphi_i$ , so dass

$$\pi((\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z)) = \varphi_1^{-1}(z) = \pi(z) \quad \text{für alle } z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$$

gilt. Es folgt

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z) \sim_{\Lambda} z \quad \text{für alle } z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2),$$

also

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z) - z \in \Lambda \quad \text{für alle } z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2).$$

Eine stetige Abbildung hat genau dann ein Bild aus isolierten Punkten, wenn sie lokal konstant ist. Es gibt also zu jeder Zusammenhangskomponente  $K$  von  $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$  ein  $\omega \in \Lambda$  mit

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z) = z + \omega \quad \text{für alle } z \in K.$$

Insbesondere ist  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  lokal eine Translation und als solche konform, was zu zeigen war. □

### 3.2 Der Begriff der elliptischen Funktion und die Liouville'schen Sätze

**Definition 3.7.** Sei  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  ein Gitter. Unter einer **elliptischen Funktion** bezüglich  $\Lambda$  versteht man eine meromorphe Funktion  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$  mit

$$f(z + \omega) = f(z) \quad \text{für alle } \omega \in \Lambda \text{ und alle } z \in \mathbb{C}.$$

Die Menge der elliptischen Funktionen bezüglich  $\Lambda$  bezeichnen wir mit  $K(\Lambda)$ .

**Bemerkung 3.8.** Sei  $\{\omega_1, \omega_2\}$  eine Basis von  $\Lambda$ . Dann lässt sich jeder Gitterpunkt  $\omega \in \Lambda$  schreiben als  $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$  mit  $m, n \in \mathbb{Z}$ , und eine meromorphe Funktion  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$  ist offenbar genau dann elliptisch bezüglich  $\Lambda$ , wenn

$$f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

gilt. Aus diesem Grund nennt man elliptische Funktionen manchmal auch **doppeltperiodische Funktionen**.

**Bemerkung 3.9.** Für  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  mit  $f(z_0) = w_0$  gilt auch  $f(z_0 + \omega) = w_0$  für alle  $\omega \in \Lambda$ . Es ist daher sinnvoll, von  $w_0$ -**Stellen** (und insbesondere Null- oder Polstellen) **modulo**  $\Lambda$  zu sprechen.

**Satz 3.10.** Jede bezüglich eines Gitters  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  elliptische Funktion  $f \in K(\Lambda)$  induziert durch  $f = F \circ \pi$  eine meromorphe Funktion  $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ . Die Zuordnung  $f \mapsto F$  liefert eine Bijektion

$$K(\Lambda) \cong \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda).$$

*Beweis.* Dass die einer elliptischen Funktion  $f$  zugeordnete Funktion  $F$  wohldefiniert ist, folgt aus der  $\Lambda$ -Invarianz von  $f$ , und die Meromorphie von  $F$  folgt aus der Definition der komplexen Struktur von  $\mathbb{C}/\Lambda$ . Gehen wir umgekehrt von einer meromorphen Funktion  $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$  aus, so ist die Komposition  $f = F \circ \pi$  offenbar eine bezüglich  $\Lambda$  elliptische Funktion. Die behauptete Zuordnung ergibt also in beide Richtungen Sinn und liefert offensichtlich eine Bijektion zwischen den Mengen  $K(\Lambda)$  und  $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ .  $\square$

**Bemerkung 3.11.** Die Menge  $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$  zusammen mit punktweiser Addition und Multiplikation ist nach Bemerkung 1.28 ein Körper. Auch auf  $K(\Lambda)$  lassen sich punktweise Addition und Multiplikation einführen. Offensichtlich gelten dann für alle  $F_1, F_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$  die Rechenregeln

$$\begin{aligned} ((F_1 + F_2) \circ \pi)(z) &= ((F_1 \circ \pi) + (F_2 \circ \pi))(z) && \text{für alle } z \in \mathbb{C}, \\ ((F_1 \cdot F_2) \circ \pi)(z) &= ((F_1 \circ \pi) \cdot (F_2 \circ \pi))(z) && \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Schreiben wir  $1_X$  für die durch  $f(z) = 1$  gegebene konstante Abbildung auf  $X \in \{\mathbb{C}, \mathbb{C}/\Lambda\}$ , so gilt außerdem

$$1_{\mathbb{C}/\Lambda} \circ \pi = 1_{\mathbb{C}},$$

so dass insgesamt die Zuordnung  $F \mapsto F \circ \pi$  ein Körperhomomorphismus und insbesondere  $K(\Lambda)$  ein Körper ist.

**Korollar 3.12.** Jede nicht-surjektive elliptische Funktion ist konstant.

*Beweis.* Nach Satz 3.10 entsprechen die nicht-surjektiven elliptischen Funktionen gerade den nicht-surjektiven Funktionen aus  $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ . Nach Satz 3.6 ist die Riemann'sche Fläche  $\mathbb{C}/\Lambda$  kompakt, so dass wir Satz 1.36 anwenden können, woraus sofort die Behauptung folgt.  $\square$

Ein berühmter Spezialfall hiervon ist

**Korollar 3.13** (1. Liouville'scher Satz).<sup>55</sup> Jede holomorphe elliptische Funktion ist konstant.

<sup>55</sup>Dieser lässt sich auch direkt aus dem Satz von Liouville folgern.

Die Korollare liefern notwendige Bedingungen für elliptische Funktionen, was uns dabei helfen sollte, diese zu klassifizieren oder auch nur ein nichtkonstantes Beispiel für eine elliptische Funktion zu finden. In Hinsicht auf Satz 3.10 liegt es nahe, zum Auffinden weiterer derartiger Bedingungen die Lösbarkeit von Mittag-Leffler-Verteilungen bzw. Cousin-Verteilungen auf Tori zu untersuchen.

**Satz 3.14** (2. Liouville'scher Satz). Für ein  $f \in K(\Lambda)$  gilt  $\sum_{z \in \mathbb{C}/\Lambda} \text{res}_z f = 0$ .

**Bemerkung 3.15.** Man kann auch in Punkten auf Tori eine Laurententwicklung einführen und wie in Lemma 2.3 zeigen, dass eine Lösung einer Mittag-Leffler-Verteilung nichts anderes als eine Lösung einer geeigneten Hauptteilverteilung  $\{h_s\}_{s \in S}$  ist. Der 2. Liouville'sche Satz 3.14 besagt nun, dass eine solche Hauptteilverteilung nur dann eine Lösung haben kann, wenn die Summe der  $(-1)$ -ten Koeffizienten der  $h_s$  verschwindet. Mit dem SERRE'schen Dualitätssatz<sup>56</sup> kann man zeigen, dass diese Bedingung nicht nur notwendig sondern auch hinreichend ist.

*Beweis von Satz 3.14.* Für ein beliebiges Vertretersystem der Polstellen modulo  $\Lambda$  von  $f$  ist die Summe auf der linken Seite endlich,

*denn:* Hätte  $f$  unendlich viele Polstellen modulo  $\Lambda$ , so lägen in der Fundamentalmasche  $\mathcal{F}$  unendlich viele Polstellen von  $f$ .  $\mathcal{F}$  ist kompakt und somit insbesondere beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hätte  $S(f)$  dann also einen Häufungspunkt in  $\mathcal{F}$ , was nach dem Identitätssatz 1.24 nicht sein kann. #

Für je zwei Vertretersysteme nimmt die Summe auf der linken Seite den selben Wert an,

*denn:* Für ein beliebiges  $z_0 \in \mathbb{C}$  und ein beliebiges  $\omega \in \Lambda$  ist die Laurententwicklung von  $f(z)$  um  $z_0 + \omega$  gleich

$$\sum_{n \geq N} a_n (z - (z_0 + \omega))^n = \sum_{n \geq N} a_n ((z - \omega) - z_0)^n,$$

also gleich der Laurententwicklung von  $f(z - \omega) = f(z)$  um  $z_0$ . Insbesondere ist

$$\text{res}_{z_0} f = \text{res}_{z_0 + \omega} f,$$

woraus die verlangte Wohldefiniertheit folgt. #

Die Funktion  $f$  hat in der Fundamentalmasche  $\mathcal{F}$  nur endlich viele Polstellen, so dass wir nach Verschieben um ein geeignetes  $z_0 \in \mathbb{C}$  annehmen können, dass auf dem Rand von

$$\mathcal{F}_{z_0} := \mathcal{F} + z_0 = \{z + z_0 \mid z \in \mathcal{F}\}$$

keine Polstellen von  $f$  liegen. Zum Beweis des Satzes genügt es dann

$$\sum_{z \in \mathcal{F}_{z_0}} \text{res}_z f = 0$$

---

<sup>56</sup>Jean-Pierre Serre, geb. 1926

zu zeigen, denn das Innere  $\mathring{\mathcal{F}}_{z_0}$  von  $\mathcal{F}_{z_0}$  enthält so nach Konstruktion von jeder Polstelle von  $f$  modulo  $\Lambda$  genau einen Repräsentanten. Wenden wir den Residuensatz an, erhalten wir

$$2\pi i \sum_{z \in \mathring{\mathcal{F}}_{z_0}} \operatorname{res}_z f = \int_{\partial \mathcal{F}_{z_0}} f(z) dz,$$

wobei  $\partial \mathcal{F}_{z_0}$  genau einmal im mathematisch positiven Sinne durchlaufen werde. Schreiben wir nun  $\Lambda = \mathbb{Z} \omega_1 + \mathbb{Z} \omega_2$ , so lässt sich die rechte Seite schreiben als

$$\int_{z_0}^{z_0+\omega_1} f(z) dz + \int_{z_0+\omega_1}^{z_0+\omega_1+\omega_2} f(z) dz + \int_{z_0+\omega_1+\omega_2}^{z_0+\omega_2} f(z) dz + \int_{z_0+\omega_2}^{z_0} f(z) dz$$

Die Behauptung folgt nun, wenn man im dritten Integral  $z \mapsto z + \omega_2$  und im vierten Integral  $z \mapsto z - \omega_1$  substituiert,

denn: Es ist dann das vierte Integral wegen

$$\begin{aligned} \int_{z_0+\omega_2}^{z_0} f(z) dz &= \int_{z_0+\omega_1+\omega_2}^{z_0+\omega_1} f(z - \omega_1) d(z - \omega_1) \\ &= \int_{z_0+\omega_1+\omega_2}^{z_0+\omega_1} f(z) dz = - \int_{z_0+\omega_1}^{z_0+\omega_1+\omega_2} f(z) dz \end{aligned}$$

gleich dem Negativen des zweiten und analog das dritte gleich dem Negativen des ersten. #

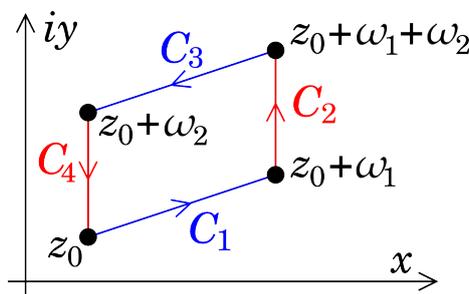


Abbildung 3.4: Die Integrale über je zwei gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms heben sich wegen der Doppelperiodizität von  $f$  auf.

□

Aus dem Satz folgt unmittelbar

**Korollar 3.16.** Für kein Gitter  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  gibt es eine elliptische Funktion  $f \in K(\Lambda)$ , deren einzige Polstelle modulo  $\Lambda$  eine einfache ist. Insbesondere sind die Riemann'schen Flächen  $\mathbb{C}/\Lambda$  und  $\overline{\mathbb{C}}$  nicht konform äquivalent.

**Satz 3.17** (3. Liouville'scher Satz). Für ein nichtkonstantes  $f \in K(\Lambda)$  hängt die positive ganze Zahl

$$\operatorname{ord}(f) := \sum_{z \in \mathbb{C}/\Lambda} z_0\text{-ord}(f; z) \quad \text{mit } z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$$

nicht von  $z_0$  ab. Man nennt  $\operatorname{ord}(f)$  die **Ordnung** der elliptischen Funktion  $f$ .

*Beweis.* Das ist ein Spezialfall von Proposition 1.43.<sup>57</sup> □

**Satz 3.18** (4. Liouville'scher Satz). *Für ein nichtkonstantes  $f \in K(\Lambda)$  mit Polstellenmenge  $S_\Lambda(f)$  modulo  $\Lambda$  und Nullstellenmenge  $T_\Lambda(f)$  modulo  $\Lambda$  gilt*

- (a)  $S_\Lambda(f)$  und  $T_\Lambda(f)$  sind disjunkte endliche Mengen.
- (b)  $\sum_{s \in S_\Lambda(f)} \infty\text{-ord}(f; s) = \sum_{t \in T_\Lambda(f)} 0\text{-ord}(f; t)$ .
- (c)  $\sum_{s \in S_\Lambda(f)} \infty\text{-ord}(f; s) \cdot s \equiv \sum_{t \in T_\Lambda(f)} 0\text{-ord}(f; t) \cdot t \pmod{\Lambda}$ .

**Bemerkung 3.19.** *Nach Lemma 2.16 ist eine Lösung einer Cousin-Verteilung auf  $\mathbb{C}/\Lambda$  nichts anderes als eine Lösung einer geeigneten Null- und Polstellenverteilung  $(\{u_s\}_{s \in S_\Lambda}, \{u_t\}_{t \in T_\Lambda})$ . In Hinsicht auf Satz 3.10 besagt nun der 4. Liouville'sche Satz 3.18, dass eine solche Null- und Polstellenverteilung nur dann eine Lösung haben kann, wenn*

- (a)  $S_\Lambda$  und  $T_\Lambda$  sind disjunkte endliche Mengen.
- (b)  $\sum_{s \in S_\Lambda} u_s = \sum_{t \in T_\Lambda} u_t$ .
- (c)  $\sum_{s \in S_\Lambda} u_s \cdot s = \sum_{t \in T_\Lambda} u_t \cdot t$  als Gleichung in  $\mathbb{C}/\Lambda$ .

gelten. In Satz 3.38 werden wir zeigen, dass diese Bedingung nicht nur notwendig sondern auch hinreichend ist.

*Beweis von Satz 3.18.* Behauptung (a) ist klar wegen der Kompaktheit von  $\mathbb{C}/\Lambda$ , und Behauptung (b) sind die Spezialfälle  $z_0 = 0$  und  $z_0 = \infty$  des 3. Liouville'schen Satzes 3.17.

Zum Beweis von Behauptung (c) benötigen wir die folgende Verallgemeinerung des Satzes vom Null- und Polstellen zählenden Integral.

<sup>57</sup>Man kann diesen Satz auch leicht direkt aus dem 2. Liouville'schen Satz 3.14 folgern:

*Direkter Beweis von Satz 3.17.* Die Summe ist für alle  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  endlich,

denn: Für  $z_0 = \infty$  haben wir das schon im Beweis des 2. Liouville'schen Satzes 3.14 gezeigt. Der Beweis für  $z_0 \in \mathbb{C}$  geht analog, da die Nullstellenmenge der meromorphen Funktion  $f(z) - z_0$  nur aus isolierten Punkten besteht. #

Wie im Beweis des 2. Liouville'schen Satzes 3.14 zeigt man außerdem, dass die Summierung unabhängig von der Wahl des Vertretersystems modulo  $\Lambda$  ist.

Sei nun  $z_0 \in \mathbb{C}$  fest gewählt. Da  $f$  nicht konstant ist, liegt  $\frac{f'}{f-z_0}$  in  $K(\Lambda)$ , so dass wir den 2. Liouville'schen Satz 3.14 darauf anwenden können und

$$0 = \sum_{z \in \mathbb{C}/\Lambda} \text{res}_z \frac{f'}{f-z_0} = \sum_{z \in \mathbb{C}/\Lambda} \text{res}_z \frac{(f-z_0)'}{f-z_0}$$

erhalten. Der Satz folgt, wenn wir wie im Beweis des Satzes vom Null- und Polstellen zählenden Integral

$$\begin{aligned} \text{res}_z \frac{(f-z_0)'}{f-z_0} &= 0\text{-ord}(f-z_0; z) - \infty\text{-ord}(f-z_0; z) \\ &= z_0\text{-ord}(f; z) - \infty\text{-ord}(f; z) \end{aligned}$$

schreiben. □

**Lemma 3.20.** Sei  $D$  ein Elementargebiet und  $f \in \mathcal{M}(D)$  meromorph mit endlicher Nullstellenmenge  $T(f)$  und endlicher Polstellenmenge  $S(f)$ . Sei weiter  $g \in \mathcal{O}(D)$  holomorph und  $C$  eine stückweise glatte, geschlossene Kurve in  $D \setminus (T(f) \cup S(f))$ . Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z) f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{t \in T(f)} \chi(C; t) \cdot 0\text{-ord}(f; t) \cdot g(t) - \sum_{s \in S(f)} \chi(C; s) \cdot \infty\text{-ord}(f; s) \cdot g(s).$$

Der Beweis des Lemmas funktioniert genauso wie im in Funktionentheorie 1 bewiesenen Spezialfall  $g \equiv 1$  (Übung!).

Da  $f$  modulo  $\Lambda$  nur endlich viele Null- und Polstellen hat, können wir durch Abändern derselben modulo  $\Lambda$  wieder erreichen, dass diese allesamt im Inneren  $\mathcal{F}_{z_0}^*$  des Translats  $\mathcal{F}_{z_0}$  der Fundamentalmasche um ein geeignetes  $z_0 \in \mathbb{C}$  liegen. Wenden wir nun Lemma 3.20 mit  $g(z) = z$  an. Dann folgt

$$\sum_{t \in T_\Lambda(f)} 0\text{-ord}(f; t) \cdot t - \sum_{s \in S_\Lambda(f)} \infty\text{-ord}(f; s) \cdot s = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{F}_{z_0}} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz,$$

wobei  $\partial \mathcal{F}_{z_0}$  genau einmal im mathematisch positiven Sinne durchlaufen werde. In der Notation aus Abbildung 3.4 wird die rechte Seite zu

$$\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{C_1} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz + \int_{C_2} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz + \int_{C_3} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz + \int_{C_4} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz \right).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{C_4} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz &= - \int_{C_2} \frac{(z - \omega_1) f'(z - \omega_1)}{f(z - \omega_1)} d(z - \omega_1) \\ &= - \int_{C_2} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz + \omega_1 \int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{C_2} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz + \int_{C_4} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz \right) = \frac{\omega_1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Die rechte Seite ist ein ganzzahliges Vielfaches von  $\omega_1$ ,

denn: Nach Voraussetzung hat  $f$  auf dem Geradenstück  $C_2$  keine Null- und Polstellen. Als Kompaktum ist  $C_2$  in einem kleinen offenen Rechteck  $R$ , also einem Elementargebiet, enthalten, auf dem  $f$  keine Null- und Polstellen hat. Es gibt daher eine auf  $R$  holomorphe Funktion  $h$  mit  $f(z) = e^{h(z)}$  für alle  $z \in R$ . Es folgt

$$f'(z) = h'(z) e^{h(z)} = h'(z) f(z) \quad \text{für alle } z \in R,$$

insbesondere ist  $h$  auf  $R$  eine Stammfunktion von  $\frac{f'}{f}$ . Mit den Rechenregeln für Kurvenintegrale folgt

$$\int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{z_0 + \omega_1}^{z_0 + \omega_1 + \omega_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = h(z_0 + \omega_1 + \omega_2) - h(z_0 + \omega_1).$$

Da nach Definition von  $h$

$$e^{h(z_0+\omega_1+\omega_2)} = f(z_0 + \omega_1 + \omega_2) = f(z_0 + \omega_1) = e^{h(z_0+\omega_1)}$$

gilt, erhalten wir wie verlangt

$$\int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in 2\pi i \mathbb{Z}.$$

#

Analog zeigt man

$$\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{C_1} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz + \int_{C_3} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz \right) \in \mathbb{Z}\omega_2,$$

woraus dann der Satz folgt.  $\square$

### 3.3 Die Weierstraß'sche $\wp$ -Funktion

Wir haben mit den Liouville'schen Sätzen eine Vielzahl von notwendigen Bedingungen für die Existenz von elliptischen Funktionen bezüglich eines Gitters  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  bewiesen, kennen aber außer den konstanten Funktionen noch immer kein konkretes Beispiel für ein Element von  $K(\Lambda)$ . Das Ziel dieses Abschnitts ist es, diesen Missstand zu beheben. Wir werden sogar mehr leisten und mit Satz 3.34 eine sehr explizite Beschreibung von  $K(\Lambda)$  liefern.

Um uns die Schreibarbeit zu erleichtern sei in diesem Kapitel ab sofort stets  $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subseteq \mathbb{C}$  ein fest gewähltes Gitter. Außerdem werden wir kurz  $\sum'_{\omega \in \Lambda}$  anstelle von  $\sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}}$  schreiben.

**Lemma 3.21.** Sei  $r > 2$ . Dann ist  $\sum'_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{|\omega|^r}$  endlich.

*Beweis.* Wir betrachten

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto \left| \frac{x\omega_1 + y\omega_2}{xi+y} \right|^r. \end{cases}$$

Diese Funktion hat die folgenden Eigenschaften.

- $f(x,y) > 0$  für alle  $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , denn  $\{\omega_1, \omega_2\}$  ist über  $\mathbb{R}$  linear unabhängig.
- $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und alle  $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .
- $f$  nimmt auf dem Kompaktum  $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  sein Minimum an, ist dort also durch eine Konstante  $C > 0$  nach unten beschränkt.

Erinnern wir uns an die Polarkoordinatendarstellung in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  und wenden diese drei Eigenschaften von  $f$  an, so erhalten wir

$$f(x,y) \geq C \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Diese Abschätzung gilt natürlich insbesondere für  $(x, y) = (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , so dass wir

$$\frac{1}{|m\omega_1 + n\omega_2|^r} \leq \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{|mi + n|^r}$$

erhalten. Nach dem Majorantenkriterium folgt also das Lemma, wenn wir

$$\sum'_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{|mi + n|^r} < \infty$$

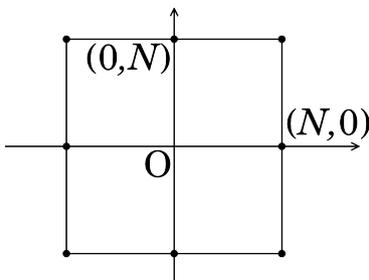
zeigen können. Hierbei haben wir die euklidische Norm  $|mi + n| = \sqrt{m^2 + n^2}$  verwendet. Das müssen wir jedoch nicht, da in  $\mathbb{R}^2$  alle Normen äquivalent sind. Insbesondere dürfen wir statt der euklidischen die *Maximumsnorm*

$$\|(x, y)\|_\infty := \max\{|x|, |y|\}$$

verwenden, und es genügt

$$\sum'_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{\|(m, n)\|_\infty^r} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{|\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid \|(x, y)\|_\infty = N\}|}{N^r} < \infty$$

zu zeigen. Wie man der Abbildung



entnimmt, gilt hierbei  $|\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid \|(x, y)\|_\infty = N\}| = 8N$ .

Das Lemma folgt, da für  $r > 2$

$$8 \cdot \sum_{N=1}^{\infty} N^{1-r} < \infty$$

gilt. □

**Proposition 3.22.** Die Reihe

$$\wp(z) := \wp_\Lambda(z) := \frac{1}{z^2} + \sum'_{\omega \in \Lambda} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

ist auf Kompakta in  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  gleichmäßig absolut konvergent und definiert eine gerade holomorphe Funktion auf  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  mit Polstellen der Ordnung 2 in den Punkten aus  $\Lambda$ .<sup>58</sup>

*Beweis.* Sei  $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \Lambda$  kompakt und gelte  $|z| \leq R$  für alle  $z \in K$ . Sei außerdem  $\omega \in \Lambda$  mit  $|\omega| > 2R$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| &= \left| \frac{\omega^2 - (z-\omega)^2}{\omega^2 (z-\omega)^2} \right| \\ &= \left| \frac{\omega^2 - (z^2 - 2z\omega + \omega^2)}{\omega^2 (z-\omega)^2} \right| \\ &= \left| \frac{z(z-2\omega)}{\omega^2 (z-\omega)^2} \right| \\ &= \frac{|z| \cdot |z-2\omega|}{|\omega|^2 \cdot |z-\omega|^2}. \end{aligned}$$

Wir schätzen die Faktoren einzeln ab. Es gilt

- $|z| \leq R$  nach Voraussetzung.
- $|z-2\omega| \leq |z| + 2|\omega| \leq R + 2|\omega| < \frac{|\omega|}{2} + 2|\omega| = \frac{5}{2}|\omega|$ .
- $|z-\omega|^2 \geq (|\omega| - |z|)^2 \geq (|\omega| - R)^2 \geq (|\omega| - \frac{|\omega|}{2})^2 = \frac{1}{4}|\omega|^2$ ,

wobei wir bei der zweiten Abschätzung beachten, dass wegen unserer Wahl von  $z$  und  $\omega$  die Ungleichung  $|z| \leq R \leq 2R \leq |\omega|$  gilt.

Eingesetzt in unsere ursprüngliche Gleichung ergibt sich

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| \leq \frac{R \cdot \frac{5}{2}|\omega|}{|\omega|^2 \cdot \frac{1}{4}|\omega|^2} = \frac{10R}{|\omega|^3}.$$

<sup>58</sup>Wie kommt man darauf, gerade diese Reihe zu studieren? Folgender Ansatz liegt zugrunde: Nach den Liouville'schen Sätzen sind die elliptischen Funktionen von Ordnung 0 konstant und die von Ordnung 1 nichtexistent. Es ist also naheliegend, eine elliptische Funktion von Ordnung 2 zu suchen. Jetzt muss man ein bisschen raten und sucht nach einer elliptischen Funktion von Ordnung 2, die in allen Gitterpunkten einen Pol zweiter Ordnung besitzt. Wie man meromorphe Funktionen aus  $\mathcal{M}(\mathbb{C})$  mit gegebenen Anforderungen an ihre Hauptteile konstruiert, ist uns aus dem Satz von Mittag-Leffler 2.8 bekannt. Wenn wir noch berücksichtigen, dass aufgrund der Elliptizität die Hauptteile in allen Gitterpunkten gleich sein müssen, dann erscheint es vielversprechend, nach einer Lösung der durch

$$h_\omega(z) = z^2 \quad \text{für alle } \omega \in \Lambda$$

gegebenen Hauptteilverteilung  $\{h_\omega\}_{\omega \in \Lambda}$  zu suchen. Da die Reihe

$$\sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^2},$$

nicht absolut konvergiert,<sup>59</sup> fügen wir nach dem „Kochrezept“ aus Abschnitt 2.1 noch konvergenzerzeugende Summanden an und erhalten schließlich die Reihe  $\wp$  als Lösung der Hauptteilverteilung.

<sup>59</sup>Im Spezialfall  $z = 0$  und  $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$  ist das im Beweis von Lemma 3.21 mit erledigt worden.

Nach Lemma 3.21 ist daher die Reihe auf  $K$  gleichmäßig absolut konvergent. Mit dem Satz von Weierstraß folgern wir sofort, dass  $\wp(z)$  auf  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  holomorph ist.

Mit  $\omega$  durchläuft auch  $-\omega$  ganz  $\Lambda$  einfach, so dass

$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{\omega \in \Lambda} \left( \frac{1}{(-z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{\omega \in \Lambda} \left( \frac{1}{(-z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = \wp(z)$$

und also die Geradheit von  $\wp(z)$  gilt.

Dass  $\wp$  in den Punkten von  $\Lambda$  doppelte Polstellen hat, kann leicht aus der Definition abgelesen werden. In der Tat ist der Hauptteil von  $\wp$  in  $z = \omega \in \Lambda$  gerade  $\frac{1}{(z-\omega)^2}$ .  $\square$

**Definition 3.23.** Die meromorphe Funktion  $\wp \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$  heißt die **Weierstraß'sche  $\wp$ -Funktion**.

**Proposition 3.24.** Es gilt

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3}.$$

Die Funktion  $\wp'$  ist ungerade und liegt in  $K(\Lambda)$ .

*Beweis.* Nach dem Satz von Weierstraß können wir  $\wp(z)$  gliedweise ableiten. Das führt zu

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - 2 \sum'_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3} = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda.$$

Ganz ähnlich wie im Beweis von Proposition 3.22 zeigt man, dass diese Reihe absolut konvergiert.

Sei nun  $\omega_0 \in \Lambda$ . Dann gilt

$$\wp'(z + \omega_0) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z + \omega_0 - \omega)^3} = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - (\omega - \omega_0))^3} = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3} = \wp'(z),$$

wobei wir in der vorletzten Gleichheit verwendet haben, dass mit  $\omega$  auch  $\omega - \omega_0$  ganz  $\Lambda$  einfach durchläuft.<sup>60</sup> Es folgt  $\wp' \in K(\Lambda)$ .

Die Ungeradheit von  $\wp'(z)$  zeigt man analog zur Geradheit von  $\wp(z)$  in Proposition 3.22 oder folgert sie daraus, dass die Ableitung einer geraden Funktion stets ungerade ist.  $\square$

**Proposition 3.25.**  $\wp$  liegt in  $K(\Lambda)$ , und es gilt  $\text{ord}(\wp) = 2$ .

*Beweis.* Nach Proposition 3.24 gilt

$$\wp'(z + \omega_j) - \wp'(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda \text{ und } j \in \{1, 2\}.$$

<sup>60</sup>Das ist ein Spezialfall der allgemeineren Tatsache, dass jede Gruppe durch Translation einfach transitiv auf sich selbst operiert.

Die Ableitung der holomorphen Funktion  $\wp(z + \omega_j) - \wp(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \Lambda)$  mit  $j \in \{1, 2\}$  ist also konstant Null. Da  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  ein Gebiet ist, gilt

$$\wp(z + \omega_j) - \wp(z) = C_j \in \mathbb{C} \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda \text{ und } j \in \{1, 2\}.$$

Betrachten wir nun speziell  $z = -\frac{\omega_j}{2} \notin \Lambda$ . Dann folgt

$$C_j = \wp\left(\frac{\omega_j}{2}\right) - \wp\left(-\frac{\omega_j}{2}\right) = \wp\left(\frac{\omega_j}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega_j}{2}\right) = 0 \text{ für } j \in \{1, 2\}.$$

$\text{ord}(\wp) = 2$  ist klar, da  $\wp$  in den Gitterpunkten Pole zweiter Ordnung hat und ansonsten holomorph ist.  $\square$

**Proposition 3.26.** Die Funktion  $\wp(z)$  hat um  $z = 0$  die Laurententwicklung

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \geq 1} (2n+1)G_{2n+2}z^{2n} \text{ für alle } z \in U_\varrho(0)$$

mit  $\varrho := \min\{|\omega| \mid \omega \in \Lambda \setminus \{(0,0)\}\}$ , wobei mit

$$G_k := G_k(\Lambda) := \sum'_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{\omega^k}$$

die so genannten **homogenen EISENSTEINREIHEN**<sup>61</sup> zu  $\Lambda$  vom Gewicht  $k$  bezeichnet seien.

*Beweis.* Es gilt

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + g(z) \text{ mit } g(z) := \sum'_{\omega \in \Lambda} \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \in \mathcal{O}(U_\varrho(0)).$$

Sukzessives Ableiten ergibt

$$g^{(n)}(z) = (-1)^n (n+1)! \sum'_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^{2+n}} \in \mathcal{O}(U_\varrho(0)) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Insbesondere gilt daher

$$\begin{aligned} g^{(n)}(0) &= (-1)^n (n+1)! \sum'_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(-\omega)^{2+n}} \\ &= (n+1)! \sum'_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{\omega^{2+n}} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ (n+1)! G_{2+n} & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Taylor erhalten wir

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

<sup>61</sup>Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823-1851)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n \geq 2 \text{ gerade}} (n+1) G_{2+n} z^n && \text{(Beachte } g(0) = 0) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) G_{2n+2} z^{2n}
\end{aligned}$$

und somit die Proposition. □

**Satz 3.27** (Differentialgleichung der  $\wp$ -Funktion). *In  $K(\Lambda)$  gilt die Gleichung*

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

mit den Weierstraßkonstanten

$$g_2 := g_2(\Lambda) := 60 G_4(\Lambda) \quad \text{und} \quad g_3 := g_3(\Lambda) := 140 G_6(\Lambda)$$

des Gitters  $\Lambda$ .

*Beweis.* Nach Proposition 3.26 gilt für alle  $z \in U_\rho(0)$

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3 G_4 z^2 + 5 G_6 z^4 + \dots \quad \text{und} \quad \wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6 G_4 z + 20 G_6 z^3 + \dots$$

Das können wir nutzen, um die Hauptteile und die konstanten Terme der einzelnen Summanden in der Differentialgleichung zu berechnen. Wie man jeweils durch Ausmultiplizieren der bekannten Reihen sieht, gilt für alle  $z \in U_\rho(0)$

$$\begin{aligned}
\wp'(z)^2 &= 4z^{-6} - 24 G_4 z^{-2} - 80 G_6 + \dots, \\
4\wp(z)^3 &= 4z^{-6} + 36 G_4 z^{-2} + 60 G_6 + \dots, \\
g_2\wp(z) &= 60 G_4 z^{-2} + 0 + \dots
\end{aligned}$$

Zusammengefasst folgt

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + g_2\wp(z) = -140 G_6 + \dots = -g_3 + \dots \quad \text{für alle } z \in U_\rho(0).$$

Das bedeutet, dass die Funktion  $(\wp')^2 - 4\wp^3 + g_2\wp \in K(\Lambda)$  in  $z = 0$  eine hebbare Singularität hat und den Wert  $-g_3$  annimmt. Sie lässt sich daher holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$  fortsetzen. Nach dem ersten Liouville'schen Satz 3.13 gilt daher in  $K(\Lambda)$  die Identität

$$(\wp')^2 - 4\wp^3 + g_2\wp = -g_3,$$

womit wir den Satz gezeigt haben. □

**Korollar 3.28.** *Sei  $\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$ , und sei weiter  $e_j := \wp(\frac{\omega_j}{2})$  für  $j \in \{1, 2, 3\}$ . Dann gilt in  $K(\Lambda)$  die Gleichung*

$$(\wp')^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3).$$

*Beweis.* Weil  $\wp'$  ungerade und  $\omega_j$ -periodisch für  $j \in \{1, 2, 3\}$  ist, gilt

$$-\wp'\left(\frac{\omega_j}{2}\right) = \wp'\left(-\frac{\omega_j}{2}\right) = \wp'\left(\frac{\omega_j}{2}\right) = 0 \quad \text{für alle } j \in \{1, 2, 3\}.$$

Nach Satz 3.27 sind also  $e_1, e_2, e_3$  Nullstellen des kubischen Polynoms  $4X^3 - g_2X - g_3 \in \mathbb{C}[X]$ . Das Korollar folgt, wenn wir zeigen können, dass  $e_1, e_2, e_3$  paarweise verschieden sind.

Für ein beliebiges  $j \in \{1, 2, 3\}$  gilt nach dem obigen

$$\wp\left(\frac{\omega_j}{2}\right) - e_j = 0 \quad \text{und} \quad \wp'\left(\frac{\omega_j}{2}\right) = 0.$$

Die Funktion  $\wp - e_j$  hat also in  $\frac{\omega_j}{2}$  eine Nullstelle mindestens zweiter Ordnung. Für  $\wp$  haben wir somit

$$e_j\text{-ord}\left(\wp; \frac{\omega_j}{2}\right) \geq 2 \quad \text{für alle } j \in \{1, 2, 3\}$$

gezeigt. Nehmen wir nun an, es gälte  $e_i = e_j$  für ein Paar  $(i, j)$  mit  $i \neq j$ . Dann folgte sofort

$$e_i\text{-ord}\left(\wp; \frac{\omega_i}{2}\right) \geq 2 \quad \text{und} \quad e_i\text{-ord}\left(\wp; \frac{\omega_j}{2}\right) \geq 2.$$

Andererseits sind nach Voraussetzung  $\frac{\omega_i}{2}$  und  $\frac{\omega_j}{2}$  modulo  $\Lambda$  verschieden, so dass wir  $\text{ord}(\wp) \geq 4$  erhielten, was im Widerspruch zu Proposition 3.25 steht.  $\square$

### 3.4 Der Struktursatz

Die Weierstraß'sche  $\wp$ -Funktion und ihre Ableitung  $\wp'$  sind unsere ersten nichttrivialen Beispiele für elliptische Funktionen. Wie wir in diesem Abschnitt einsehen wollen, spielen sie eine zentrale Rolle bei der Klassifikation derselben. Da die entsprechenden Resultate körpertheoretisch formuliert sind, wollen wir uns zunächst ein paar algebraische Grundbegriffe in Erinnerung rufen.

Sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper. Eine Teilmenge  $k \subseteq K$ , für die  $(k, +)$  eine Untergruppe von  $(K, +)$  ist und  $(k \setminus \{0\}, \cdot)$  eine Untergruppe von  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ , trägt ausgestattet mit der eingeschränkten Addition und der eingeschränkten Multiplikation selbst wieder die Struktur eines Körpers. Man nennt eine solche Teilmenge einen **Teilkörper** von  $K$  und  $K/k$  eine **Körpererweiterung**. Offensichtlich kann man  $K$  zusammen mit der Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} k \times K &\rightarrow K \\ (\lambda, a) &\mapsto \lambda \cdot a \end{aligned}$$

als einen  $k$ -Vektorraum auffassen. Man nennt  $[K : k] := \dim_k(K)$  den **Körpergrad** von  $K/k$ .

**Beispiel 3.29.** (a)  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$  ist Körpererweiterung vom Grad  $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ , denn  $\{1, i\}$  ist eine  $\mathbb{R}$ -Basis von  $\mathbb{C}$ .

(b)  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  ist Körpererweiterung vom Grad  $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$ , denn  $\pi \in \mathbb{R}$  ist transzendent.

(c)  $K(\Lambda)/\mathbb{C}$  ist Körpererweiterung vom Grad  $[K(\Lambda) : \mathbb{C}] = \infty$ , denn alle Potenzen  $\wp^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  sind  $\mathbb{C}$ -linear unabhängig.

Seien  $(K, +_K, \cdot_K)$  und  $(K', +_{K'}, \cdot_{K'})$  Körper mit Nullelementen  $0_K$  bzw.  $0_{K'}$  und Einselementen  $1_K$  bzw.  $1_{K'}$ . Eine Abbildung  $\varphi : K \rightarrow K'$  heißt ein **Körperhomomorphismus**, wenn sie für alle  $a, b \in K$  die Rechenregeln

- (i)  $\varphi(a +_K b) = \varphi(a) +_{K'} \varphi(b)$ ,
- (ii)  $\varphi(a \cdot_K b) = \varphi(a) \cdot_{K'} \varphi(b)$ ,
- (iii)  $\varphi(1_K) = 1_{K'}$

erfüllt. Ein Körperhomomorphismus  $\varphi : K \rightarrow K'$  ist stets injektiv,

denn: Wir müssen zeigen, dass für je zwei  $a, b \in K$  aus  $\varphi(a) = \varphi(b)$  stets  $a = b$  folgt. Zunächst gilt

$$\varphi(0_K) = \varphi(0_K +_K 0_K) \stackrel{(i)}{=} \varphi(0_K) +_{K'} \varphi(0_K)$$

und also  $\varphi(0_K) = 0_{K'}$ . Daraus folgt für ein beliebiges  $a \in K$

$$\varphi(a) +_{K'} \varphi(-a) \stackrel{(i)}{=} \varphi(a +_K (-a)) = \varphi(0_K) = 0_{K'}$$

und somit  $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ . Für beliebige  $a, b \in K$  wenden wir dies an zu

$$\begin{aligned} \varphi(a) = \varphi(b) &\iff \varphi(a) -_{K'} \varphi(b) = 0_{K'} \\ &\iff \varphi(a) +_{K'} \varphi(-b) = 0_{K'} \\ &\stackrel{(i)}{\iff} \varphi(a +_K (-b)) = 0_{K'} \\ &\iff \varphi(a -_K b) = 0_{K'}. \end{aligned}$$

Es langt für unsere Behauptung also  $\varphi^{-1}(\{0_{K'}\}) = \{0_K\}$  zu zeigen.

Sei dafür  $a \in K \setminus \{0_K\}$ . Dann gibt es ein Element  $a^{-1} \in K \setminus \{0_K\}$  mit  $a \cdot_K a^{-1} = a^{-1} \cdot_K a = 1_K$ .<sup>62</sup> Für dieses gilt

$$\varphi(a^{-1}) \cdot_{K'} \varphi(a) \stackrel{(ii)}{=} \varphi(a^{-1} \cdot_K a) = \varphi(1_K) \stackrel{(iii)}{=} 1_{K'}.$$

Es folgt wie verlangt, dass  $\varphi(a)$  in der multiplikativen Gruppe  $K' \setminus \{0_{K'}\}$  von  $K'$  liegt und somit nicht gleich  $0_{K'}$  sein kann. #

Ein bijektiver Körperhomomorphismus heißt ein **Körperisomorphismus**. Wie gerade gezeigt, langt es hierfür die Surjektivität zu überprüfen.

**Definition 3.30.** Der Teilkörper<sup>63</sup>

$$K_+(\Lambda) := \{f \in K(\Lambda) \mid f(z) = f(-z) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}\} \subseteq K(\Lambda)$$

heißt der Körper der geraden elliptischen Funktionen.

<sup>62</sup>An dieser Stelle geht ein, dass  $K$  ein Körper ist. Dass  $K'$  ein Körper und nicht nur ein Ring ist, geht nicht in den Beweis ein. Allgemeiner gilt also, dass ein Homomorphismus  $\varphi : R \rightarrow R'$  von Ringen mit Eins injektiv ist, wenn  $R$  sogar ein Körper ist.

<sup>63</sup>Dass  $K_+(\Lambda)$  tatsächlich ein Körper ist, ist eine leichte Übungsaufgabe.

**Lemma 3.31.** Sei  $f \in K_+(\Lambda)$  mit  $S(f) = f^{-1}(\{\infty\}) \subseteq \Lambda$ . Dann ist  $f$  ein Polynom in  $\wp$ .

*Beweis.* Sei ohne Einschränkung  $f$  nicht konstant. Dann ist nach dem ersten Liouville'schen Satz 3.13 die Menge  $S(f)$  nicht leer; es gibt also ein  $\omega_0 \in S(f)$ . Wegen der Voraussetzung  $S(f) \subseteq \Lambda$  liegt dieses insbesondere in  $\Lambda$ , und wegen der  $\Lambda$ -Periodizität von  $f$  gilt sogar  $S(f) \supseteq \Lambda$ . Zusammengefasst erhalten wir  $S(f) = \Lambda$ .

Da  $f$  gerade ist, hat  $f$  in  $z = 0$  einen Pol von Ordnung  $2n$  für ein geeignetes  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Die Laurententwicklung von  $f$  um  $z = 0$  ist also von der Form

$$f(z) = a_{-2n}z^{-2n} + \sum_{v > -n} a_{2v}z^{2v} \quad \text{für alle } z \in U_\rho(0)$$

mit  $a_{-2n} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $a_{2v} \in \mathbb{C}$  für alle  $v > -n$ . Andererseits kennen wir aus Proposition 3.26 die Laurententwicklung von  $\wp$  und somit auch diejenige von  $\wp^n \in K_+(\Lambda)$  in  $z = 0$ . Offenbar liegt für die Funktion

$$g := f - a_{-2n}\wp^n \in K_+(\Lambda)$$

die Polstellenmenge  $S(g)$  wieder in  $\Lambda$ , und es gilt  $\infty\text{-ord}(g;0) < 2n$ . Nun verfahren wir mit  $g$  genauso wie zuvor mit  $f$  und fahren induktiv fort. In endlich vielen Schritten erhalten wir ein Polynom  $P \in \mathbb{C}[X]$ , für das die Funktion  $f - P(\wp)$  in  $z = 0$  eine hebbare Singularität hat und dort den Wert Null annimmt. Wegen der Elliptizität von  $f$  und  $\wp$  ist dann  $f - P(\wp)$  eine ganze, elliptische Funktion, also konstant Null nach dem ersten Liouville'schen Satz 3.13. Es folgt  $f = P(\wp)$  und somit das Lemma.  $\square$

**Lemma 3.32.** Die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{C}(X) & \rightarrow K_+(\Lambda), \\ P & \mapsto P(\wp) \end{cases}$$

ist ein Körperisomorphismus.

*Beweis.* Die Abbildung  $\varphi$  ist wohldefiniert,

denn: Das Bild von  $\varphi$  liegt wegen der Elliptizität und der Geradheit von  $\wp$  tatsächlich in  $K_+(\Lambda)$ , wenn wir ausschließen können, dass der Nenner  $Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$  einer rationalen Funktion aus  $\mathbb{C}(X)$  von  $\varphi$  auf die Nullabbildung geschickt wird. Es ist klar, dass dies nicht geschehen kann, wenn  $Q$  ein konstantes Polynom ist. Für  $\deg(Q) \geq 1$  ist  $Q(\wp)$  nicht konstant Null, weil  $Q(\wp)$  in  $z = 0$  wegen  $\infty\text{-ord}(\wp;0) = 2$  eine Polstelle der Ordnung  $2 \deg(Q)$  hat.  $\#$

Das Einsetzen eines  $\mathbb{C}$ -Algebrenelements in  $\mathbb{C}(X)$  ist ein Körperhomomorphismus, wie man entweder leicht nachrechnet oder aus der Linearen Algebra weiß. Nach unseren Vorbemerkungen genügt es also für den Beweis des Lemmas die Surjektivität von  $\varphi$ , also  $\mathbb{C}(\wp) := \varphi(\mathbb{C}(X)) = K_+(\Lambda)$  zu zeigen. Da wir schon eingesehen haben, dass  $\mathbb{C}(\wp) \subseteq K_+(\Lambda)$  gilt, genügt es sogar  $\mathbb{C}(\wp) \supseteq K_+(\Lambda)$  zu zeigen.

Sei also  $f \in K_+(\Lambda) \setminus \mathbb{C}$ , und sei  $z_0 \notin \Lambda$  eine Polstelle der Ordnung  $n \geq 1$  von  $f$ . Wegen  $0\text{-ord}((\wp(z) - \wp(z_0))^n; z_0) \geq n$  hat dann

$$g(z) := f(z) (\wp(z) - \wp(z_0))^n$$

in  $z = z_0$  eine hebbare Singularität. Die Polstellenmenge  $S_\Lambda(f)$  von  $f$  modulo  $\Lambda$  ist endlich, und die Funktion

$$G(z) := f(z) \cdot \prod_{s \in S_\Lambda(f) \setminus \Lambda} (\wp(z) - \wp(s))^{\infty\text{-ord}(f;s)}$$

hat höchstens Pole in  $\Lambda$ . Da  $G$  nach Konstruktion in  $K_+(\Lambda)$  liegt, folgt die Behauptung mit Lemma 3.31.  $\square$

**Lemma 3.33.** *Es gilt  $[K(\Lambda) : K_+(\Lambda)] = 2$ , und  $\{1, \wp'\}$  ist eine Basis von  $K(\Lambda)/K_+(\Lambda)$ .*

*Beweis.* Mit  $f(z) \in K(\Lambda)$  ist auch  $f(-z)$  elliptisch bezüglich  $\Lambda$ . Setzen wir

$$f_\pm(z) := \frac{f(z) \pm f(-z)}{2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

so ist  $f_+ \in K(\Lambda)$  gerade und  $f_- \in K(\Lambda)$  ungerade. Es gilt dann

$$f = f_+ + f_- = f_+ + \wp' \frac{f_-}{\wp'} \in K_+(\Lambda) + \wp' \cdot K_+(\Lambda).$$

Wir haben hiermit gezeigt, dass  $\{1, \wp'\}$  ein Erzeugendensystem des  $K_+(\Lambda)$ -Vektorraums  $K(\Lambda)$  ist. Die Behauptung folgt, weil  $K_+(\Lambda)$  nach Proposition 3.24 ein echter Teilkörper von  $K(\Lambda)$  ist.  $\square$

Fassen wir die obigen Lemmata zusammen, so erhalten wir eine präzise Beschreibung des Körpers  $K(\Lambda)$ .

**Satz 3.34** (Struktursatz für elliptische Funktionen). *Es gilt*

$$K(\Lambda) = \mathbb{C}(\wp) \oplus \mathbb{C}(\wp) \wp'.$$

### 3.5 Das Abel'sche Theorem für Tori

Ziel dieses Abschnitts ist es zu beschreiben, welche Cousin-Verteilungen auf dem Torus  $\mathbb{C}/\Lambda$  lösbar sind. Ein wichtiges Hilfsmittel wird dabei die Weierstraß'sche  $\sigma$ -Funktion sein, die wir nun einführen wollen.

**Lemma 3.35.** *Das unendliche Produkt*

$$z \cdot \prod_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2\right)$$

konvergiert unbedingt auf ganz  $\mathbb{C}$  und stellt dort eine holomorphe Funktion, **Weierstraß'sche  $\sigma$ -Funktion** genannt, dar. Es gilt

$$0\text{-ord}(\sigma; z) = \begin{cases} 1 & \text{für alle } z \in \Lambda, \\ 0 & \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda. \end{cases}$$

*Beweis.* Zur Konstruktion der Funktion  $\sigma$  bestimmen wir mithilfe des Weierstraß'schen Produktsatzes 2.26 die Lösung der Nullstellenverteilung  $\{1\}_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}}$ . Wir machen dabei den Ansatz

$$\prod_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{P_\omega(z)},$$

wobei die Polynome  $P_\omega(z)$  wie in der Bemerkung nach Proposition 2.29 durch Abbrechen der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z}{\omega}\right)^n \quad \text{für alle } z \in U_{|\omega|}(0)$$

erhalten werden. Analog zum dortigen Beispiel (b) zeigt man, dass auf einem beliebigen Kompaktum  $K \subseteq \mathbb{C}$  die Abschätzung

$$\left| \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\omega}\right)^2} - 1 \right| \leq C \cdot \frac{1}{|\omega|^3}$$

mit einer nur von  $K$  abhängigen Konstanten  $C \in \mathbb{C}$  gilt. Mit Lemma 3.21 folgt die absolute Konvergenz von

$$\sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\omega}\right)^2} - 1 \right)$$

auf Kompakta und mit Satz 2.25 die behauptete unbedingte Konvergenz und die Holomorphie des unendlichen Produkts. Die Aussage über die Nullstellen ist klar.  $\square$

**Lemma 3.36.**  $\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)'(z) = -\wp(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

*Beweis.* Die Funktion  $\frac{\sigma(z)}{z}$  hat nach Lemma 3.35 in  $z = 0$  eine hebbare Singularität und ist somit ganz. Schreibt man sie wie in der Definition der  $\sigma$ -Funktion als Produkt, so sind für  $z \in U_\varrho(0)$  mit

$$\varrho := \min\{|\omega| \mid \omega \in \Lambda \setminus \{0\}\}$$

alle Faktoren ungleich Null. Nach Satz 2.22 gibt es daher ein von  $z$  abhängiges  $m(z) \in \mathbb{Z}$  mit

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} \frac{\sigma(z)}{z} &= 2\pi i m(z) + \sum'_{\omega \in \Lambda} \operatorname{Log} \left( \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp \left( \frac{z}{\omega} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\omega}\right)^2 \right) \right) \\ &= 2\pi i m(z) + \sum'_{\omega \in \Lambda} \operatorname{Log} \left( 1 - \frac{z}{\omega} \right) + \frac{z}{\omega} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\omega}\right)^2 \end{aligned} \quad \text{für alle } z \in U_\varrho(0).^{64}$$

Diese Reihe ist auf Kompakta  $K \subseteq U_\varrho(0)$  gleichmäßig absolut konvergent,

denn: Die Logarithmusfunktion hat die Taylorreihenentwicklung

$$\operatorname{Log} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z}{\omega}\right)^n \quad \text{für alle } z \in U_\varrho(0).$$

<sup>64</sup>In einer kleinen Umgebung der 1 dürfen wir die Logarithmusrechenregeln des zweiten Schritts anwenden. Indem wir sonst  $\varrho$  noch kleiner wählen, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass wir uns in einer solchen kleinen Umgebung befinden.

Wir erhalten so

$$\left| \operatorname{Log}\left(1 - \frac{z}{\omega}\right) + \frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2 \right| = \left| \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z}{\omega}\right)^n \right| < \sum_{n=3}^{\infty} \left|\frac{z}{\omega}\right|^n = \frac{\left|\frac{z}{\omega}\right|^3}{1 - \left|\frac{z}{\omega}\right|} \quad \text{für alle } z \in U_\varrho(0).$$

Wenn wir berücksichtigen, dass für hinreichend großes  $|\omega|$  die Abschätzung  $1 - \left|\frac{z}{\omega}\right| \geq \frac{1}{2}$  gilt, so folgt

$$\left| \operatorname{Log}\left(1 - \frac{z}{\omega}\right) + \frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2 \right| < C_K \cdot \frac{1}{|\omega|^3} \quad \text{für alle } z \in K, |\omega| \gg 0$$

mit einer nur von  $K$  abhängigen reellen Konstanten  $C_K$ . Die Behauptung folgt mit Lemma 3.21 und dem Majorantenkriterium. #

Betrachten wir nun die Zuordnung

$$z \mapsto 2\pi i m(z) = \operatorname{Log} \frac{\sigma(z)}{z} - \sum'_{\omega \in \Lambda} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{z}{\omega}\right) + \frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2 \quad \text{für } z \in \dot{U}_\varrho(0).$$

Da die rechte Seite in  $z$  stetig ist, ist  $m(z)$  auf  $U_\varrho(0)$  konstant.

Gliedweises Ableiten ergibt daher

$$\frac{\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma(z)}{z}\right)}{\frac{\sigma(z)}{z}} = \left(\operatorname{Log} \frac{\sigma(z)}{z}\right)' = \sum'_{\omega \in \Lambda} \left(\frac{-\frac{1}{\omega}}{1 - \frac{z}{\omega}} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right) \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_\varrho(0)$$

und also

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} - \frac{1}{z} = \frac{\frac{\sigma'(z)z - \sigma(z)}{z^2}}{\frac{\sigma(z)}{z}} = \sum'_{\omega \in \Lambda} \left(\frac{-1}{\omega - z} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right) \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_\varrho(0).$$

Nach dem Identitätssatz gilt diese Gleichung nicht nur auf  $\dot{U}_\varrho(0)$  sondern auf ganz  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ . Das Lemma folgt nach nochmaligem Ableiten.  $\square$

**Lemma 3.37.** Für ein beliebiges  $\omega_0 \in \Lambda$  gilt

$$\sigma(z + \omega_0) = \exp(a_{\omega_0}z + b_{\omega_0}) \sigma(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

wobei  $a_{\omega_0}, b_{\omega_0} \in \mathbb{C}$  von  $\omega_0$  abhängige Konstanten sind.

*Beweis.* Da die Nullstellen samt Nullstellenordnungen von  $\sigma(z)$  und  $\sigma(z + \omega_0)$  gleich sind, ist die Funktion

$$\frac{\sigma(z + \omega_0)}{\sigma(z)}$$

ganz und nullstellenfrei. Da  $\mathbb{C}$  ein Elementargebiet ist, gibt es dann eine ganze Funktion  $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  mit

$$\frac{\sigma(z + \omega_0)}{\sigma(z)} = e^{h(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

Das Lemma folgt offensichtlich, wenn wir zeigen können, dass für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$  die zweite Ableitung  $h''(z)$  verschwindet.

Aus (3.1) folgt

$$\sigma'(z + \omega_0) = \sigma'(z) e^{h(z)} + \sigma(z) h'(z) e^{h(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

und also

$$h'(z) = \frac{\sigma'(z + \omega_0) e^{-h(z)} - \sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{\sigma'(z + \omega_0)}{\sigma(z + \omega_0)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda.$$

Das Lemma folgt nun, wenn wir zeigen können, dass  $h'(z)$  auf  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  konstant ist, dass also

$$\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)'(z + \omega_0) = \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)'(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$$

gilt. Dies soll für alle möglichen Wahlen von  $\omega_0$  wahr sein. Das Lemma folgt also, wenn wir zeigen können, dass  $\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)'$  elliptisch bezüglich  $\Lambda$  ist. Das haben wir aber schon in Lemma 3.36 bewiesen.  $\square$

**Satz 3.38** (Abel'sches Theorem für Tori). *Eine Null- und Polstellenverteilung  $(\{u_s\}_{s \in S_\Lambda}, \{u_t\}_{t \in T_\Lambda})$  auf  $\mathbb{C}/\Lambda$  hat genau dann eine Lösung, wenn die folgenden Bedingungen gelten.*

- (a)  $S_\Lambda$  und  $T_\Lambda$  sind disjunkte endliche Mengen.
- (b)  $\sum_{s \in S_\Lambda} u_s = \sum_{t \in T_\Lambda} u_t$ .
- (c)  $\sum_{s \in S_\Lambda} u_s \cdot s = \sum_{t \in T_\Lambda} u_t \cdot t$  als Gleichung in  $\mathbb{C}/\Lambda$ .

*Beweis.* Wie wir in Bemerkung 3.19 schon festgestellt haben, ist die notwendige Richtung des Satzes gerade der vierte Liouville'sche Satz 3.18. Es langt also die hinreichende Richtung zu zeigen.

Wir nehmen nun an, die Bedingungen (a) - (c) des Satzes gelten und konstruieren eine elliptische Funktion  $f \in K(\Lambda)$ , deren Null- bzw. Polstellenmenge modulo  $\Lambda$  mit Vielfachheiten gerade durch  $T_\Lambda$  bzw.  $S_\Lambda$  gegeben ist.

Nach Voraussetzung (a) sind  $T_\Lambda$  und  $S_\Lambda$  disjunkt und jeweils endlich, und nach Voraussetzung (b) sind sie mit Vielfachheiten gerechnet gleichmächtig. Seien  $\{t_1, \dots, t_n\}$  und  $\{s_1, \dots, s_n\}$  Vertretersysteme von  $T_\Lambda$  bzw.  $S_\Lambda$ , die diese Vielfachheiten berücksichtigen. Da die leere Null- und Polstellenverteilung trivialerweise lösbar ist, können wir dabei ohne Einschränkung  $n \geq 1$  annehmen.

Nach Voraussetzung (c) liegt

$$\omega_0 := \sum_{j=1}^n t_j - \sum_{j=1}^n s_j$$

im Gitter  $\Lambda$ . Setzen wir nun

$$f(z) := \frac{\sigma(z - t_1 + \omega_0) \cdot \prod_{j=2}^n \sigma(z - t_j)}{\prod_{j=1}^n \sigma(z - s_j)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

so ist  $f$  nach Lemma 3.35 auf ganz  $\mathbb{C}$  meromorph und hat das gewünschte Null- und Polstellenverhalten.

Es bleibt zu zeigen, dass  $f$  tatsächlich eine elliptische Funktion ist. Mit Lemma 3.37 gilt für ein beliebiges  $\omega \in \Lambda$

$$\begin{aligned} f(z + \omega) &= \frac{\sigma(z - t_1 + \omega_0 + \omega) \cdot \prod_{j=2}^n \sigma(z + \omega - t_j)}{\prod_{j=1}^n \sigma(z + \omega - s_j)} \\ &= \frac{\exp(a_\omega(z - t_1 + \omega_0) + b_\omega) \cdot \prod_{j=2}^n \exp(a_\omega(z - t_j) + b_\omega)}{\prod_{j=1}^n \exp(a_\omega(z - s_j) + b_\omega)} \cdot f(z) \\ &= \exp(a_\omega \omega_0) \exp\left(a_\omega \left(-\sum_{j=1}^n t_j + \sum_{j=1}^n s_j\right)\right) \cdot f(z) \\ &= f(z), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

### 3.6 Tori als algebraische Kurven (★)

Wir haben in Abschnitt 3.1 die Periodentori als Riemann'sche Flächen kennengelernt. Für die Zahlentheorie von großer Bedeutung ist nun, dass sie auch die Struktur einer algebraischen Kurve tragen. Diese werden wir in diesem Abschnitt mithilfe der Weierstraß'schen  $\wp$ -Funktion einführen.

**Definition 3.39.** Eine Teilmenge  $C = C_P \subseteq \mathbb{C}^2$  heißt eine **ebene affine Kurve**, wenn es ein nichtkonstantes Polynom  $P \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$  in zwei Variablen gibt mit

$$C = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z_1, z_2) = 0\}.$$

Diese Begriffsbildung soll ein wenig näher erläutert werden.

- „ebene“ bezieht sich darauf, dass  $C$  im zweidimensionalen komplexen Raum  $\mathbb{C}^2$  liegt,
- „affine“ sagen wir, weil  $\mathbb{C}^2$  die affine Ebene über den Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen ist,
- „Kurve“ bezieht sich darauf, dass  $C$  komplex eindimensional ist.

**Beispiel 3.40.** Seien  $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$  beliebig. Dann ist durch das Polynom

$$P_{g_2, g_3}(X_1, X_2) = X_2^2 - 4X_1^3 + g_2X_1 + g_3$$

ein Beispiel einer ebenen affinen Kurve  $C(g_2, g_3)$  gegeben. Zur Veranschaulichung ist es von Vorteil, für die Koeffizienten  $g_2$  und  $g_3$  reelle Zahlen einzusetzen und nur den „reellen Anteil“

$$C(g_2, g_3) \cap \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2^2 = 4x_1^3 - g_2x_1 - g_3\}$$

zu betrachten.<sup>65</sup> Im Spezialfall  $g_2 = 4$  und  $g_3 = 0$  erhalten wir so etwa das folgende Bild.

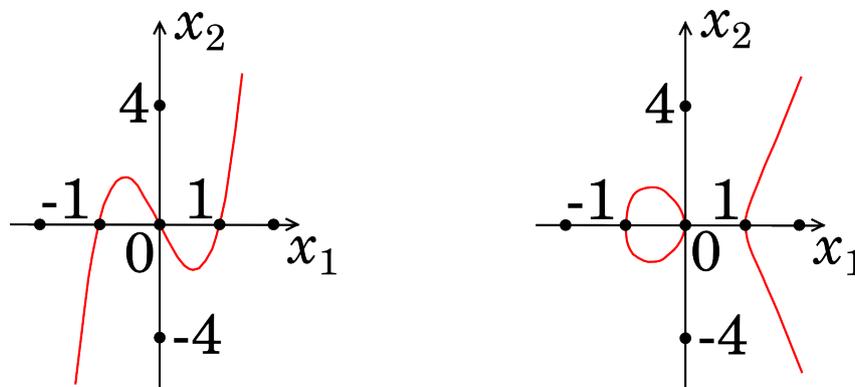


Abbildung 3.5: Das linke Schaubild zeigt  $x_2 = 4x_1^3 - 4x_1$ , das rechte  $x_2^2 = 4x_1^3 - 4x_1$ .

Wir nehmen nun an, es gebe ein Gitter  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  mit  $g_2 = g_2(\Lambda)$  und  $g_3 = g_3(\Lambda)$ .<sup>66</sup> Aus der Differentialgleichung 3.27 der zugehörigen Weierstraß'schen Funktion  $\wp = \wp_\Lambda$  folgt dann

$$(\wp(z), \wp'(z)) \in C(g_2, g_3) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda.$$

**Satz 3.41.** *In der soeben eingeführten Situation ist die Zuordnung*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}/\Lambda \setminus \{[0]\} &\rightarrow C(g_2, g_3), \\ [z] &\mapsto (\wp(z), \wp'(z)) \end{aligned}$$

*bijektiv.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Surjektivität. Sei dafür  $(z_1, z_2) \in C(g_2, g_3)$  beliebig. Da  $\wp$  nach Proposition 3.25 von Ordnung  $2 > 0$  ist und Pole nur in den Gitterpunkten hat, gibt es ein  $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$  mit  $\wp(z) = z_1$ . Mit der Differentialgleichung 3.27 folgt dann  $\wp'(z) \in \{\pm z_2\}$  und somit

$$(z_1, z_2) \in \{(\wp(z), \pm \wp'(z))\} = \{(\wp(\pm z), \wp'(\pm z))\}$$

und somit die Surjektivität.

Zum Beweis der Injektivität betrachten wir zwei Punkte  $z, w \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$  mit

$$\wp(z) = \wp(w) \quad \text{und} \quad \wp'(z) = \wp'(w).$$

Dann gilt

$$z \equiv w \pmod{\Lambda} \quad \text{oder} \quad z \equiv -w \pmod{\Lambda},$$

<sup>65</sup>Es gilt jedoch zu beachten, dass der reelle Anteil einer ebenen affinen Kurve nur einen Ausschnitt zeigt. Im Allgemeinen kann dieser sogar leer sein, wie das Beispiel  $P(X_1, X_2) = X_1^2 + X_2^2 + 1$  zeigt.

<sup>66</sup>In Abschnitt 4.9 werden wir sehen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn  $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$  gilt. Letzterer Ausdruck ist die Diskriminante des Polynoms dritten Grades, das durch die rechte Seite der Differentialgleichung 3.27 der  $\wp$ -Funktion gegeben ist.

denn: Nach Proposition 3.25 hat die Funktion  $z \mapsto \wp(z) - \wp(w)$  für festes  $w$  Ordnung 2, hat also insbesondere genau zwei Nullstellen modulo  $\Lambda$ . Die Behauptung folgt, da  $z = w$  und  $z = -w$  offenbar Nullstellen sind.<sup>67</sup> #

Im Fall  $z \equiv w$  ist nichts zu zeigen. Nehmen wir also an, es gelte  $z \equiv -w$ . Wegen  $\wp'(z) = \wp'(w)$  und der Ungeradheit von  $\wp'$  muss dann  $\wp'(z) = 0$  gelten. Hieraus folgt schon  $2z \in \Lambda$ ,

denn: Im Beweis von Proposition 3.24 haben wir gesehen, dass  $\wp'$  außerhalb der Gitterpunkte eine holomorphe Funktion darstellt. Die Pole von  $\wp'$  in den Gitterpunkten sind von Ordnung 3, da die von  $\wp$  Ordnung 2 haben. Insgesamt haben wir also  $\text{ord}(\wp') = 3$ . Andererseits kennen wir aus dem Beweis von Korollar 3.28 bereits drei modulo  $\Lambda$  paarweise verschiedene Nullstellen von  $\wp'$ , die alle die geforderte Bedingung erfüllen. #

Es folgt nun  $-w \equiv z \equiv -z \pmod{\Lambda}$ , und somit die Injektivität. □

Diese Situation ist noch nicht vollkommen befriedigend, da der Kurve  $C(g_2, g_3)$  der Punkt  $[0]$  des Torus fehlt. Um dies zu verbessern konstruieren wir nun den so genannten projektiven Abschluss der Kurve. Dafür müssen wir ein wenig ausholen.

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann definiert offensichtlich

$$(z_0, \dots, z_n) \sim (w_0, \dots, w_n) : \iff \text{es gibt ein } t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ mit } (z_0, \dots, z_n) = (tw_0, \dots, tw_n)$$

eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Die Äquivalenzklasse eines Punktes  $(z_0, \dots, z_n)$  unter dieser Relation bezeichnen wir mit  $[z_0 : \dots : z_n]$ . Die Menge solcher Äquivalenzklassen nennen wir den  *$n$ -dimensionalen projektiven Raum*  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  über dem Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen.<sup>68</sup> Schreiben wir nun noch  $\mathbb{A}^n(\mathbb{C}) := \{[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid z_0 \neq 0\}$ , so gilt offensichtlich

**Proposition 3.42.** (a) *Die Zuordnung*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{C}), \\ (z_1, \dots, z_n) &\mapsto [1 : z_1 : \dots : z_n] \end{aligned}$$

*ist eine Bijektion mit Umkehrabbildung*

$$[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \mapsto \left( \frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0} \right).$$

(b) *Die Zuordnung*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{A}^n(\mathbb{C}), \\ [z_0 : \dots : z_{n-1}] &\mapsto [0 : z_0 : \dots : z_{n-1}] \end{aligned}$$

*ist bijektiv.*

<sup>67</sup>Wir haben nie behauptet, diese Nullstellen seien modulo  $\Lambda$  verschieden: Im Fall  $w \equiv -w \pmod{\Lambda}$  liegt tatsächlich eine doppelte Nullstelle vor.

<sup>68</sup>Anschaulich ist  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  die Menge der eindimensionalen Untervektorräume von  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

Die Proposition rechtfertigt die Sichtweise von  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  als einer disjunkten Vereinigung von  $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ , dem *endlichen Teil*, und einer Kopie von  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ , dem *unendlich fernen Teil*.

**Beispiel 3.43.** (a) Im Fall  $n = 0$  besteht der projektive Raum

$$\mathbb{P}^0(\mathbb{C}) = \{[z] \mid z \neq 0\} = \{[1]\}$$

offenbar aus nur einem einzigen Punkt.

(b) Im Fall  $n = 1$  ist nach Teil (a) der Proposition der endliche Teil der projektiven Geraden  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  bijektiv auf die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  abbildbar. Der unendlich ferne Teil  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}$  ist in Bijektion zu  $\mathbb{P}^0(\mathbb{C})$  und ist somit einelementig. Es gibt also eine Bijektion von Mengen<sup>69</sup>

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) &\rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \\ [z_0 : z_1] &\mapsto \begin{cases} \frac{z_1}{z_0} & \text{für } z_0 \neq 0, \\ \infty & \text{für } z_0 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ein Polynom  $\tilde{P} \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  heißt *homogen vom Grad*  $d \in \mathbb{N}$ , wenn

$$\tilde{P}(tz_0, \dots, tz_n) = t^d \cdot \tilde{P}(z_0, \dots, z_n) \quad \text{für alle } (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \text{ und alle } t \in \mathbb{C}$$

gilt. Offensichtlich ist für ein homogenes Polynom mit jeder Nullstelle  $(z_0, \dots, z_n)$  und jedem  $t \in \mathbb{C}$  auch  $(tz_0, \dots, tz_n)$  eine Nullstelle. Dies sichert die Wohldefiniertheit der Punktmenge

$$\{[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid \tilde{P}(z_0, \dots, z_n) = 0\}.$$

**Definition 3.44.** Eine Teilmenge  $\tilde{C} = \tilde{C}_{\tilde{P}} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  heißt eine *ebene projektive Kurve*, wenn es ein nichtkonstantes homogenes Polynom  $\tilde{P} \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$  in drei Variablen gibt mit

$$\tilde{C} = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid \tilde{P}(z_0, z_1, z_2) = 0\}.$$

Sei nun

$$P(X_1, X_2) = \sum_{e_1, e_2} a_{e_1, e_2} X_1^{e_1} X_2^{e_2} \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$$

ein nichtkonstantes Polynom, und sei  $d := \max\{e_1 + e_2 \mid a_{e_1, e_2} \neq 0\}$ . Dann ist

$$\tilde{P}(X_0, X_1, X_2) = \sum_{e_1, e_2} a_{e_1, e_2} X_0^{d-e_1-e_2} X_1^{e_1} X_2^{e_2} \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$$

ein homogenes Polynom vom Grad  $d$  und heißt die *Homogenisierung* von  $P$ .

**Proposition 3.45.** Sei  $P \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$  ein nichtkonstantes Polynom und  $\tilde{P} \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$  seine Homogenisierung.

<sup>69</sup>Wir können uns  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  über diese Identifikation mit der Topologie von  $\overline{\mathbb{C}}$  ausgestattet vorstellen.

(a) Unter der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{C}), \\ (z_1, z_2) &\mapsto [1 : z_1 : z_2] \end{aligned}$$

aus Teil (a) von Proposition 3.42 wird die ebene affine Kurve  $C_P$  bijektiv auf den Durchschnitt  $\tilde{C}_P \cap \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$  der ebenen projektiven Kurve  $\tilde{C}_P$  mit dem endlichen Teil des projektiven Raums abgebildet.

(b) Der Durchschnitt von  $\tilde{C}_P$  mit dem unendlich fernen Teil von  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  besteht aus nur endlich vielen Punkten.

*Beweis.* Klar, dass Teil (a) gilt. Behauptung (b) ist eine Übung. □

Proposition 3.45 rechtfertigt, die ebene projektive Kurve  $\tilde{C}_P$  den **projektiven Abschluss** der ebenen affinen Kurve  $C_P$  zu nennen.<sup>70</sup>

**Beispiel 3.46.** Seien wieder  $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$  beliebig. Die Homogenisierung von  $P_{g_2, g_3}$  ist dann durch

$$\tilde{P}_{g_2, g_3}(X_0, X_1, X_2) = X_0 X_2^2 - 4X_1^3 + g_2 X_0^2 X_1 + g_3 X_0^3 \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$$

gegeben. Die unendlich fernen Punkte auf  $\tilde{C}(g_2, g_3) := \tilde{C}_{\tilde{P}_{g_2, g_3}}$  sind

$$\tilde{C}(g_2, g_3) \cap \{[0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})\} = \{[0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid -4z_1^3 = 0\} = \{[0 : 0 : 1]\}.$$

Dies ist der fehlende Punkt, den wir gesucht haben.

**Satz 3.47.** Die Zuordnung

$$\begin{aligned} \mathbb{C}/\Lambda &\rightarrow \tilde{C}(g_2, g_3), \\ [z] &\mapsto \begin{cases} [1 : \wp(z) : \wp'(z)] & \text{für } [z] \neq [0], \\ [0 : 0 : 1] & \text{für } [z] = [0] \end{cases} \end{aligned}$$

ist bijektiv. Man nennt ihr Bild  $\tilde{C}(g_2, g_3)$  auch die zum Gitter  $\Lambda$  gehörige **elliptische Kurve**.

Vermittels dieser Identifikation können wir eine interessante Aussage über die  $\wp$ -Funktion beweisen, das Additionstheorem 3.51.<sup>71</sup> Bevor wir das tun, führen wir noch einen weiteren Begriff ein.

<sup>70</sup>Das Polynom  $P$  ist durch die ebene affine Kurve  $C$  nicht eindeutig bestimmt: Etwa definieren  $P$  und  $P^2$  die selbe Kurve. Dennoch kann man zeigen, dass  $\tilde{C}$  nur von  $C$  und nicht von der Wahl von  $P$  abhängt. Der projektive Abschluss ist somit eindeutig. Versieht man  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  mit der Quotiententopologie bezüglich  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ , so ist  $\tilde{C}$  gerade der topologische Abschluss von  $C$ . Da  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  als topologischer Raum kompakt ist, gilt dasselbe auch für  $\tilde{C}$ . Wir können  $\tilde{C}$  als die natürliche Kompaktifizierung von  $C$  betrachten.

<sup>71</sup>Man kann das Additionstheorem auch direkt beweisen. Dies erfordert jedoch langwierige Rechnungen und ist wenig instruktiv.

**Definition 3.48.** Eine Teilmenge  $g \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  heißt eine **Gerade**,<sup>72</sup> wenn es zwei verschiedene Punkte  $[z_0 : z_1 : z_2], [w_0 : w_1 : w_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  gibt mit

$$g = \{P_{\lambda,\mu} := \lambda[z_0 : z_1 : z_2] + \mu[w_0 : w_1 : w_2] \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\}.$$

Offensichtlich ist für jede solche Gerade  $g$  die Zuordnung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) &\rightarrow g, \\ [\lambda, \mu] &\mapsto P_{\lambda,\mu} \end{aligned}$$

eine Bijektion.

Wir übertragen nun die aus Bemerkung 3.3 bekannte Gruppenstruktur des Torus  $\mathbb{C}/\Lambda$  vermöge der Bijektion aus Satz 3.47 auf die elliptische Kurve  $\tilde{C}(g_2, g_3)$ ; auf diese Weise wird die Bijektion zu einem Gruppenisomorphismus. Wir schreiben die Gruppenverknüpfung auf  $\tilde{C}(g_2, g_3)$  wieder als Addition.

**Satz 3.49.** Erfüllen drei Punkte  $P, Q, R \in \tilde{C}(g_2, g_3)$  die Gleichung  $P + Q + R = 0$ , so liegen sie auf einer Geraden in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .

*Beweis.* Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, die drei Punkte seien paarweise verschieden und allesamt nicht 0; die anderen Fälle sind trivial.

$P, Q$  und  $R$  liegen auf der elliptischen Kurve  $\tilde{C}(g_2, g_3)$ . Deshalb und aufgrund der Definition der Gruppenverknüpfung dort gibt es  $z, w \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$  mit

$$P = [1 : \wp(z) : \wp'(z)], \quad Q = [1 : \wp(w) : \wp'(w)], \quad R = [1 : \wp(-(z+w)) : \wp'(-(z+w))].$$

Drei Punkte in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  liegen genau dann auf einer Geraden, wenn die ihnen zugehörigen eindimensionalen Untervektorräume von  $\mathbb{C}^3$  in einer gemeinsamen Ebene liegen, wenn also die zugehörigen Richtungsvektoren linear abhängig sind. Übersetzt in unsere gegebene Situation bedeutet dies, dass  $P, Q, R$  genau dann auf einer Geraden in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  liegen, wenn

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \wp(z+w) & -\wp'(z+w) \\ 1 & \wp(w) & \wp'(w) \\ 1 & \wp(z) & \wp'(z) \end{pmatrix} = 0 \tag{3.2}$$

gilt. Zum Beweis von (3.2) wählen wir nun zwei feste Punkte  $u, v \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$  mit  $\wp(u) \neq \wp(v)$ <sup>73</sup> und betrachten die elliptische Funktion

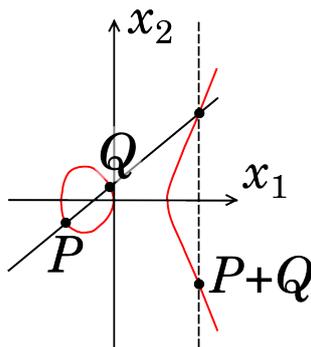
$$f(z) := \det \begin{pmatrix} 1 & \wp(z) & \wp'(z) \\ 1 & \wp(u) & \wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \end{pmatrix}.$$

<sup>72</sup>Anschaulich ist die projektive Gerade durch zwei Punkte von  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  also die Menge aller eindimensionalen Unterräume von  $\mathbb{C}^3$ , die in der Ebene liegen, die von den diesen Punkten entsprechenden eindimensionalen Untervektorräumen aufgespannt wird. Offensichtlich liegen so je zwei verschiedene Punkte aus  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  auf genau einer Geraden. In der Sprache der axiomatischen Geometrie ist dies das erste Inzidenzaxiom. Es ist wenig überraschend und leicht zu überprüfen, dass  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  tatsächlich alle Axiome einer Inzidenzebene erfüllt.

<sup>73</sup>Letztere Voraussetzung dürfen wir stellen, weil im Falle  $\wp(u) = \wp(v)$  mit der Geradheit von  $\wp$  sofort  $u \equiv \pm v \pmod{\Lambda}$  folgte. Es gälte also  $u \equiv v \pmod{\Lambda}$  oder  $u + v \in \Lambda$ . Beide Fälle hatten wir bereits zu Beginn des Beweises ohne Einschränkung ausgeschlossen.

Diese ist von der Form  $c_1 + c_2\wp(z) + c_3\wp'(z)$  mit Konstanten  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ , wobei nach Voraussetzung  $c_3 = \wp(v) - \wp(u) \neq 0$  gilt. Es folgt, dass  $f$  in den Gitterpunkten Pole dritter Ordnung hat und ansonsten holomorph ist. Nach dem 3. Liouville'schen Satz 3.17 hat  $f$  modulo  $\Lambda$  also auch drei Nullstellen. Offensichtlich sind zwei davon  $z = u$  und  $z = v$ . Nach dem Abel'schen Theorem 3.38 liegt die dritte Nullstelle bei  $z = -(u + v)$ , was zu zeigen war.  $\square$

**Bemerkung 3.50.** Nach dem Satz von BÉZOUT<sup>74</sup> schneiden sich zwei ebene projektive Kurven  $C_1$  und  $C_2$  ohne gemeinsame Komponenten<sup>75</sup> in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  in  $\deg C_1 \cdot \deg C_2$  vielen Punkten, wenn man Berührungspunkte mit einer geeigneten Vielfachheit rechnet. Der Grad  $\deg C$  einer ebenen projektiven Kurve  $C$  ist dabei der Grad des definierenden Polynoms, also im Fall einer Geraden 1 und im Fall einer elliptischen Kurve 3. Da auch die Umkehrung von Satz 3.49 gilt, sich die Punkte im Schnitt einer elliptischen Kurve und einer Gerade also stets zu 0 addieren, ist durch diese Eigenschaft ein Gruppengesetz auf einer elliptischen Kurve bereits beschrieben: Zwei Punkte  $P, Q$  auf einer elliptischen Kurve werden addiert, indem man eine Gerade durch sie legt und deren dritten Schnittpunkt mit der elliptischen Kurve an der  $X_1$ -Achse spiegelt. In der Tat ist der dritte Punkt auf der Geraden durch  $P$  und  $Q$  gerade durch  $-(P + Q)$  gegeben, und der Spiegelpunkt  $P + Q$  ist gerade der dritte Schnittpunkt der Geraden durch  $-(P + Q)$  und 0 mit der elliptischen Kurve.



**Satz 3.51** (Additionstheorem der  $\wp$ -Funktion). (a) Sind  $z, w \in \mathbb{C}$  komplexe Zahlen mit  $z, w, z + w, z - w \notin \Lambda$ , so gilt

$$\wp(z + w) = \frac{1}{4} \left( \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)} \right)^2 - \wp(z) - \wp(w).$$

(b) Ist  $z \in \mathbb{C}$  mit  $2z \notin \Lambda$ , so gilt

$$\wp(2z) = \frac{(\wp(z)^2 + \frac{1}{4}g_2)^2 + 2g_3\wp(z)}{4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3},$$

wobei  $g_2$  und  $g_3$  die Weierstraßkonstanten von  $\Lambda$  sind.

*Beweis.* Nach Voraussetzung sind

$$P := [1 : \wp(z) : \wp'(z)], \quad Q := [1 : \wp(w) : \wp'(w)], \quad R := [1 : \wp(z + w) : -\wp'(z + w)]$$

<sup>74</sup>Étienne Bézout (1730-1783)

<sup>75</sup>Eine Komponente einer projektiven Kurve entspricht einem irreduziblen homogenen Faktor des zugehörigen Polynoms.

drei verschiedene Punkte aus dem endlichen Teil von  $\tilde{C}(g_2, g_3)$ , die  $P + Q + R = 0$  erfüllen. Nach Satz 3.49 liegen sie also auf einer Geraden in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Betrachten wir die Situation nun nach Anwendung der Identifikation von  $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$  mit  $\mathbb{C}^2$  aus Teil (a) von Proposition 3.42. Dann liegen die drei Punkte

$$(\wp(z), \wp'(z)), \quad (\wp(w), \wp'(w)), \quad (\wp(z+w), -\wp'(z+w))$$

auf der Geraden

$$X_2 = \underbrace{\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}}_{=:m} X_1 + \underbrace{\frac{\wp'(w)\wp(z) - \wp(w)\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(w)}}_{=:b}$$

in  $\mathbb{C}^2$ . Da sie andererseits nach Konstruktion Lösungen der Differentialgleichung 3.27 von  $\wp$  sind, folgt, dass  $\wp(z), \wp(w), \wp(z+w)$  Nullstellen des kubischen Polynoms

$$4X_1^3 - g_2X_1 - g_3 - (mX_1 + b)^2$$

sind. Da sie nach Voraussetzung paarweise verschieden sind, gibt es keine weiteren Nullstellen mehr. Es gilt also

$$4X_1^3 - m^2X_1^2 - (g_2 + 2mb)X_1 - (g_3 + b^2) = 4(X_1 - \wp(z))(X_1 - \wp(w))(X_1 - \wp(z+w)),$$

und durch Koeffizientenvergleich bei den quadratischen Termen erhalten wir

$$\wp(z) + \wp(w) + \wp(z+w) = \frac{m^2}{4}.$$

Das ist gerade das zu beweisende Additionstheorem (a).

Zum Beweis von Teil (b) halten wir in der Formel von Teil (a) die Variable  $w$  fest und führen den Grenzübergang  $z \rightarrow w$  durch. Aus den Entwicklungen (vgl. Proposition 3.26)

$$\begin{aligned} \wp'(z) - \wp'(w) &= \wp''(w)(z-w) + \text{höhere Potenzen von } (z-w), \\ \wp(z) - \wp(w) &= \wp'(w)(z-w) + \text{höhere Potenzen von } (z-w) \end{aligned}$$

folgt

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)} = \frac{\wp''(w)}{\wp'(w)}.$$

Wir erhalten so

$$\wp(2z) = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\wp''(w)}{\wp'(w)} \right)^2 - 2\wp(z).$$

Die Behauptung folgt, wenn wir  $\wp'$  mit der Differentialgleichung 3.27 von  $\wp$  und  $\wp''$  mit der Folgerung  $2\wp'' = 12\wp^2 - g_2$  daraus ersetzen.  $\square$

## Übungsaufgaben

**Aufgabe 3.1.** Beweisen Sie Bemerkung 3.2.

**Aufgabe 3.2.** Wir können den für die Theorie der kompakten Riemann'schen Flächen zentralen **Satz von Riemann-ROCH**<sup>76</sup> anhand von Periodentori und der Riemann'schen Zahlenkugel  $\overline{\mathbb{C}}$  erläutern.

Sei im Folgenden  $X$  eine kompakte Riemann'sche Fläche. Die Menge

$$\mathcal{D}(X) := \{D : X \rightarrow \mathbb{Z} \mid D(x) = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } x \in X\}$$

zusammen mit der punktweisen Addition von Abbildungen  $X \rightarrow \mathbb{Z}$  bildet eine abelsche Gruppe, deren Elemente **Divisoren** heißen. Der Gruppenhomomorphismus

$$\deg : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad D \mapsto \sum_{x \in X} D(x),$$

ordnet jedem Divisor  $D \in \mathcal{D}(X)$  seinen **Grad**  $\deg(D)$  zu. Wegen der Kompaktheit von  $X$  ist die Summe endlich und der Grad eines Divisors somit wohldefiniert. Zu einem beliebigen Divisor  $D \in \mathcal{D}(X)$  ist offensichtlich

$$\mathcal{L}(D) := \{f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\} \mid \infty\text{-ord}(f; x) - 0\text{-ord}(f; x) \leq D(x) \text{ für alle } x \in X\} \cup \{0\}$$

ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Die Frage nach seiner Dimension nennt man das **Riemann-Roch-Problem**. Eine teilweise Antwort darauf liefert der Satz von Riemann-Roch mit der Formel

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - D) = \deg(D) - g + 1,$$

in der  $g$  das **Geschlecht** von  $X$  bezeichnet und  $K \in \mathcal{D}(X)$  einen so genannten **kanonischen Divisor** auf  $X$ . Das Geschlecht einer kompakten Riemann'schen Fläche führen wir in Abschnitt 4.5 ein. Anschaulich ist jede kompakte Riemann'sche Fläche  $X$  topologisch zu einer Sphäre mit einer gewissen Anzahl von „Henkeln“ äquivalent, und diese Anzahl nennt man das Geschlecht  $g$  von  $X$ . Speziell gilt  $g = 0$  für die Riemann'sche Zahlenkugel und  $g = 1$  für einen beliebigen Periodentorus. Auf die Definition eines kanonischen Divisors kann an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Es gilt jedoch zu beachten, dass nach Teil (a)  $\deg(K) = 2g - 2$  gilt. Auf diese Weise spezialisiert sich der Satz von Riemann-Roch für  $\overline{\mathbb{C}}$  bzw. Periodentori auf die in den Teilen (f) und (i) behaupteten Formeln.

- (a) Für den Nulldivisor  $D = 0$  mit  $D(x) = 0$  für alle  $x \in X$ , gilt  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = 1$ .
- (b) Für  $D \in \mathcal{D}(X)$  mit  $\deg(D) < 0$  gilt  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = 0$ .
- (c) Für  $D \in \mathcal{D}(X) \setminus \{0\}$  mit  $\deg(D) = 0$  folgt aus  $0 \neq f \in \mathcal{L}(D)$  bereits

$$\infty\text{-ord}(f; x) - 0\text{-ord}(f; x) = D(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Für  $D \in \mathcal{D}(X)$  mit  $\deg(D) = 0$  gilt also  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) \in \{0, 1\}$ .

**Hinweis:** Betrachten Sie den Grad von  $f$  wie in Proposition 1.43.

---

<sup>76</sup>Gustav Roch (1839-1866)

(d) Sei  $n > 0$  eine ganze Zahl und  $x_0 \in X$ . Ist  $D$  von der Form

$$D(x) = \begin{cases} n & \text{für } x = x_0, \\ 0 & \text{für } x \in X \setminus \{x_0\}, \end{cases} \quad (\star)$$

dann gilt  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) \leq n + 1$ .

**Hinweis:** Wählen Sie eine Karte  $\varphi : U \rightarrow V$  um  $x_0$  und betrachte in dieser Karte die Laurent-entwicklungen der meromorphen Funktionen  $(\varphi^{-1} \circ f) : V \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  mit  $f \in \mathcal{L}(D)$  um  $\varphi(x_0)$ .

(e) Für  $D \in \mathcal{D}(X)$  mit  $\deg(D) > 0$  gilt  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) < \infty$ .

(f) Für  $D \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{C}})$  mit  $\deg(D) \geq 0$  gilt  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = \deg(D) + 1$ .

**Hinweis:** Verwenden Sie das Abel'sche Theorem 2.17 auf  $\overline{\mathbb{C}}$ . Betrachte zuerst den Fall  $D(x) \geq 0$  für alle  $x \in \overline{\mathbb{C}}$ . Der allgemeine Fall lässt sich dann wie folgt auf diesen Fall zurückführen. Zu  $0 \neq f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$  bezeichne  $D_f \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{C}})$  den durch

$$D_f(x) := \infty\text{-ord}(f; x) - 0\text{-ord}(f; x) \quad \text{für alle } x \in \overline{\mathbb{C}}$$

gegebenen Divisor. Dann ist

$$\mathcal{L}(D) \rightarrow \mathcal{L}(D + D_f), \quad g \mapsto f \cdot g,$$

ein Isomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen.

Sei nun speziell  $D \in \mathcal{D}(\mathbb{C}/\Lambda)$  für ein Gitter  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ .

(g) Sei  $n > 0$  eine ganze Zahl und  $x_0 \in \mathbb{C}/\Lambda$  für ein Gitter  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ . Sei  $D \in \mathcal{D}(\mathbb{C}/\Lambda)$  von der Form (★). Bestimme  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D)$  für  $n \in \{1, 2\}$ .

(h) Sei  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  ein Gitter und  $D \in \mathcal{D}(\mathbb{C}/\Lambda) \setminus \{0\}$  mit  $\deg(D) = 0$ . Unter welcher Bedingung an  $D$  ist  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = 1$ ?

**Hinweis:** Verwenden Sie Teil (b) und das Abel'sche Theorem 3.38 für Tori.

(i) Sei  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  ein Gitter und  $D \in \mathcal{D}(\mathbb{C}/\Lambda)$  mit  $\deg(D) > 0$  und  $D(x) \geq 0$  für alle  $x \in X$ .<sup>77</sup> Dann gilt  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = \deg(D)$ .

**Hinweis:** Verwenden Sie das Abel'sche Theorem 3.38 für Tori.

<sup>77</sup>Die Annahme  $D(x) \geq 0$  für alle  $x \in X$  ist nicht notwendig, vereinfacht aber den Beweis.

---

## Modulfunktionen und Modulformen

---

In diesem Kapitel werden wir mit den so genannten Modulkurven eine weitere Klasse Riemann'scher Flächen und meromorpher Funktionen darauf kennenlernen. Ähnlich wie in Kapitel 3 werden wir diese (cum grano salis) als Quotient einer bekannten Riemann'schen Fläche nach einer darauf operierenden Gruppe einführen. Anstelle von Quotienten  $\mathbb{C}/\Lambda$  mit einem via Translationen operierenden Gitter  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  werden wir nun jedoch Quotienten  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  mit einer via Möbiustransformationen operierenden Untergruppe  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  betrachten. Letzteres ist deutlich schwieriger; ein Hauptgrund hierfür ist, dass die von uns betrachteten Untergruppen  $\Gamma$  nicht kommutativ sind.

Ab Abschnitt 4.8 lösen wir uns ein wenig aus dem Korsett der bisher studierten Fragestellungen und erweitern die Menge der von uns untersuchten Funktionen: Statt nur meromorphe Funktionen auf Modulkurven zu betrachten studieren wir in Verallgemeinerung so genannte Modulformen. Diese spielen aktuell in der analytischen und der algebraischen Zahlentheorie eine gewichtige Rolle und sollen hier auch vorgestellt werden.

### 4.1 Klassifikation von Möbiustransformationen

**Definition 4.1.** Sei  $G = (G, \star)$  eine Gruppe und  $S$  eine Menge. Man sagt dann,  $G$  *operiere* (von links) auf  $S$ ,<sup>78</sup> falls es eine Abbildung

$$\circ : \begin{cases} G \times S & \rightarrow S, \\ (g, s) & \mapsto g \circ s \end{cases}$$

gibt mit

---

<sup>78</sup>Um nicht mit der Verwendung des Wortes „Operation“ unguete Assoziationen zu wecken, werden wir im Folgenden stets von der *Aktion* der Gruppe  $G$  auf der Menge  $S$  sprechen, wenn  $G$  auf  $S$  operiert.<sup>79</sup>

<sup>79</sup>Umgekehrt klingt es auch nicht besonders schön zu sagen, die Gruppe  $G$  „agiere“ auf  $S$ . Unsere Notation ist in diesem Fall also eine zusammengesetzte.

- (i) Das neutrale Element  $e_G$  von  $G$  erfüllt  $e_G \circ s = s$  für alle  $s \in S$ .  
(ii) Es gilt  $(g \star h) \circ s = g \circ (h \circ s)$  für alle  $g, h \in G$  und alle  $s \in S$ .

Weiter nennt man

- $G_s := \{g \in G \mid g \circ s = s\}$  den **Stabilisator** von  $s$  in  $G$ ,
- $G \circ s := \{g \circ s \mid g \in G\}$  die **Bahn** von  $s$  unter  $G$ .

Durch  $t \sim s : \iff t \in G \circ s$  ist eine Äquivalenzrelation auf  $S$  gegeben, und man hat eine disjunkte Zerlegung

$$S = \bigsqcup_j (G \circ s_j),$$

wobei  $s_j$  ein Vertretersystem der verschiedenen Bahnen durchläuft. Gibt es dabei nur eine Bahn, so nennt man die Aktion von  $G$  auf  $S$  auch **transitiv**.

Aus Funktionentheorie 1 wissen wir, dass die Gruppe

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) = \{M \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid \det M \neq 0\}$$

transitiv auf der Riemann'schen Zahlenkugel  $\overline{\mathbb{C}}$  operiert. Dies geschieht durch die Zuordnung

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \overline{\mathbb{C}} &\rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \\ (M, z) &\mapsto \varphi_M(z) = M \langle z \rangle, \end{aligned}$$

wobei  $\varphi_M \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$  mit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  die durch

$$\varphi_M(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{d} & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty \end{cases} \quad \text{für } c = 0,$$

$$\varphi_M(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, \\ \infty & \text{für } z = -\frac{d}{c}, \\ \frac{a}{c} & \text{für } z = \infty \end{cases} \quad \text{für } c \neq 0$$

gegebene MÖBIUSTRANSFORMATION<sup>80</sup> bezeichnet. Wir wollen nun die Elemente von  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  danach klassifizieren, wie sie auf  $\overline{\mathbb{C}}$  operieren.

Der Satz über die JORDAN'sche Normalform<sup>81</sup> besagt, dass jedes  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  konjugiert zu einer der folgenden Matrizen ist

- (i)  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  mit  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ ,  
(ii)  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  mit  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ ,

<sup>80</sup>August Ferdinand Möbius (1790-1868)

<sup>81</sup>Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922)

(iii)  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  mit  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}^\times$ .

In Fall (i) ist hierbei  $\varphi_M$  trivial. In Fall (ii) ist  $\varphi_M$  im Wesentlichen<sup>82</sup> eine Translation

$$z \mapsto \begin{cases} z + \lambda^{-1} & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

und  $M$  heißt *parabolisch*. In Fall (iii) ist die Transformation im Wesentlichen<sup>82</sup> eine Homothetie

$$z \mapsto \begin{cases} cz & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty \end{cases} \quad \text{mit } c \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\},$$

und  $M$  heißt *elliptisch*, falls  $|c| = 1$ , *hyperbolisch*, falls  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  und ansonsten *loxodromisch*. Diese Bezeichnungen gelten nicht nur für die jeweilige Matrix  $M$  sondern auch für die zugehörige Möbiustransformation  $\varphi_M$ .

Wenn wir uns auf Matrizen aus  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  beschränken,<sup>83</sup> können wir die Möbiustransformationen über die Spur der zugehörigen Matrizen klassifizieren.<sup>84</sup>

**Proposition 4.2.** Sei  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \setminus \{\pm I_2\}$ . Dann gilt

$$M \text{ ist } \begin{cases} \text{parabolisch} & \iff \mathrm{tr}(M) \in \{\pm 2\}, \\ \text{elliptisch} & \iff \mathrm{tr}(M) \in \mathbb{R} \text{ und } |\mathrm{tr}(M)| < 2, \\ \text{hyperbolisch} & \iff \mathrm{tr}(M) \in \mathbb{R} \text{ und } |\mathrm{tr}(M)| > 2, \\ \text{loxodromisch} & \iff \mathrm{tr}(M) \notin \mathbb{R}. \end{cases}$$

*Beweis.* Wegen  $\det M = 1$  und  $M \notin \{\pm I_2\}$  ist die Jordan'sche Normalform von  $M$  von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{C}^\times \setminus \{\pm 1\}.$$

Die erste Äquivalenz ist damit offensichtlich, und wir müssen uns nur noch mit Matrizen beschäftigen, deren Normalform vom zweiten Typ ist.

Ist nun  $M$  elliptisch, so gilt für das zugehörige  $\lambda$  nach Definition  $|\lambda|^2 = 1$ ; es liegt also auf dem Einheitskreis. Mit  $\lambda \notin \{\pm 1\}$  folgt

$$\mathrm{tr}(M) = \lambda + \lambda^{-1} = \lambda + \bar{\lambda} = 2\mathrm{Re}(\lambda) \in (-2, 2) \subseteq \mathbb{R}.$$

Ist  $M$  hyperbolisch, so gilt für das zugehörige  $\lambda$  nach Definition  $\lambda^2 \in \mathbb{R}_{>0}$  und insbesondere  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Es folgt

$$|\mathrm{tr}(M)| = |\lambda| + |\lambda|^{-1} > 2 \iff |\lambda|^2 + 1 > 2|\lambda| \iff (|\lambda| - 1)^2 > 0.$$

<sup>82</sup>Bis auf den Beitrag der Konjugationsmatrizen: Möbiustransformationen sind im Allgemeinen nicht konjugationsinvariant. Eine offensichtliche Ausnahme bildet Fall (i), in dem die betrachteten Matrizen im Zentrum liegen.

<sup>83</sup>Keine starke Einschränkung, da das Zentrum  $\mathbb{C} \cdot I_2$  ja trivial operiert.

<sup>84</sup>Das ist naheliegend, da ja aus der Linearen Algebra bekannt ist, dass die Spur konjugationsinvariant ist.

Letztere Aussage ist korrekt wegen  $\lambda \notin \{\pm 1\}$ .

Sei nun umgekehrt  $M$  konjugiert zu  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$  mit reeller Spur  $\lambda + \lambda^{-1}$ . Falls  $\lambda$  reell ist, muss  $M$  nach Definition hyperbolisch sein. Ist  $\lambda$  nicht reell, so folgt mit  $\lambda^{-1} = \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|^2}$  sofort  $|\lambda| = 1$ , und  $M$  ist elliptisch.

Nebenbei haben wir mit dem letzten Argument gezeigt, dass  $M$  nicht loxodromisch sein kann, wenn seine Spur reell ist. Die letzte Äquivalenz folgt, da die vier Bedingungen auf der rechten Seite sich paarweise gegenseitig ausschließen.  $\square$

Wir schränken uns nun noch weiter auf Matrizen aus  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  ein. Dann gilt

**Proposition 4.3.** (a) Die Gruppe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  operiert transitiv auf der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$ .

(b)  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ .

(c) Es gilt die Bijektion von Mengen  $\mathbb{H} \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ .<sup>85</sup>

*Beweis.* Als Untergruppe von  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  operiert  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  auf der Riemann'schen Zahlenkugel  $\bar{\mathbb{C}}$ . Um zu zeigen, dass  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  auf der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$  operiert, langt es daher zu zeigen, dass für jedes  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  und jedes  $z \in \mathbb{H}$  der Bildpunkt  $M\langle z \rangle$  wieder in  $\mathbb{H}$  liegt. Das ist der Fall, denn in dieser Situation gilt

$$\mathrm{Im}(M\langle z \rangle) = \mathrm{Im} \left( \frac{az + b}{cz + d} \right) = \mathrm{Im} \left( \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2} \right) \stackrel{\det M=1}{=} \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz + d|^2} > 0. \quad (4.1)$$

Um die Transitivität der Gruppenaktion zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass es für alle  $z = x + iy \in \mathbb{H}$  ein  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  mit  $M\langle i \rangle = z$  gibt. Das ist der Fall, denn in dieser Situation gilt

$$\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \langle i \rangle = \frac{\sqrt{y}i + \frac{x}{\sqrt{y}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} = x + iy = z.$$

Insgesamt haben wir somit Behauptung (a) gezeigt.

Wir wollen nun Behauptung (b) zeigen. Zum einen gilt für ein  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

$$M\langle i \rangle = i \iff a = d \text{ und } b = -c.$$

Zum anderen folgt in dieser Situation aus  $\det(M) = 1$  auch  $a^2 + b^2 = 1$ , und wir sind fertig.

Behauptung (c) ergibt sich schließlich wie folgt. Nach (a) gilt zunächst

$$\mathbb{H} \cong \{ \{ M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid M\langle i \rangle = z \} \mid z \in \mathbb{H} \}.$$

<sup>85</sup>Versieht man  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  mit der Teilraumtopologie von  $\mathbb{R}^{2 \times 2} \cong \mathbb{R}^4$ , so wird diese Bijektion sogar zu einem Homöomorphismus.

<sup>86</sup>Da wir  $z \in \mathbb{H}$  gewählt haben, entfällt die bei Möbiustransformationen sonst übliche Fallunterscheidung und wir können einheitlich  $M\langle z \rangle = \frac{az+b}{cz+d}$  schreiben.

Da sich nach (b) zwei Matrizen aus  $SL_2(\mathbb{R})$ , die beide  $i$  auf das selbe  $z \in \mathbb{H}$  abbilden, durch einen Faktor aus  $SO_2(\mathbb{R})$  unterscheiden, folgt die Behauptung.<sup>87</sup>  $\square$

Es fällt nun auf, dass es in  $SL_2(\mathbb{R})$  nach Proposition 4.2 keine loxodromischen Elemente geben kann. Die restlichen Typen lassen sich über die Fixpunkte der zugehörigen Möbiustransformationen klassifizieren.

**Proposition 4.4.** Sei  $M \in SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ . Dann gilt

$$M \text{ ist } \begin{cases} \text{parabolisch} & \iff \varphi_M \text{ hat genau einen Fixpunkt, und dieser liegt in } \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \\ \text{elliptisch} & \iff \varphi_M \text{ hat genau zwei Fixpunkte, diese sind zueinander konjugiert} \\ & \text{und einer von ihnen liegt in } \mathbb{H}, \\ \text{hyperbolisch} & \iff \varphi_M \text{ hat genau zwei Fixpunkte, und diese liegen in } \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \end{cases}$$

*Beweis.* Nach Teil (a) von Proposition 4.3 gibt es zu jedem  $z \in \mathbb{H}$  ein  $M \in SL_2(\mathbb{R})$  mit  $M\langle i \rangle = z$ . Nach Teil (b) der selben Proposition gilt

$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{R})_z &= M \cdot SO_2(\mathbb{R}) \cdot M^{-1} \\ &= M \cdot \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a^2 + b^2 = 1 \right\} \cdot M^{-1} \\ &= M \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in [0, 2\pi) \right\} \cdot M^{-1}. \end{aligned}$$

Der Stabilisator von  $z$  in  $SL_2(\mathbb{R})$  besteht also ausschließlich aus Matrizen, die in  $GL_2(\mathbb{C})$  konjugiert zu einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varphi \in [0, 2\pi)$$

sind. Mit der Ausnahme von  $\pm I_2$  haben daher Elemente von  $SL_2(\mathbb{R})$ , die ein  $z \in \mathbb{H}$  festlassen, je zwei verschiedene Eigenwerte von Betrag 1, sind definitionsgemäß also elliptisch.

Andererseits ist  $SO_2(\mathbb{R})$  auch der Stabilisator von  $-i$ , und mit  $M\langle i \rangle = z$  gilt offensichtlich auch  $M\langle -i \rangle = \bar{z}$ . Ein Element von  $SL_2(\mathbb{R})$ , das ein  $z \in \mathbb{H}$  stabilisiert, lässt also auch dessen komplex konjugiertes  $\bar{z} \in \overline{\mathbb{H}}$  fest.<sup>88</sup> In Funktionentheorie 1 haben wir eingesehen, dass jede nichttriviale

<sup>87</sup>Behauptung (c) ist ein Spezialfall der Feststellung, dass für die Linksaktion einer Gruppe  $G$  auf einer Menge  $X$  für alle Elemente  $x \in X$  die Bijektion  $G/G_x \cong Gx$  gilt. Letztere Feststellung lässt sich ebenfalls recht schnell beweisen. Tatsächlich gilt für die surjektive Abbildung

$$\varphi_x : G \rightarrow Gx; \quad g \mapsto gx$$

und zwei beliebige  $g, h \in G$

$$\varphi(g) = \varphi(h) \iff gx = hx \iff h^{-1}gx = x \iff h^{-1}g \in G_x \iff gG_x = hG_x,$$

so dass  $\varphi$  mit dem Homomorphiesatz die gewünschte Bijektion induziert.

<sup>88</sup> $\overline{\mathbb{H}}$  bezeichnet hier die untere Halbebene der komplexen Zahlen mit negativem Imaginärteil.

Möbiustransformation höchstens zwei Fixpunkte in  $\overline{\mathbb{C}}$  hat. Es folgt, dass jedes Element von  $SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$  höchstens ein  $z \in \mathbb{H}$  stabilisieren kann.

Zusammengefasst: Wenn ein Element von  $SL_2(\mathbb{R})$  ein  $z \in \mathbb{H}$  stabilisiert, dann ist es entweder  $\pm I_2$  oder elliptisch. In letzterem Fall sind  $z$  und  $\bar{z}$  die einzigen Fixpunkte.

Sei nun  $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Die Gruppe  $SL_2(\mathbb{R})$  operiert transitiv auf  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,

denn: Klar, dass  $SL_2(\mathbb{R})$  operiert. Die Transitivität folgt, da  $s \in \mathbb{R}$  von  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -s \end{pmatrix}$  nach  $\infty$  geschickt wird. #

Sei also  $M \in SL_2(\mathbb{R})$  eine Matrix mit  $M\langle\infty\rangle = s$ . Wie für die Stabilisatoren in der oberen Halbebene gilt

$$SL_2(\mathbb{R})_s = M \cdot SL_2(\mathbb{R})_\infty \cdot M^{-1}. \quad (4.2)$$

Der Stabilisator von  $\infty$  ist außerdem leicht zu bestimmen; es gilt nämlich

$$SL_2(\mathbb{R})_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ein Element von  $SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$  mit mindestens einem Fixpunkt in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  hat demnach reelle Eigenwerte, ist also entweder parabolisch oder hyperbolisch. Eine parabolische Transformation hat als Konjugat einer Translation offensichtlich nur einen Fixpunkt in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , eine hyperbolische Transformation als Konjugat der Multiplikation mit einem  $c \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$  zwei.

Da die Zerlegung von  $SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$  in elliptische, parabolische und hyperbolische Elemente disjunkt ist, folgt die Proposition.  $\square$

**Proposition 4.5.** *Seien  $M \in SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$  und  $m \in \mathbb{Z}$  mit  $M^m \neq \pm I_2$ . Dann gilt:  $M^m$  ist genau dann elliptisch bzw. parabolisch bzw. hyperbolisch, wenn  $M$  es auch ist.*

*Beweis.* Die Rückrichtung folgt unmittelbar aus Proposition 4.4 und der Tatsache, dass wegen 4.2 jede Potenz einer parabolischen Matrix wieder parabolisch ist. Die Hinrichtung folgt dann mit der vollständigen Zerlegung von  $SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$  in elliptische, parabolische und hyperbolische Elemente.  $\square$

**Definition 4.6.** *Sei  $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{R})$  eine Untergruppe. Dann definieren wir*

- (a) *Ein Punkt  $z \in \mathbb{H}$  heißt ein **elliptischer Punkt** bezüglich  $\Gamma$ , wenn es ein elliptisches Element  $M \in \Gamma$  gibt mit  $M\langle z \rangle = z$ .*
- (b) *Ein Punkt  $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  heißt ein **parabolischer Punkt** oder eine **Spitze** bezüglich  $\Gamma$ , wenn es ein parabolisches Element  $M \in \Gamma$  gibt mit  $M\langle s \rangle = s$ .*

**Proposition 4.7.** *Sei  $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{R})$  eine Untergruppe, und sei  $z \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  ein elliptischer bzw. parabolischer Punkt bezüglich  $\Gamma$  mit einem elliptischen bzw. parabolischen  $M \in \Gamma$  mit  $M\langle z \rangle = z$ . Dann ist für alle  $A \in \Gamma$  auch  $A\langle z \rangle$  wieder elliptisch bzw. parabolisch.*

*Beweis.* Mit  $M$  ist auch  $AMA^{-1}$  elliptisch bzw. parabolisch, und es gilt

$$(AMA^{-1})\langle A\langle z \rangle \rangle = A\langle z \rangle.$$

□

**Definition 4.8.** Eine Teilmenge  $F \subseteq \mathbb{H}$  heißt **Fundamentbereich** für die Aktion einer Untergruppe  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  auf  $\mathbb{H}$ , wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt.<sup>89</sup>

- (i)  $F$  ist zusammenhängend und abgeschlossen in  $\mathbb{H}$ .<sup>90</sup>
- (ii) Jeder Punkt  $z \in \mathbb{H}$  ist zu einem Punkt in  $F$  äquivalent.
- (iii) Je zwei verschiedene Punkte aus dem Inneren von  $F$  sind inäquivalent.

## 4.2 Die volle Modulgruppe

Wir wollen in diesem Abschnitt die bisher eingeführten Begriffe für die Aktion der *vollen Modulgruppe*  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  explizit bestimmen.

**Proposition 4.9.** (a) Die Menge der Spitzen von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist durch  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  gegeben.

(b) Jedes parabolische Element von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist von der Form  $M \cdot A \cdot M^{-1}$  mit  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  und

$$A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \{\pm I_2\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

*Beweis.* Sei  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ein beliebiges parabolisches Element von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Nach Proposition 4.4 hat dann  $\varphi_M$  genau einen Fixpunkt  $s$ . Ist  $s \neq \infty$ , so folgt sofort  $c \neq 0$ ,<sup>91</sup> und es gilt

$$s = M\langle s \rangle = \frac{as + b}{cs + d}.$$

<sup>89</sup>Wir sind hier fast in der selben Situation wie bei der Definition 3.1 der Fundamentalmasche eines Gitters. Tatsächlich müssen wir unsere Definition nur leicht modifizieren, damit sie auch dort gilt: Sei  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  ein Gitter. Dann operiert die Gruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \omega \in \Lambda \right\}$$

über Möbiustransformationen auf  $\mathbb{C}$ , und für die Fundamentalmasche  $\mathcal{F}_\Lambda$  gilt

- (i)  $\mathcal{F}_\Lambda$  ist zusammenhängend und abgeschlossen in  $\mathbb{C}$ .
- (ii) Jeder Punkt  $z \in \mathbb{C}$  ist modulo  $\Lambda$  zu einem Punkt in  $\mathcal{F}_\Lambda$  äquivalent.
- (iii) Je zwei verschiedene Punkte aus dem Inneren von  $\mathcal{F}_\Lambda$  sind modulo  $\Lambda$  verschieden.

<sup>90</sup> $\mathbb{H}$  ist mit der Teilraumtopologie bezüglich  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  ausgestattet.

<sup>91</sup>Ist  $c = 0$ , so liegt  $M$  in

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Da parabolische Elemente genau einen Punkt aus  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  stabilisieren, folgt entgegen unserer Annahme  $s = \infty$ .

Der Punkt  $s$  ist also eine Nullstelle des quadratischen Polynoms

$$\begin{aligned} cX^2 + (d-a)X - b &= cX^2 + (d-a)X + \frac{1-ad}{c} && (ad - bc = \det(M) = 1) \\ &= cX^2 + (d-a)X + \frac{(a+d)^2 - 4ad}{4c} && ((a+d)^2 = \operatorname{tr}(M)^2 = 4) \\ &= cX^2 + (d-a)X + \frac{(a-d)^2}{4c} \\ &= c \cdot \left(X - \frac{a-d}{2c}\right)^2, \end{aligned}$$

also offensichtlich in  $\mathbb{Q}$ . Es folgt, dass die Menge der Spitzen in  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  enthalten ist.

Umgekehrt ist der Punkt  $\infty$  tatsächlich eine Spitze von  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ , denn es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle \infty \rangle = \infty \quad \text{und} \quad \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Ist weiter  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  mit  $p, q \in \mathbb{Z}$  und  $\operatorname{ggT}(p, q) = 1$ , so finden wir mit dem Euklid'schen Algorithmus zwei ganze Zahlen  $u, t$  mit  $pt - uq = 1$ . Es folgt

$$\begin{pmatrix} p & u \\ q & t \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} p & u \\ q & t \end{pmatrix} \langle \infty \rangle = \frac{p}{q}.$$

Mit Proposition 4.7 ist dann auch  $\frac{p}{q}$  eine Spitze, so dass wir nun insgesamt Teil (a) der Proposition gezeigt haben.

Teil (b) folgt sofort, da jedes parabolische Element (genau) eine Spitze stabilisiert und die Stabilisatoren der Spitzen gerade die  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Konjugate von  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$  sind.  $\square$

**Bemerkung 4.10.** Im Beweis von Proposition 4.9 haben wir sogar mehr gezeigt als behauptet, wir haben nämlich gezeigt, dass die Menge der Spitzen von  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$  nichts anderes als die  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Bahn von  $\infty$  ist. Die Spitzen von  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$  bilden also bezüglich der in Definition 4.1 eingeführten Äquivalenzrelation eine Äquivalenzklasse.

**Proposition 4.11.** (a) Die Menge der elliptischen Punkte von  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist durch  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})\langle i \rangle \cup \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})\langle \rho \rangle$  mit  $\rho = e^{2\pi i/3}$  gegeben.

(b) Jedes elliptische Element von  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist von der Form  $M \cdot A \cdot M^{-1}$  mit  $M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$  und

$$A \in (\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})_i \cup \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})_\rho) \setminus \{\pm I_2\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

*Beweis.* Ist  $M$  ein elliptisches Element von  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ , so ist

$$\operatorname{tr}(M) \in \{-1, 0, 1\}$$

nach Proposition 4.2. Für das charakteristische Polynom von  $M$  folgt somit

$$\operatorname{charpoly}(M) = X^2 - \operatorname{tr}(M)X + \det(M) \in \{X^2 + 1, X^2 \pm X + 1\}.$$

Nehmen wir nun an, es gelte  $\text{charpoly}(M) = X^2 + 1$ , das heißt  $\text{tr}(M) = 0$  und  $\det(M) = 1$ . Zu zeigen ist dann, dass jede Matrix  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$  mit  $\det(M) = -a^2 - bc = 1$  konjugiert zu einer der Matrizen  $\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ist. Wir können dabei ohne Einschränkung annehmen, dass  $a$  von allen Zahlen  $a + c\mathbb{Z}$  den kleinsten Absolutbetrag hat und also  $|c| \geq 2|a|$  gilt,

denn: Hat  $a + ck$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  den kleinsten Absolutbetrag aller Zahlen  $a + c\mathbb{Z}$ , so betrachten wir statt  $M$  die dazu konjugierte Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ck & -2ak - ck^2 + b \\ c & -(a + ck) \end{pmatrix}.$$

#

Ohne Einschränkung dürfen wir dann außerdem annehmen, dass  $|b| \leq |a|$  gilt,

denn: Gilt nämlich  $|b| > |a|$ , so folgt

$$1 = \det(M) = -a^2 - bc \stackrel{-bc > 0}{=} -a^2 + |b||c| \geq -a^2 + 2|a||b| > -a^2 + 2a^2 = a^2$$

und somit  $a = 0$ . Es folgt  $M \in \{\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ , und wir sind fertig. #

Es gibt daher eine Zahl  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ , für die die Diagonaleinträge der zu  $M$  konjugierten Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \varepsilon b & b \\ -2\varepsilon a + c - b & -(a + \varepsilon b) \end{pmatrix}.$$

einen echt kleineren Absolutbetrag haben als  $a$ . Ist dieser Betrag gleich Null, so ist die neue Matrix in  $\{\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$  enthalten, und wir sind fertig. Ansonsten wiederholen wir die gesamte Argumentation rekursiv mit der jeweils neu erhaltenen Matrix. Da der Absolutbetrag der Diagonaleinträge dabei in jedem Schritt echt kleiner wird, terminiert dieser Algorithmus, und die Behauptung ist bewiesen.

Ganz ähnlich zeigt man den Fall  $\text{charpoly}(M) = X^2 \pm X + 1$  (Übung!) und somit Behauptung (b). Behauptung (a) folgt, indem man für jedes elliptische Element  $M \cdot A \cdot M^{-1}$  die quadratische Gleichung  $MAM^{-1}\langle z \rangle = z$  löst. Wegen

$$MAM^{-1}\langle Mz \rangle = Mz \iff A\langle z \rangle = z$$

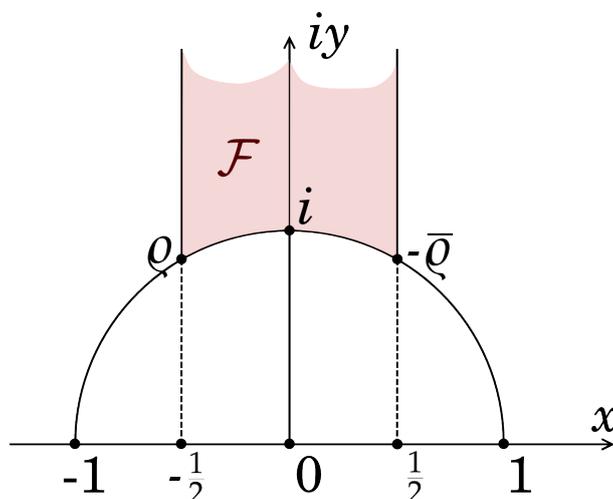
genügt es dabei, die speziellen Matrizen aus (b) zu betrachten.  $\square$

**Bemerkung 4.12.** Analog zur Bemerkung nach Proposition 4.9 stellen wir fest, dass es zwei Äquivalenzklassen elliptischer Punkte von  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  gibt, die durch  $i$  und  $\rho$  vertreten werden.

**Satz 4.13.** Die Menge

$$\mathcal{F} := \left\{ z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1 \text{ und } |\text{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

ist ein Fundamentalbereich für die Aktion von  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  auf  $\mathbb{H}$ .



*Beweis.* Wir müssen die drei Bedingungen (i)-(iii) aus Definition 4.8 überprüfen. Bedingung (i), also der Zusammenhang und die Abgeschlossenheit, ist klar.

Wir wollen nun Bedingung (ii) überprüfen und erinnern uns daran, dass nach (4.1)

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2} \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$$

gilt. Jede Bahn  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})\langle z \rangle$  in  $\mathbb{H}$  enthält Punkte maximalen Imaginärteils, und diese sind charakterisiert durch

$$\operatorname{Im}(w) \text{ maximal in } \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})\langle z \rangle \iff |cw+d| \geq 1 \text{ für alle } c, d \in \mathbb{Z} \text{ mit } \operatorname{ggT}(c, d) = 1,$$

*denn:* Für ein festes  $z \in \mathbb{H}$  definiert die Ungleichung  $|cz+d| \leq 1$  ein Kompaktum in  $\mathbb{R}^2$ . Der Durchschnitt dieses Kompaktums mit dem Gitter  $\mathbb{Z}z + \mathbb{Z}$  ist endlich, so dass die Ungleichung nur endlich viele Lösungen  $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$  hat. Es gilt andererseits

$$|cz+d| \leq 1 \iff \operatorname{Im}(M\langle z \rangle) \geq \operatorname{Im}(z) \quad \text{für alle } M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Da der Imaginärteil von  $M\langle z \rangle$  nur von der zweiten Zeile von  $M$  abhängt, gibt es innerhalb einer Bahn Punkte maximalen Imaginärteils.

Sei nun  $w \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})\langle z \rangle$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(w) \text{ maximal in } \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})\langle z \rangle &\iff \operatorname{Im}(w) \geq \operatorname{Im}(M\langle z \rangle) \text{ für alle } M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ &\iff \operatorname{Im}(w) \geq \operatorname{Im}(M\langle w \rangle) \text{ für alle } M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ &\iff |cw+d| \geq 1 \text{ für alle } \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Äquivalenz benutzt haben, dass  $w$  und  $z$  in der selben Bahn liegen. Die Behauptung folgt mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \implies ad - bc = \det(M) = 1 \implies \operatorname{ggT}(c, d) = 1$$

und

$$(c, d) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } \text{ggT}(c, d) = 1 \implies \exists a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } ad - bc = 1 \text{ und also } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

wobei sich die letzte Folgerung aus dem erweiterten Euklid'schen Algorithmus ergibt. #

Nun nutzen wir aus, dass der Imaginärteil unter Anwendung von Translationen  $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  mit  $b \in \mathbb{Z}$  unverändert bleibt. Offensichtlich gibt es für jedes  $w \in \mathbb{H}$  ein  $b \in \mathbb{Z}$  mit

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle w \rangle = w + b \quad \text{mit } |\text{Re}(w + b)| \leq \frac{1}{2}.$$

Wir haben also gezeigt, dass jeder Punkt  $z \in \mathbb{H}$  zu einem Punkt in

$$\mathcal{F}' := \{z \in \mathbb{H} \mid |cz + d| \geq 1 \text{ für alle } c, d \in \mathbb{Z} \text{ mit } \text{ggT}(c, d) = 1 \text{ und } |\text{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\}$$

äquivalent ist. Bedingung (ii) folgt, wenn wir  $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$  zeigen können. Dem ist aber so,

denn: Wegen  $\text{ggT}(1, 0) = 1$  ist offensichtlich  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ .

Sei jetzt umgekehrt  $z = x + iy \in \mathcal{F}$ , und seien  $c, d \in \mathbb{Z}$  mit  $\text{ggT}(c, d) = 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |cz + d|^2 &= (cx + d)^2 + c^2y^2 = c^2(x^2 + y^2) + 2cdx + d^2 = c^2|z|^2 + 2cd\text{Re}(z) + d^2 \\ &\stackrel{z \in \mathcal{F}}{\geq} c^2 - |cd| + d^2 \geq 1, \end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung gilt, weil die quadratische Form  $X^2 - XY + Y^2$  positiv definit ist.<sup>92</sup> #

Es verbleibt Bedingung (iii) zu zeigen. Seien dafür  $z, w$  zwei Punkte aus dem Inneren von  $\mathcal{F}$  mit  $w = M\langle z \rangle$  für ein  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Ohne Einschränkung können wir annehmen, es gelte

$$\text{Im}(z) \leq \text{Im}(w) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}$$

und somit

$$|c| \cdot \text{Im}(z) = |\text{Im}(cz + d)| \leq |cz + d| \leq 1. \quad (4.3)$$

<sup>92</sup>Eine (binäre) quadratische Form  $q(X, Y)$  heißt *positiv semidefinit*, wenn

$$q(x, y) \geq 0 \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

gilt. Erfüllt sie zusätzlich

$$q(x, y) = 0 \iff (x, y) = (0, 0),$$

so heißt die Form *positiv definit*. Das ist die von uns benutzte Eigenschaft. Mit ein wenig Linearer Algebra kann man zeigen, dass  $q(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2$  genau dann positiv (semi-)definit ist, wenn die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

diese Eigenschaft hat. Im Fall von  $q(X, Y) = X^2 - XY + Y^2$  lassen sich die Eigenwerte leicht zu  $\lambda_1 = \frac{1}{2} > 0$  und  $\lambda_2 = \frac{3}{2} > 0$  berechnen; die quadratische Form ist also tatsächlich positiv definit.

Nach Definition von  $\mathcal{F}$  gilt  $\text{Im}(z) > \text{Im}(\rho) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Nach (4.3) folgt daraus  $|c| \leq 1$ .

**Fall 1:**  $|c| = 1$ . Aus (4.3) erhalten wir sofort  $|z \pm d| \leq 1$ . Andererseits gilt

$$|z + \tilde{d}| > 1 \quad \text{für alle } (z + \tilde{d}) \in (\mathcal{F} + \tilde{d}) \text{ mit } \tilde{d} \in \mathbb{Z},$$

so dass der Fall  $|c| = 1$  nicht eintreten kann.

**Fall 2:**  $c = 0$ . Wegen  $\det(M) = ad = 1$  gilt dann  $a = d \in \{\pm 1\}$  und somit

$$w = M\langle z \rangle = z \pm b.$$

Da  $z$  und  $w$  beide im Inneren von  $\mathcal{F}$  liegen, folgt  $b = 0$  und somit  $w = z$ .

Insgesamt folgt, dass  $z$  und  $w$  aus dem Inneren von  $\mathcal{F}$  nur dann äquivalent sein können, wenn sie übereinstimmen.  $\square$

**Korollar 4.14.** Die Gruppe  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  wird erzeugt von den Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deren Namensgebung ist über ihre Aktion auf der oberen Halbebene motiviert. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \varphi_S \text{ die Stürzung mit } S\langle z \rangle &= -\frac{1}{z} \text{ für alle } z \in \mathbb{H} \text{ und} \\ \varphi_T \text{ die Translation mit } T\langle z \rangle &= z + 1 \text{ für alle } z \in \mathbb{H}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei  $\langle S, T \rangle$  die von  $S$  und  $T$  erzeugte Untergruppe in  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  und  $z \in \mathbb{H}$ . Dann gibt es ein  $\tilde{M} \in \langle S, T \rangle$  mit  $\tilde{M}\langle z \rangle \in \mathcal{F}$ ,

denn: Wie im Beweis von Bedingung (ii) in Satz 4.13 sehen wir ein, dass jede  $\langle S, T \rangle$ -Bahn in  $\mathbb{H}$  Elemente maximalen Imaginärteils enthält, und wählen ein  $\tilde{M} \in \langle S, T \rangle$ , für das  $\tilde{M}\langle z \rangle$  maximalen Imaginärteil hat. Wieder wie im Beweis von Bedingung (ii) in Satz 4.13 finden wir eine natürliche Zahl  $b$  mit

$$|\text{Re}((T^b \tilde{M})\langle z \rangle)| \leq \frac{1}{2}.$$

Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass der Betrag von  $w := (T^b \tilde{M})\langle z \rangle$  mindestens 1 ist. Nehmen wir dafür an, es gälte  $|w| < 1$ . Dann erhielten wir nach Anwendung von  $S \in \langle S, T \rangle$

$$\text{Im}(S\langle w \rangle) = \frac{\text{Im}(w)}{|w|^2} > \text{Im}(w),$$

was nicht sein kann, da ja der Imaginärteil von  $w$  als maximal in  $\langle S, T \rangle\langle z \rangle$  gewählt war.  $\#$

Wir wählen nun einen festen Punkt  $z_0$  im Inneren von  $\mathcal{F}$  und eine Matrix  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Nach der soeben gezeigten Behauptung gibt es dann ein  $\tilde{M} \in \langle S, T \rangle$  mit  $(\tilde{M}M)\langle z_0 \rangle \in \mathcal{F}$ . Da  $\mathcal{F}$  insbesondere Bedingung (iii) für Fundamentalbereiche erfüllt und  $z_0$  im Inneren von  $\mathcal{F}$  gewählt war, folgt  $(\tilde{M}M)\langle z_0 \rangle = z_0$ . Da es nach Proposition 4.11 und der Definition von  $\mathcal{F}$  im Inneren von  $\mathcal{F}$  keine elliptischen Punkte gibt, folgt  $(\tilde{M}M) \in \{\pm I_2\}$  nach Proposition 4.4 und somit

$$M \in \langle -I_2, S, T \rangle \stackrel{S^2 = -I_2}{=} \langle S, T \rangle.$$

$\square$

**Korollar 4.15.** Für einen Punkt  $z \in \mathcal{F}$  ist der Stabilisator in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  gegeben durch

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_z = \begin{cases} \langle S \rangle & \text{falls } z = i, \\ \langle ST \rangle & \text{falls } z = \rho, \\ \langle TS \rangle & \text{falls } z = -\bar{\rho}, \\ \langle -I_2 \rangle & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Ordnung der erzeugenden Gruppenelemente ist hierbei 2 im Falle von  $-I_2$ , 4 im Falle von  $S$  und 6 im Falle von  $ST$  bzw.  $TS$ .

*Beweis.* Folgt direkt aus Satz 4.13 und Proposition 4.11. □

### 4.3 Kongruenzuntergruppen

In diesem Abschnitt wollen wir eine besonders wichtige Klasse von Untergruppen der vollen Modulgruppe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  betrachten, die so genannten Kongruenzuntergruppen. Um diese einzuführen müssen wir ein wenig ausholen. Sei  $N \in \mathbb{N}_{>0}$ , und sei

$$\bar{\cdot} : \begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \\ n & \mapsto \bar{n} \end{cases}$$

die kanonische Projektion modulo  $N$ . Dann ist durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

ein Gruppenhomomorphismus  $\bar{\cdot} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$  mit Kern

$$\Gamma(N) := \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid M \equiv I_2 \pmod{N}\}$$

gegeben. Nach dem Homomorphiesatz für Gruppen ist so  $\Gamma(N)$  ein Normalteiler und insbesondere eine Untergruppe von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

**Definition 4.16.** Die oben eingeführten Gruppen  $\Gamma(N)$  für  $N \in \mathbb{N}_{>0}$  heißen die **Hauptkongruenzuntergruppen** von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Eine Untergruppe  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , die eine Hauptkongruenzuntergruppe enthält, nennt man **Kongruenzuntergruppe** von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

**Beispiel 4.17.** (a) Für jedes  $N \in \mathbb{N}_{>0}$  ist

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

eine Kongruenzuntergruppe.

(b) Für jedes  $N \in \mathbb{N}_{>0}$  ist

$$\Gamma_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\}$$

eine Kongruenzuntergruppe.

Nach Übungsaufgabe 4.2 haben Kongruenzuntergruppen endlichen Index<sup>93</sup> in  $SL_2(\mathbb{Z})$ , es gibt also für jede Kongruenzuntergruppe  $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$  ein  $n \in \mathbb{N}$  und Matrizen  $A_1, \dots, A_n \in SL_2(\mathbb{Z})$  mit

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{v=1}^n \Gamma A_v. \quad (4.4)$$

Da die negative Einheitsmatrix  $-I_2$  trivial operiert, aber nicht in jeder Kongruenzuntergruppe enthalten sein muss, ist es für viele Anwendungen von Vorteil, sich dieser Matrix zu entledigen. Für eine beliebige Untergruppe  $G \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$  führen wir daher die Notation

$$\overline{G} := G \cdot \{\pm I_2\} / \{\pm I_2\}$$

ein. Hat  $G$  endlichen Index in  $SL_2(\mathbb{Z})$ , so folgt offensichtlich

$$\varepsilon \cdot [\overline{SL_2(\mathbb{Z})} : \overline{G}] = [SL_2(\mathbb{Z}) : G] \quad \text{mit } \varepsilon \in \{1, 2\}.$$

Sei nun  $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$  eine Kongruenzuntergruppe. Statt der Zerlegung (4.4) von  $SL_2(\mathbb{Z})$  in  $\Gamma$ -Nebenklassen betrachten wir nun eine Zerlegung von  $\overline{SL_2(\mathbb{Z})}$  in  $\overline{\Gamma}$ -Nebenklassen

$$\overline{SL_2(\mathbb{Z})} = \bigsqcup_{\mu=1}^m \overline{\Gamma} A_\mu \quad \text{mit } A_1, \dots, A_m \in \overline{SL_2(\mathbb{Z})}, \quad (4.5)$$

wobei in der oben eingeführten Notation  $m = n/\varepsilon$  gilt.

Da die Kongruenzuntergruppen Teilmengen von  $SL_2(\mathbb{Z})$  sind, müssen auch die zugehörigen Mengen von elliptischen und parabolischen Elementen in den entsprechenden Mengen zu  $SL_2(\mathbb{Z})$  enthalten sein. Das trifft dann nach Definition auch auf die elliptischen bzw. parabolischen Punkte zu. Tatsächlich stimmt die Menge der Spitzen bezüglich einer Kongruenzuntergruppe mit derjenigen bezüglich  $SL_2(\mathbb{Z})$  überein.

**Proposition 4.18.** *Die Menge der Spitzen bezüglich einer beliebigen Kongruenzuntergruppe  $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$  ist durch  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  gegeben.*

*Beweis.* Die eine Inklusion ist klar: Jede Spitze bezüglich  $\Gamma$  ist nach Definition insbesondere eine Spitze bezüglich  $SL_2(\mathbb{Z})$  und somit nach Proposition 4.9 in  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ .

Wir wollen nun zeigen, dass umgekehrt auch jedes  $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  tatsächlich eine Spitze bezüglich  $\Gamma$  ist. Da  $\Gamma$  eine Kongruenzuntergruppe ist, gibt es ein  $N \in \mathbb{N}_{>0}$ , für das die Hauptkongruenzuntergruppe  $\Gamma(N)$  in  $\Gamma$  enthalten ist. Mit der selben Argumentation wie gerade eben langt es dann zu zeigen, dass  $s$  von einem parabolischen Element aus  $\Gamma(N)$  stabilisiert wird. Sei  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$  eine Matrix mit  $M\langle\infty\rangle = s$ . Dann gilt

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - Nac & Na^2 \\ -Nc^2 & 1 + Nac \end{pmatrix} \in \Gamma(N),$$

wobei wir im letzten Schritt  $ad - bc = \det(M) = 1$  verwendet haben. Die Behauptung folgt, da  $\begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  den Punkt  $\infty$  stabilisiert.  $\square$

<sup>93</sup>Der *Index*  $[G : H]$  einer Untergruppe  $H$  in einer Gruppe  $G$  ist definiert als die Mächtigkeit der Menge (sic!)  $H \backslash G$  der Rechtsnebenklassen.

In Bemerkung 4.10 haben wir gezeigt, dass alle Spitzen in  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  in der selben  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Bahn liegen. Für eine beliebige Kongruenzuntergruppe  $\Gamma$  stimmt das nicht mehr: Hier kann die Menge der Spitzen in mehrere  $\Gamma$ -Bahnen zerfallen. Jede solche  $\Gamma$ -Bahn nennt man eine *Spitzenklasse* bezüglich  $\Gamma$ .

**Beispiel 4.19.** Die Punkte  $\infty$  und  $0$  liegen bezüglich  $\Gamma_0(2)$  nicht in der selben Spitzenklasse, denn: Die Menge der Matrizen in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , deren Möbiustransformationen  $\infty$  auf  $0$  schicken, ist durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid a = 0 \right\}$$

gegeben, und es ist offensichtlich, dass diese Menge leeren Schnitt mit  $\Gamma_0(2)$  hat. #

**Proposition 4.20.** Die Menge der Spitzenklassen in  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  bezüglich einer beliebigen Kongruenzuntergruppe  $\Gamma$  ist endlich.

*Beweis.* Da der Index von  $\Gamma$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  endlich ist, können wir in der Notation von (4.5)

$$\mathbb{Q} \cup \{\infty\} = \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \langle \infty \rangle = \bigcup_{\mu=1}^m \bar{\Gamma} A_\mu \langle \infty \rangle$$

schreiben. Offensichtlich enthält also die Menge  $\{A_1 \langle \infty \rangle, \dots, A_m \langle \infty \rangle\}$  ein Vertretersystem der Spitzenklassen bezüglich  $\Gamma$ , und die Proposition ist gezeigt.  $\square$

Bei den elliptischen Punkten kann verschiedenes passieren, bis dahin, dass es überhaupt keine mehr gibt. Das sieht man gut an dem folgenden Beispiel.

**Beispiel 4.21.** Für  $N \in \mathbb{N}_{>1}$  gibt es bezüglich  $\Gamma(N)$  keine elliptischen Punkte,

denn: Nach Proposition 4.11 sind alle elliptischen Elemente von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  zu einer der Matrizen

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

konjugiert. Für  $N > 1$  liegt keine dieser Matrizen in  $\Gamma(N)$ , denn sie sind modulo  $N$  nicht kongruent zur Einheitsmatrix  $I_2$ . Die Behauptung folgt, da  $\Gamma(N)$  als Normalteiler von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  die  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Konjugate seiner Elemente enthält. #

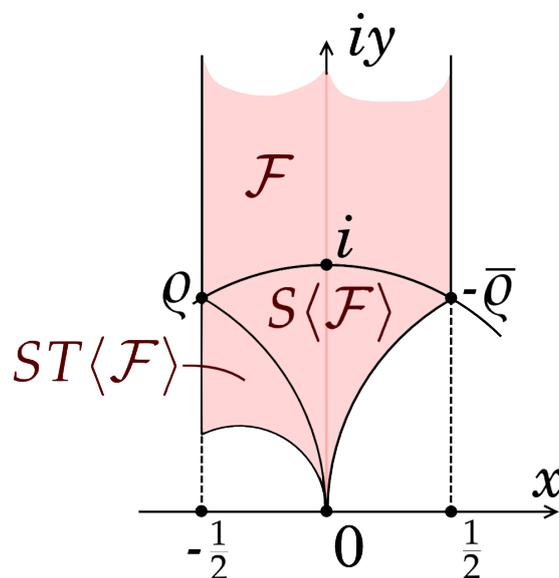
Fundamentaltbereiche für die Aktion von Kongruenzuntergruppen kann man aus dem aus Satz 4.13 bekannten Fundamentaltbereich  $\mathcal{F}$  gewinnen. Tatsächlich ist in der Notation von (4.5)

$$\bigcup_{\mu=1}^m A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle$$

ein Fundamentaltbereich für die Aktion von  $\Gamma$  auf  $\mathbb{H}$ .<sup>94</sup>

<sup>94</sup>Die Schwierigkeit beim Beweis dieser Aussage liegt in der Wahl von Vertretern  $A_1, \dots, A_m$ , die den Zusammenhang garantieren.

**Beispiel 4.22.** Ein Rechtsvertretersystem von  $\Gamma_0(2)$  in  $SL_2(\mathbb{Z})$  ist durch  $\{I_2, S, ST\}$  gegeben (Übungsaufgabe 4.3). Folgende Abbildung stellt also einen möglichen Fundamentalbereich von  $\Gamma_0(2)$  dar.



#### 4.4 Modulkurven

Sei in diesem Abschnitt stets  $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$  eine Kongruenzuntergruppe und  $\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  die Vereinigung der komplexen oberen Halbebene mit der Menge der Spitzen von  $\Gamma$  (vgl. Proposition 4.18). Wir wollen nun den Quotienten<sup>95</sup>  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  mit einer Topologie versehen und legen dafür zunächst eine solche für die erweiterte obere Halbebene  $\mathbb{H}^*$  fest. Nach Bemerkung 1.3 können wir das tun, indem wir zu jedem Punkt von  $\mathbb{H}^*$  eine Umgebungsbasis angeben. Wir betrachten die Umgebungen

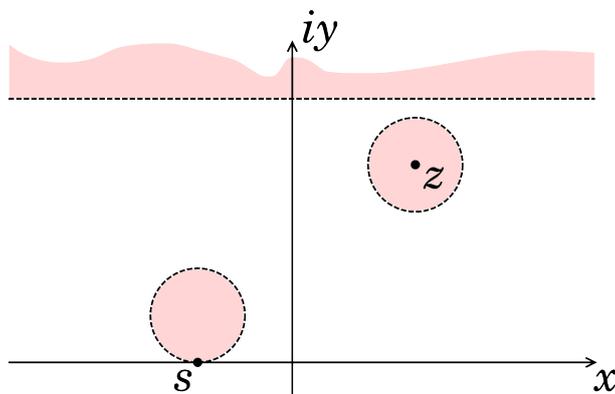
- offene Kreisscheiben in  $\mathbb{H}$  mit Mittelpunkt  $z \in \mathbb{H}$ ,
- offene Kreisscheiben in  $\mathbb{H}$  mit Tangentialpunkt  $s \in \mathbb{Q}$ , vereinigt mit  $s$  selbst,
- $\mathbb{H}_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > \varepsilon\} \cup \{\infty\}$  für alle positiven  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ .

Wir erhalten so offensichtlich eine Hausdorff'sche Topologie auf  $\mathbb{H}^*$ .

<sup>95</sup>Zu der ungewöhnlichen Notation,  $\Gamma$  von links aus  $\mathbb{H}^*$  herauszudividieren, ist folgendes zu sagen: Vermöge Proposition 4.3 haben wir  $\mathbb{H} \cong SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R})$  eingesehen. Weil die Aktionen von  $\Gamma$  und von  $SO_2(\mathbb{R})$  nicht kommutieren, schreibt man also

$$\Gamma \backslash \mathbb{H} \cong \Gamma \backslash SL_2(\mathbb{R}) / SO_2(\mathbb{R}).$$

Die Anordnung behält man bei, wenn man statt  $\mathbb{H}$  die erweiterte obere Halbebene  $\mathbb{H}^*$  studiert.

Abbildung 4.1: Je eine Umgebung von  $z \in \mathbb{H}$ ,  $s \in \mathbb{Q}$  und  $\infty$ .

Das erste große Ziel dieses Abschnitts ist, die Hausdorff-Eigenschaft von  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  zu zeigen. Wir ignorieren zunächst die Spitzen und studieren die Aktion von  $\Gamma$  auf  $\mathbb{H}$  genauer.

**Lemma 4.23.** Seien  $z_1, z_2$  zwei Punkte in  $\mathbb{H}$ , und seien  $U_1$  bzw.  $U_2$  offene Umgebungen von  $z_1$  bzw.  $z_2$ , deren kompakte Abschlüsse in  $\mathbb{H}$  liegen. Dann gibt es nur endlich viele Matrizen  $M \in \Gamma$  mit

$$M\langle U_1 \rangle \cap U_2 \neq \emptyset.$$

*Beweis.* Offensichtlich genügt es, das Lemma im Spezialfall  $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  zu zeigen. Nach Übungsaufgabe 4.4 gilt für alle bis auf endlich viele teilerfremde Paare  $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$  die Abschätzung

$$\sup \{ \mathrm{Im}(M(z)) \mid M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ und } z \in U_1 \} < \inf_{z \in U_2} \mathrm{Im}(z).$$

Wir haben somit gezeigt, dass für alle bis auf endlich viele Wahlen für die untere Zeile einer Matrix  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  der Durchschnitt  $M\langle U_1 \rangle \cap U_2$  grundsätzlich leer ist. Andererseits gilt für eine beliebige aber fest gewählte untere Zeile  $(c, d)$

$$\left\{ M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \right\} = \{ T^m \cdot M_0 \mid m \in \mathbb{Z} \} \quad \text{für } M_0 := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ beliebig,}$$

denn: Für je zwei Matrizen  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit gleicher unterer Zeile gilt offenbar

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b'a - a'b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit die Behauptung. #

Bekanntlich operieren Möbiustransformationen zu Matrizen aus  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  als Homöomorphismen auf  $\mathbb{H}$ . Mit  $U_1$  hat daher auch  $M_0\langle U_1 \rangle$  einen kompakten Abschluss in  $\mathbb{H}$ . Da dies auch auf  $U_2$  zutrifft, gibt es nur endlich viele ganze Zahlen  $m$  mit

$$(M_0\langle U_1 \rangle + m) \cap U_2 \neq \emptyset.$$

Für eine fest gewählte untere Zeile  $(c, d)$  gibt es also nur endlich viele Matrizen  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit unterer Zeile  $(c, d)$  und  $M\langle U_1 \rangle \cap U_2 \neq \emptyset$ . Insgesamt haben wir das Lemma gezeigt.  $\square$

**Korollar 4.24.** Zu jedem Punkt  $z \in \mathbb{H}$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $z$  in  $\mathbb{H}$  mit

$$\Gamma_z = \{M \in \Gamma \mid M\langle U \rangle \cap U \neq \emptyset\}.$$

*Beweis.* Sei  $z \in \mathbb{H}$  und  $V$  eine offene Umgebung von  $z$ , deren kompakter Abschluss in  $\mathbb{H}$  liegt. Dann ist  $\Gamma_z$  in der nach Lemma 4.23 endlichen Menge

$$\{M \in \Gamma \mid M\langle V \rangle \cap V \neq \emptyset\}$$

enthalten. Nennen wir nun die Elemente dieser Menge  $\{M_\nu \mid \nu = 1, \dots, n\}$ . Ohne Einschränkung können wir dabei die  $M_\nu$  so anordnen, dass es ein  $1 \leq n_0 \leq n$  gibt mit  $M_\nu \in \Gamma_z$  für alle  $\nu \leq n_0$  und  $M_\nu \notin \Gamma_z$  für alle  $\nu > n_0$ . Für jedes  $\nu > n_0$  wählen wir nun eine offene Umgebung  $V_\nu$  von  $z$  und eine offene Umgebung  $W_\nu$  von  $M_\nu\langle z \rangle$  mit  $V_\nu \cap W_\nu = \emptyset$ <sup>96</sup> und setzen

$$U := V \cap \left( \bigcap_{\nu=n_0+1}^n (V_\nu \cap M_\nu^{-1}\langle W_\nu \rangle) \right),$$

Offensichtlich hat dann dieses  $U$  die gewünschten Eigenschaften.  $\square$

Nun studieren wir die Spitzen genauer. Es gilt

$$\Gamma_\infty = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \cap \Gamma,$$

der Stabilisator wird also von einer Matrix der Form  $T_\infty := \pm T^h$  mit  $h \in \mathbb{Z}$  erzeugt. Für den Rest dieses Abschnitts sei diese Notation festgehalten.

**Lemma 4.25.**

$$\mathrm{Im}(z) \cdot \mathrm{Im}(M\langle z \rangle) \leq 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}, M \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty.$$

*Beweis.* Sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Ist dabei  $c = 0$ , so gilt nach Definition  $\varphi_M(\infty) = \infty$ , also  $M \in \Gamma_\infty$ . Für  $M \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$  gilt also  $c \neq 0$ , woraus mit  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  die Abschätzung  $|c| \geq 1$  folgt.

Sei nun  $M \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$ . Dann gilt

$$\mathrm{Im}(M\langle z \rangle) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz + d|^2} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{(c\mathrm{Re}(z) + d)^2 + c^2\mathrm{Im}(z)^2} \leq \frac{\mathrm{Im}(z)}{c^2\mathrm{Im}(z)^2} \leq \frac{1}{\mathrm{Im}(z)}$$

und somit die Behauptung.  $\square$

<sup>96</sup>Das geht, da  $M_\nu\langle z \rangle \neq z$  gilt und  $\mathbb{H}$  Hausdorff'sch ist.

**Korollar 4.26.** (a) Zu jeder Spitze  $s$  von  $\Gamma$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $s$  in  $\mathbb{H}^*$  mit

$$\Gamma_s = \{M \in \Gamma \mid M\langle U \rangle \cap U \neq \emptyset\}.$$

(b) Zu jeder Spitze  $s$  und jeder kompakten Teilmenge  $K \subseteq \mathbb{H}$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $s$  in  $\mathbb{H}^*$  mit  $U \cap M\langle K \rangle = \emptyset$  für alle  $M \in \Gamma$ .

*Beweis.* Sei ohne Einschränkung  $s = \infty$ . Wir setzen  $U := \mathbb{H}_1$ . Für  $M \in \Gamma_\infty$  gilt dann offenbar  $M\langle U \rangle = U$ . Für  $M \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$  und  $z \in U \setminus \{\infty\}$  gilt  $\text{Im}(M\langle z \rangle) < 1$  nach Lemma 4.25, also  $M\langle z \rangle \notin U$ . Zudem bildet ein solches  $M$  den Punkt  $\infty$  in die reellen Zahlen und somit ebenfalls nicht in  $U$  ab. Insgesamt folgt Behauptung (a).

Zum Beweis von Behauptung (b) nehmen wir wieder  $s = \infty$  an. Für ein beliebiges Kompaktum  $K$  gibt es ganze Zahlen  $A, B \in \mathbb{Z}_{>0}$  mit  $\frac{1}{A} < \text{Im}(z) < B$  für alle  $z \in K$ . Wir setzen

$$U := \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Im}(z) > \max\{A, B\}\} \cup \{\infty\}.$$

Sei nun  $z \in K$ . Für  $M \in \Gamma_\infty$  gilt dann  $\text{Im}(M\langle z \rangle) = \text{Im}(z) < B$ , für  $M \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$  gilt  $\text{Im}(M\langle z \rangle) < A$  nach Lemma 4.25. Damit ist Behauptung (b) gezeigt.  $\square$

Wir statten nun den Raum  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  der Bahnen bezüglich der Aktion von  $\Gamma$  auf  $\mathbb{H}^*$  mit der Quotiententopologie zu der auf  $\mathbb{H}^*$  eingeführten Topologie aus. Deren offene Mengen sind durch

$$\{U \subseteq \Gamma \backslash \mathbb{H}^* \mid \pi^{-1}(U) \text{ ist offen in } \mathbb{H}^*\}$$

gegeben, wobei  $\pi$  die kanonische Projektion von  $\mathbb{H}^*$  nach  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  ist. Wie bei der analogen Konstruktion in Abschnitt 3.1 wird  $\pi$  so automatisch zu einer stetigen Abbildung.

**Lemma 4.27.**  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  ist mit der oben eingeführten Topologie ein kompakter Hausdorffraum.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  Hausdorff'sch ist. Seien dazu  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$  zwei nicht  $\Gamma$ -äquivalente Punkte mit offenen Umgebungen  $U_1$  bzw.  $U_2$ , deren kompakter Abschluss in  $\mathbb{H}$  liegen. Nach Lemma 4.23 ist die Menge

$$\{M \in \Gamma \mid M\langle U_1 \rangle \cap U_2 \neq \emptyset\}$$

endlich, wir nennen ihre endlich vielen Elemente  $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ . Da  $z_1$  und  $z_2$  als nicht  $\Gamma$ -äquivalent vorausgesetzt wurden, ist  $M_v\langle z_1 \rangle \neq z_2$  für alle  $v \in \{1, \dots, n\}$ , und wir finden Umgebungen  $U_v$  von  $M_v\langle z_1 \rangle$  und  $V_v$  von  $z_2$ , die disjunkt sind. Setzen wir nun

$$U = U_1 \cap M_1^{-1}\langle U_1 \rangle \cap \dots \cap M_n^{-1}\langle U_n \rangle \text{ und } V = U_2 \cap V_1 \cap \dots \cap V_n,$$

so ist  $M\langle U \rangle \cap V$  für alle  $M \in \Gamma$  leer. Es folgt, dass  $\pi(U)$  und  $\pi(V)$  disjunkte Umgebungen von  $\pi(z_1)$  bzw.  $\pi(z_2)$  sind. Die Behauptung in diesem Fall folgt, wenn wir zeigen können, dass  $\pi(U)$  und  $\pi(V)$  ohne Einschränkung offene Mengen sind. Dies gilt,

*denn:*  $U$  und  $V$  sind offen. Für ein beliebiges  $M \in \Gamma$  ist die zugehörige Möbiustransformation ein Homöomorphismus und somit  $M\langle U \rangle$  bzw.  $M\langle V \rangle$  wieder offen. Es folgt die Offenheit von

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{M \in \Gamma} M\langle U \rangle \quad \text{bzw.} \quad \pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{M \in \Gamma} M\langle V \rangle$$

und nach Definition der Quotiententopologie die von  $\pi(U)$  bzw.  $\pi(V)$  wie behauptet. #

Da  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  die Vereinigung von  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  und der Äquivalenzklassen der Spitzen ist, bleibt nur noch zu zeigen, dass eine Äquivalenzklasse von Spitzen von einer Äquivalenzklasse von Punkten in  $\mathbb{H}$  und von einer anderen Äquivalenzklasse von Spitzen getrennt werden kann. Der erste Fall ist mit der selben Argumentation wie in  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  gerade der (b)-Teil von Korollar 4.26.

Es bleibt also zu zeigen, dass wir die Äquivalenzklassen zweier  $\Gamma$ -inäquivalenter Spitzen  $s$  und  $t$  trennen können. Hierbei setzen wir ohne Einschränkung  $t = \infty$ . Sei wieder  $T_\infty$  der Erzeuger von  $\Gamma_\infty$ . Weiter setzen wir mit einer positiven reellen Zahl  $u$

$$\begin{aligned} L_u &= \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}(z) = u\}, \\ K_u &= \{z \in L_u \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq |h|\}, \\ V_u &= \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}(z) > u\} \cup \{\infty\}. \end{aligned}$$

Da  $K_u$  kompakt ist, gibt es nach Korollar 4.26 eine Umgebung  $U$  von  $s$  mit  $K_u \cap \Gamma\langle U \rangle = \emptyset$ . Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass der Rand von  $U$  ein Kreis ist, der die reelle Achse in  $s$  berührt. Dann ist auch  $V_u \cap \Gamma\langle U \rangle$  leer,

*denn:* Wenn es nicht so wäre, gäbe es ein  $M \in \Gamma$  mit  $V_u \cap M\langle U \rangle \neq \emptyset$ . Wegen  $M\langle s \rangle \neq t = \infty$  ist der Rand von  $M\langle U \rangle$  ein zu  $\mathbb{R}$  tangentialer Kreis.<sup>97</sup> Klar, dass dann auch  $L_u \cap M\langle U \rangle$  nicht leer wäre, so dass es ein  $\tilde{M} \in \Gamma_\infty$  gäbe mit  $\tilde{M}\langle K_u \rangle \cap M\langle U \rangle \neq \emptyset$ , also  $K_u \cap \tilde{M}^{-1}M\langle U \rangle \neq \emptyset$ , was nicht sein kann. #

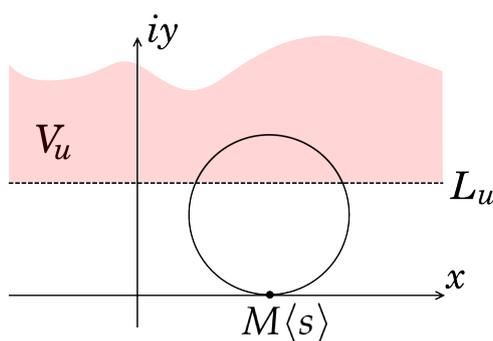


Abbildung 4.2: Schneidet der Rand von  $M\langle U \rangle$  die Menge  $V_u$ , so auch deren Rand  $L_u$ .

<sup>97</sup>Nach Annahme ist der Rand von  $U$  ein Kreis in  $\mathbb{H}$ , der die reelle Achse in  $s$  berührt. Weiter ist wegen  $M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$  und  $s \in \mathbb{R}$  das Bild  $M\langle s \rangle$  entweder reell oder gleich  $\infty$ , nach Voraussetzung also eine reelle Zahl. Die übrigen Punkte auf dem Rand von  $U$  liegen in  $\mathbb{H}$  und werden daher nach Teil (a) von Proposition 4.3 auch auf Punkte in  $\mathbb{H}$  abgebildet. Aus Funktionentheorie 1 wissen wir, dass Möbiustransformationen verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise abbilden. Der Rand von  $M\langle U \rangle$  ist also ein verallgemeinerter Kreis, dessen Schnitt mit  $\mathbb{R}$  einelementig ist und der sonst in  $\mathbb{H}$  liegt. Das zeigt die Behauptung.

Damit lassen sich, wieder mit der Argumentation wie in  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ , die Klassen von  $s$  und  $\infty$  durch offene Umgebungen in  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  trennen, und  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  ist Hausdorff'sch wie behauptet.

Es verbleibt die Kompaktheit zu zeigen. Um dies zu tun stellen wir zunächst fest, dass die Menge  $\mathcal{F} \cup \{\infty\}$  kompakt ist. Das ist so,

*denn:* Jede offene Überdeckung von  $\mathcal{F} \cup \{\infty\}$  enthält eine Umgebung  $U_\infty$  von  $\infty$ . Nach Definition der Topologie von  $\mathbb{H}^*$  enthält  $U_\infty$  für ein geeignetes  $\varepsilon > 0$  die offene Menge  $\mathbb{H}_\varepsilon$  als Teilmenge. Die Menge  $(\mathcal{F} \cup \{\infty\}) \setminus \mathbb{H}_\varepsilon$  ist offensichtlich kompakt und wird somit durch eine endliche Teilüberdeckung der ursprünglichen Überdeckung von  $\mathcal{F} \cup \{\infty\}$  überdeckt. Die Kompaktheit von  $\mathcal{F} \cup \{\infty\}$  folgt, weil wir durch Hinzunahme von  $U_\infty$  zu dieser endlichen Teilüberdeckung eine endliche Teilüberdeckung unserer beliebigen offenen Überdeckung von  $\mathcal{F} \cup \{\infty\}$  gefunden haben. #

Möbiustransformationen sind Homöomorphismen, so dass mit  $\mathcal{F} \cup \{\infty\}$  auch seine Bilder unter Möbiustransformationen kompakt sind. Durchlaufen die Matrizen  $A_\mu$  mit  $\mu \in \{1, \dots, m\}$  ein Vertretersystem von  $\bar{\Gamma}$  in  $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ , so ist daher die Menge

$$\mathcal{F}_\Gamma^* := \bigcup_{\mu=1}^m A_\mu \langle \mathcal{F} \cup \{\infty\} \rangle$$

als endliche Vereinigung kompakter Mengen selbst wieder kompakt. Es folgt, dass das Bild von  $\mathcal{F}_\Gamma^*$  unter der (stetigen) Projektion  $\pi : \mathbb{H}^* \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  kompakt ist. Die zu beweisende Kompaktheit von  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  folgt also, wenn wir zeigen können, dass die Einschränkung  $\pi|_{\mathcal{F}_\Gamma^*}$  surjektiv ist. Das ist aber so, weil zum einen  $\mathcal{F}_\Gamma := \mathcal{F}_\Gamma^* \cap \mathbb{H}$  offensichtlich ein Vertretersystem für die Aktion von  $\Gamma$  auf  $\mathbb{H}$  enthält<sup>98</sup>, und zum anderen wie im Beweis von Proposition 4.20 gesehen die Menge  $\{A_1 \langle \infty \rangle, \dots, A_m \langle \infty \rangle\}$  ein Vertretersystem der Spitzenklassen bezüglich  $\Gamma$  enthält.  $\square$

**Lemma 4.28.**  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  ist eine kompakte eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit.

*Beweis.* Nach Lemma 4.27 und Korollar 1.14 genügt es zum Beweis des Lemmas einen beliebigen Atlas auf  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  anzugeben. Für jedes  $z_0 \in \mathbb{H}^*$  gibt es nach Korollar 4.24 und Teil (a) von Korollar 4.26 eine offene Umgebung  $U$  mit

$$\Gamma_{z_0} = \{M \in \Gamma \mid M \langle U \rangle \cap U \neq \emptyset\},$$

so dass wir eine natürliche Einbettung  $\Gamma_{z_0} \backslash U := \{\Gamma_{z_0} \langle z \rangle \mid z \in U\} \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  haben und  $\Gamma_{z_0} \backslash U$  eine offene Umgebung von  $\pi(z_0)$  in  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  ist. Auf dieser Umgebung definieren wir Karten wie folgt.

**Fall 1:**  $z_0 \in \mathbb{H}^*$  ist weder elliptisch noch parabolisch. Dann ist  $\Gamma_{z_0}$  trivial oder gleich  $\{\pm I_2\}$ ,

*denn:* Da nach Proposition 4.18 alle Punkte in  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  parabolisch sind, liegt nach Voraussetzung  $z_0$  schon in der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$ . Enthielte der Stabilisator  $\Gamma_{z_0}$  von  $z_0$  ein Element aus  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ , so hätte dies definitionsgemäß  $z_0 \in \mathbb{H}$  als Fixpunkt, wäre nach Proposition 4.4 also elliptisch. #

<sup>98</sup>Wie schon in Abschnitt 4.3 bemerkt, ist  $\mathcal{F}_\Gamma$  im Allgemeinen kein Fundamentalbereich für die Aktion von  $\Gamma$  auf  $\mathbb{H}$ . Probleme bereitet hierbei jedoch lediglich der Zusammenhang, auf den wir hier getrost verzichten können.

Somit operiert  $\Gamma_{z_0}$  trivial auf  $U$ , und die Abbildung  $\pi : U \rightarrow \Gamma_{z_0} \backslash U$  ist ein Homöomorphismus. Wir nehmen die Karte  $(\Gamma_{z_0} \backslash U, (\pi|_U)^{-1})$  in unseren Atlas von  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  auf.

**Fall 2:**  $z_0 \in \mathbb{H}$  ist elliptisch. Dann betrachten wir die zum Stabilisator  $\Gamma_{z_0}$  gehörige Gruppe

$$\bar{\Gamma}_{z_0} := (\Gamma_{z_0} \cdot \{\pm I_2\}) / \{\pm I_2\}$$

der Möbiustransformationen. Aus Funktionentheorie 1 wissen wir, dass die zu

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -z_0 \\ 1 & 2i - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i - z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gehörige Möbiustransformation  $\varphi_M$  eine konforme Abbildung von  $\mathbb{H}$  auf die offene Einheitskreisscheibe  $\mathbb{E}$  ist, die  $z_0$  auf 0 schickt. Ist  $\bar{\Gamma}_{z_0}$  von Ordnung  $n$ , so besteht  $\varphi_M \bar{\Gamma}_{z_0} \varphi_M^{-1}$  aus den  $n$  paarweise verschiedenen Transformationen

$$w \mapsto \zeta^k w \quad \text{mit } k = 0, 1, \dots, n-1 \text{ und } \zeta = e^{2\pi i/n}$$

von Ordnung  $n$ . Durch  $\varphi(\pi(z)) := \varphi_M(z)^n$  ist also ein Homöomorphismus  $\varphi : \Gamma_{z_0} \backslash U \rightarrow \mathbb{C}$  mit offenem Bild gegeben; der wegen der  $n$ -ten Potenz wohldefiniert ist. Wir nehmen auch  $(\Gamma_{z_0} \backslash U, \varphi)$  in unseren Atlas auf.

**Fall 3:**  $z_0 \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  ist eine Spitze von  $\Gamma$ . Dann gibt es ein  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit  $M\langle z_0 \rangle = \infty$  und

$$M\Gamma_{z_0}M^{-1} \cdot \{\pm I_2\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^m \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$$

für eine positive ganze Zahl  $h$ . Wir können einen Homöomorphismus  $\varphi$  von  $\Gamma_{z_0} \backslash U$  in eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  definieren, indem wir  $\varphi(\pi(z)) := e^{2\pi i M\langle z \rangle / h}$  setzen, und nehmen  $(\Gamma_{z_0} \backslash U, \varphi)$  in unseren Atlas auf.

□

**Satz 4.29.**  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  ist mit dem oben eingeführten Atlas eine kompakte Riemann'sche Fläche. Wir nennen dann  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  auch eine **Modulkurve**.

*Beweis.* Zum einen ist unser Atlas konform,

denn: Bei genauerer Betrachtung stellen wir fest, dass sämtliche Kartenabbildungen von der Form  $f \circ \pi^{-1}$  mit einer konformen Abbildung  $f$  sind:

**Fall 1:**  $z_0 \in \mathbb{H}^*$  ist weder elliptisch noch parabolisch. Die entsprechende Kartenabbildung ist auf einer Umgebung  $U$  wie in Fall 1 durch  $\pi^{-1}$  gegeben.

**Fall 2:**  $z_0 \in \mathbb{H}$  ist elliptisch. Die entsprechende Kartenabbildung ist auf einer Umgebung  $U$  wie in Fall 2 durch  $\varphi_M^n \circ \pi^{-1}$  gegeben. Hierbei ist  $\varphi_M^n$  als Potenz der zu einer Matrix aus  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  gehörigen Möbiustransformation auf einem Gebiet in  $\mathbb{H}$  konform.

**Fall 3:**  $z_0 \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  ist eine Spitze von  $\Gamma$ . Die entsprechende Kartenabbildung ist auf einer Umgebung  $U$  wie in Fall 3 durch  $e^{2\pi i M\langle \cdot \rangle / h} \circ \pi^{-1}$  gegeben. Hierbei ist die Abbildung  $e^{2\pi i M\langle \cdot \rangle / h}$  eingeschränkt auf  $U \setminus \{z_0\}$  offensichtlich konform, die nötigen Eigenschaften für Konformität auf ganz  $U$  lassen sich leicht nachprüfen.

#

Zum anderen ist der Quotient  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  zusammenhängend,

denn: Nehmen wir an,  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  wäre nicht zusammenhängend, es gäbe also offene Teilmengen  $U_1, U_2 \subseteq \Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  mit

$$\Gamma \backslash \mathbb{H}^* = U_1 \cup U_2 \quad \text{und somit} \quad \mathbb{H}^* = \pi^{-1}(U_1) \cup \pi^{-1}(U_2).$$

Wegen der Stetigkeit der Projektion  $\pi : \mathbb{H}^* \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  ist letzteres eine disjunkte Zerlegung von  $\mathbb{H}^*$  in offene Teilmengen, die es gar nicht geben darf, weil  $\mathbb{H}^*$  als offensichtlich wegzusammenhängende Menge auch zusammenhängend ist. #

Insgesamt haben wir gezeigt, dass  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  tatsächlich eine kompakte Riemann'sche Fläche ist.  $\square$

#### 4.5 Die Geschlechtsformel (★)

In diesem Abschnitt wollen wir etwas Differentialgeometrie betreiben und den Begriff des Geschlechts einführen. Es bietet sich an, dies in einem etwas allgemeineren Kontext zu tun: Eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit* ist eine Mannigfaltigkeit mit (reell) differenzierbaren Kartenwechselabbildungen. Lässt sich eine zusammenhängende zweidimensionale differenzierbare reelle Mannigfaltigkeit, etwa eine Sphäre oder ein Torus, derart in den affinen Raum  $\mathbb{R}^3$  einbetten, dass sie ihr Komplement in zwei Zusammenhangskomponenten zerteilt, dann nennen wir sie *orientierbar*.<sup>99</sup> Eine orientierbare zusammenhängende zweidimensionale differenzierbare reelle Mannigfaltigkeit nennen wir auch kurz eine *orientierbare Fläche*. In diesem Abschnitt wollen wir kompakte orientierbare Flächen studieren.

**Bemerkung 4.30.** Die bisher von uns behandelten Riemann'schen Flächen  $\mathbb{C}$ ,  $\overline{\mathbb{C}}$ ,  $\mathbb{C}/\Lambda$  für ein Gitter  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  und  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  für eine Kongruenzuntergruppe  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  sind allesamt orientierbare Flächen und mit Ausnahme von  $\mathbb{C}$  auch kompakt, wie wir in Beispiel 1.15, Satz 3.6 bzw. Satz 4.29 gezeigt haben.

Im affinen Raum  $\mathbb{R}^2$  ist der *p-te Standardsimplex*  $\Delta_p$  durch die konvexe Hülle von

$$\begin{array}{ll} (0,0) & \text{für } p = 0, \\ (0,0), (1,0) & \text{für } p = 1, \\ (0,0), (1,0), (0,1) & \text{für } p = 2 \end{array}$$

gegeben. Für andere Werte von  $p$  ist kein Standardsimplex definiert.

Jede orientierbare Fläche  $X$  lässt sich *triangulieren*, das heißt, so mit homöomorphen Bildern von  $\Delta_2$  überdecken, dass sich zwei solche Bilder entweder längs einer eindeutigen gemeinsamen Kante oder einer eindeutigen gemeinsamen Ecke berühren oder disjunkt sind. Auf diese Weise lässt sich  $X$  in Flächen (das Innere von Bildern von  $\Delta_2$ ), Kanten (das Innere von Bildern von  $\Delta_1$ ) und Ecken (Bilder von  $\Delta_0$ ) zerlegen.

<sup>99</sup>In der Differentialgeometrie verlangt man formaler, dass sie ein so genanntes „stetiges Einheitsnormalenfeld“ besitzt.

**Proposition 4.31.** *Sei  $X$  eine kompakte orientierbare Fläche. Dann ist die Zahl*

$$\chi(X) = (\text{Anzahl der Flächen}) - (\text{Anzahl der Kanten}) + (\text{Anzahl der Ecken})$$

*unabhängig von der gewählten Triangulierung. Sie heißt die **Eulercharakteristik** von  $X$ .*

*Beweis.* Zu je zwei Triangulierungen lässt sich immer eine gemeinsame Verfeinerung finden, das heißt, eine Triangulierung, deren Eckenmenge diejenige der ursprünglichen Triangulierung umfasst. Wir müssen also zeigen, dass der Wert von  $\chi(X)$  beim Verfeinern einer Triangulierung nicht ändert. Eine weitere Ecke muss aber entweder in einer bestehenden Dreiecksfläche oder auf einer Kante zwischen zwei solchen liegen. In beiden Fällen sieht man die Invarianz von  $\chi(X)$  leicht.  $\square$

Da Homöomorphismen eine Triangulierung erhalten, ist die Eulercharakteristik homöomorpher kompakter orientierbarer Flächen gleich. Das heißt im Umkehrschluss, dass zwei kompakte orientierbare Flächen unterschiedlicher Eulercharakteristik topologisch verschieden sein müssen. Daher nennt man letztere auch eine *topologische Invariante*.

**Definition 4.32.** *Zu einer kompakten orientierbaren Fläche  $X$  heißt die ganze Zahl  $g = g(X)$  mit  $\chi(X) = 2 - 2g(X)$  das **Geschlecht** von  $X$ . Es ist wieder eine topologische Invariante.*

Für zwei der drei Typen kompakter Riemann'scher Flächen, die wir bislang untersucht haben, lässt sich das Geschlecht recht unkompliziert bestimmen.

**Proposition 4.33.** (a)  $g(\overline{\mathbb{C}}) = 0$ .

(b) Für jedes Gitter  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  gilt  $g(\mathbb{C}/\Lambda) = 1$ .

*Beweis.* Nach Funktionentheorie 1 ist  $\overline{\mathbb{C}}$  über die stereographische Projektion homöomorph zur 2-Sphäre  $S^2$ . Um zu zeigen, dass deren Eulercharakteristik 2 ist,<sup>100</sup> genügt es, eine Beispieltriangulierung zu betrachten. Offensichtlich ist die Hülle eines Tetraeders homöomorph zur Sphäre; das gibt uns die gesuchte Triangulierung. Wegen

$$\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$$

ist dann das Geschlecht  $g(S^2) = 1 - \frac{\chi(S^2)}{2} = 1 - 1 = 0$ , und Behauptung (a) folgt.

Behauptung (b) zeigt man ähnlich. Dafür braucht man allerdings schon eine Triangulierung mit 18 Dreiecken. (*Übung!*)  $\square$

**Proposition 4.34.** *Es gibt zu jeder ganzen Zahl  $g \geq 0$  eine kompakte orientierbare Fläche  $X$  mit  $g(X) = g$ .*

<sup>100</sup>Das ist äquivalent zum *Euler'schen Polyedersatz*, der besagt, dass für jeden Polyeder die Wechselsumme der Anzahl seiner Flächen, seiner Kanten und seiner Ecken immer 2 ist.

*Beweis.* Nach Teil (a) von Proposition 4.33 hat die 2-Sphäre Geschlecht 0. Durch  $g$ -faches Verkleben der Sphäre mit jeweils einem Torus, also einer Fläche von Geschlecht 1, erhalten wir so eine Fläche von Geschlecht  $g$ . Verklebt wird hierbei jeweils entlang eines Dreiecks der Triangulierung. Dabei bekommen wir

- Flächen = Flächen(Sphäre) +  $g$  Flächen(Torus) -  $2g$ ,
- Kanten = Kanten(Sphäre) +  $g$  Kanten(Torus) -  $3g$ ,
- Ecken = Ecken(Sphäre) +  $g$  Ecken(Torus) -  $3g$ .

Wie man leicht nachrechnet ist die Eulercharakteristik  $2 - 2g$ , das Geschlecht also  $g$ . □

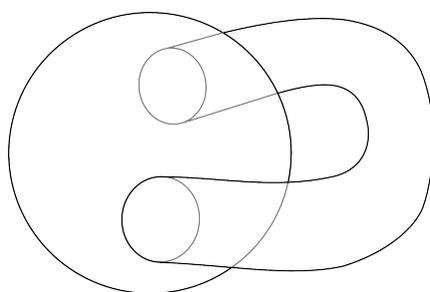


Abbildung 4.3: Anschaulich entsteht durch die Konstruktion im Beweis von Proposition 4.34 eine Sphäre mit  $g$  „Henkeln“. Im Bild eine Sphäre mit einem „Henkel“.

Man kann tatsächlich zeigen, dass jede kompakte Riemann'sche Fläche homöomorph zu einer kompakten orientierbaren Fläche wie im Beweis ist.

Im Rest dieses Abschnitts wollen wir eine geschlossene Formel für das Geschlecht der Riemann'schen Flächen  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  mit Kongruenzuntergruppen  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  herleiten. Dafür studieren wir die Verzweigungstheorie holomorpher Abbildungen zwischen kompakten Riemann'schen Flächen (vgl. Abschnitt 1.4) genauer.

**Satz 4.35** (Formel von Riemann-HURWITZ<sup>101</sup>). *Seien  $X, Y$  kompakte Riemann'sche Flächen, und sei  $f \in \mathrm{Hol}(X, Y)$  nicht konstant mit Grad  $\mu_f$  und Gesamtverzweigungsordnung  $v_f$ . Dann gilt*

$$(2g(X) - 2) = \mu_f (2g(Y) - 2) + v_f.$$

*Beweis.* Wir triangulieren  $Y$  derart, dass alle Verzweigungspunkte von  $f$  unter den 0-Simplizes sind und dass es zu jedem 1-Simplex eine Karte gibt, in der dieser zur Gänze liegt. Das Urbild dieser Triangulierung unter  $f$  ist nun eine Triangulierung von  $X$ . Seien nun  $c_0, c_1, c_2$  bzw.  $d_0, d_1, d_2$  die Anzahlen der 0-, 1- und 2-Simplizes in diesen Triangulierungen, so dass gilt

$$2 - 2g(X) = c_0 - c_1 + c_2 \quad \text{und} \quad 2 - 2g(Y) = d_0 - d_1 + d_2.$$

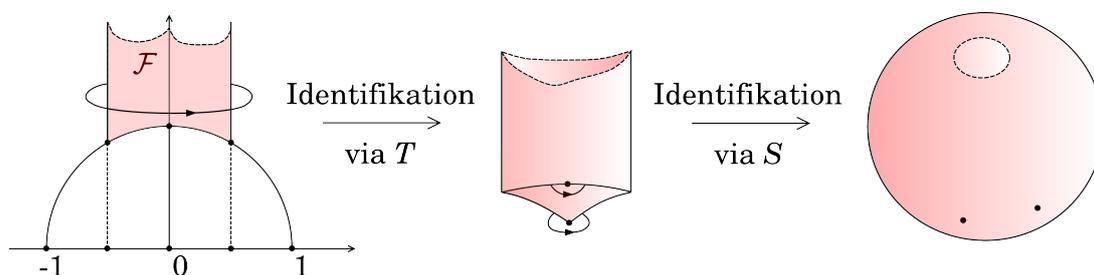
Dann gilt  $c_2 = \mu_f d_2$ ,  $c_1 = \mu_f d_1$  und  $c_0 = \mu_f d_0 - v_f$ , und der Satz folgt. □

<sup>101</sup> Adolf Hurwitz (1859-1919)

Kehren wir nun in die spezielle Situation der Modulkurve  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  mit einer Kongruenzuntergruppe  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  zurück. Unser Ziel ist es, eine geschlossene Formel für das Geschlecht dieser Fläche anzugeben. Im Fall  $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist dies leicht.

**Lemma 4.36.**  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*$  hat Geschlecht 0.<sup>102</sup>

*Beweis.* Der aus Funktionentheorie bekannte Standardfundamentalebene lässt sich durch die Translation  $T$  zu einem Zylinder mit federkielartigem unteren Rand und unendlich fernen oberen Rand verkleben. Der untere Rand lässt sich durch die Stürzung  $S$  verkleben; das Resultat hat offensichtlich Geschlecht 0.



□

**Satz 4.37** (Geschlechtsformel). Für eine beliebige Kongruenzuntergruppe  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  führen wir die folgenden Bezeichnungen ein.

- $\mu := [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : \overline{\Gamma}]$ ,
- $\nu_2$  bzw.  $\nu_3$  die Anzahl der  $\Gamma$ -inäquivalenten elliptischen Punkte von Ordnung 2 bzw. 3 in  $\mathbb{H}$ ,
- $\nu_\infty$  die Anzahl der  $\Gamma$ -inäquivalenten Spitzen in  $\mathbb{Q} \cup \infty$ .

Das Geschlecht der Modulkurve zu  $\Gamma$  ist dann gegeben durch

$$g(\Gamma \backslash \mathbb{H}^*) = 1 + \frac{\mu}{12} - \frac{\nu_2}{4} - \frac{\nu_3}{3} - \frac{\nu_\infty}{2}.$$

*Beweis.* Offensichtlich ist die kanonische Projektion

$$f : \Gamma \backslash \mathbb{H}^* \rightarrow \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*}$$

eine nicht-konstante holomorphe Abbildung zwischen kompakten Riemann'schen Flächen und hat Grad

$$\mu_f = [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : \overline{\Gamma}] = \mu.$$

<sup>102</sup>Der hier angegebene Beweis beruht sehr auf der Anschauung. In Satz 4.75 werden wir explizit eine konforme Abbildung (und somit insbesondere einen Homöomorphismus) zwischen  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*$  und  $\overline{\mathbb{C}}$  angeben und so zusammen mit Teil (a) von Proposition 4.33 einen exakten Beweis für das Lemma liefern.

Anwenden der Formel von Riemann-Hurwitz 4.35 und von Lemma 4.36 liefert

$$g(\Gamma \backslash \mathbb{H}^*) = 1 - \mu + \frac{v_f}{2}. \quad (4.6)$$

Zum Beweis der Geschlechtsformel müssen wir also zeigen, dass die Gesamtverzweigungsordnung  $v_f$  von  $f$  den richtigen Wert annimmt. Betrachten wir dafür das folgende kommutierende Diagramm kanonischer Projektionen.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^* & \xrightarrow{\text{Identität}} & \mathbb{H}^* \\ \pi_\Gamma \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Gamma \backslash \mathbb{H}^* & \xrightarrow{f} & \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^* \end{array}$$

Sei  $z_0 \in \mathbb{H}^*$ . Wir wählen ein  $x_0 \in \Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  mit  $f(x_0) = \pi(z_0)$  und ein  $w_0 \in \mathbb{H}^*$  mit  $x_0 = \pi_\Gamma(w_0)$ . Gilt  $w_0 = M \langle z_0 \rangle$  für ein  $M \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ , so gilt für die Verzweigungsordnung

$$\pi(z_0)\text{-ord}(f; x_0) = [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_{w_0} : \bar{\Gamma}_{w_0}] = [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_{z_0} : M^{-1} \bar{\Gamma} M \cap \bar{\Gamma}_{z_0}], \quad (4.7)$$

denn: Die erste Gleichheit folgt unmittelbar aus der Definition der Verzweigungsordnung. Andererseits gilt

$$\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_{w_0} = M \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_{z_0} M^{-1} \quad \text{und} \quad \bar{\Gamma}_{w_0} = \bar{\Gamma} \cap M \bar{\Gamma}_{z_0} M^{-1},$$

woraus die zweite Gleichheit folgt. #

Offensichtlich kann Verzweigung nur in den  $\pi_\Gamma$ -Bildern der bezüglich  $\Gamma$  elliptischen oder parabolischen Punkte auftreten. Nach Abschnitt 4.2 müssen wir also die Verzweigung in den Punkten aus  $f^{-1}(\pi(i)) \cup f^{-1}(\pi(\rho)) \cup f^{-1}(\pi(\infty))$  bestimmen. Es gilt

$$\sum_{x \in f^{-1}(\pi(\rho))} (\pi(\rho)\text{-ord}(f; x) - 1) = \frac{2(\mu - \nu_3)}{3},$$

denn: Nach (4.7) und wegen  $|\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\rho| = 3$  ist  $\pi(\rho)\text{-ord}(f; x) \in \{1, 3\}$  für alle  $x \in f^{-1}(\pi(\rho))$ . Nach Definition des Grades von  $f$  gilt weiter

$$\mu = \mu_f = \sum_{x \in f^{-1}(\pi(\rho))} \pi(\rho)\text{-ord}(f; x). \quad (4.8)$$

Die Anzahl der  $x \in f^{-1}(\pi(\rho))$  mit  $\pi(\rho)\text{-ord}(f; x) = 1$  ist  $\nu_3$ , die Anzahl derjenigen mit  $\pi(\rho)\text{-ord}(f; x) = 3$  entsprechend  $k - \nu_3$ . Aus (4.8) folgt sofort

$$\mu = 1 \cdot \nu_3 + 3 \cdot (k - \nu_3) = 3k - 2\nu_3.$$

Lösen wir dies nach  $k$  auf und setzen es in (4.8) ein, erhalten wir die Behauptung. #

Analog zeigt man

$$\sum_{x \in f^{-1}(\pi(i))} (\pi(i)\text{-ord}(f; x) - 1) = \frac{\mu - \nu_2}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{x \in f^{-1}(\pi(\infty))} (\pi(\infty)\text{-ord}(f; x) - 1) = \mu - \nu_\infty.$$

Durch Zusammenzählen folgt

$$v_f = -v_\infty - \frac{v_2}{2} - \frac{2v_3}{3} + \frac{13\mu}{6}$$

und somit nach Einsetzen in (4.6) die Geschlechtsformel.  $\square$

**Beispiel 4.38.** Im Fall  $\Gamma = \Gamma(N)$  mit  $N > 2$  haben wir  $v_2 = v_3 = 0$  nach Beispiel 4.21 und  $Nv_\infty = \mu = \frac{1}{2} [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]$ . Es gilt daher

$$g_N := g(\Gamma(N) \backslash \mathbb{H}^*) = 1 + \frac{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]}{24} \cdot \frac{N-6}{N}.$$

Mit Übungsaufgabe 4.2 lässt sich dies leicht explizit berechnen. So ist etwa  $g_3 = g_4 = g_5 = 0$  und  $g_6 = 1$ .

Eine interessante Feststellung ist, dass wir mit den bisher betrachteten Typen Riemann'scher Flächen in gewisser Weise alle kompakten Riemann'schen Flächen untersucht haben.

**Satz 4.39** (Uniformisierungssatz für kompakte Riemann'sche Flächen). Sei  $X$  eine kompakte Riemann'sche Fläche vom Geschlecht  $g \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $X$  konform äquivalent zu einer Riemann'schen Fläche  $Y$  aus der folgenden Liste.

- $Y = \overline{\mathbb{C}}$  für  $g = 0$ ,
- $Y = \mathbb{C}/\Lambda$  mit einem Gitter  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  für  $g = 1$ ,
- $Y = \Gamma \backslash \mathbb{H}$  kompakt mit einer geeigneten Untergruppe  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  für  $g \geq 2$ .

Der Beweis dieser Aussage liegt außerhalb der Möglichkeiten dieser Vorlesung: Mit Überlagerungstheorie zeigt man zunächst, dass eine beliebige Riemann'sche Fläche  $X$  konform äquivalent ist zu einem Quotienten  $\tilde{X}/G$  der so genannten *universellen Überlagerung*  $\tilde{X}$  von  $X$  nach einer eigentlich diskontinuierlich und frei operierenden<sup>103</sup> Untergruppe  $G$  der Automorphismengruppe  $\mathrm{Aut}(\tilde{X})$  von  $\tilde{X}$ .

Die universelle Überlagerung einer Riemann'schen Fläche ist stets eine einfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche. Vermöge harmonischer Analyse zeigt man den Großen Riemann'schen Abbildungssatz, der besagt, dass es bis auf konforme Äquivalenz nur drei einfach zusammenhängende Riemann'sche Flächen gibt, nämlich  $\overline{\mathbb{C}}$ ,  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{H}$ .

Die Automorphismengruppen dieser speziellen Riemann'schen Flächen lassen sich leicht berechnen.

- $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = \{\varphi_M \mid M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\}$ . Wir haben schon eingesehen, dass jede Möbiustransformation auf  $\overline{\mathbb{C}}$  mindestens einen Fixpunkt hat, so dass es keine nichttriviale Untergruppe von  $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$  gibt, die frei auf  $\overline{\mathbb{C}}$  operiert. Als einzige konforme Äquivalenzklasse verbleibt in diesem Fall die von  $\overline{\mathbb{C}}$  selbst.

<sup>103</sup>Eine Gruppe  $G$  operiert *eigentlich diskontinuierlich* auf einer Menge  $X$ , wenn zu jedem Element von  $X$  eine Umgebung  $U$  existiert, für die  $\{g \in G \mid U \cap g \circ U \neq \emptyset\}$  endlich ist. Die Aktion von  $G$  heißt *frei*, wenn alle Elemente von  $X$  trivialen Stabilisator haben.

- $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{\varphi_M \mid M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})\}$ . Untergruppen von  $\text{Aut}(\mathbb{C})$ , die eigentlich diskontinuierlich und frei auf  $\mathbb{C}$  operieren, sind von der Form

$$\langle z \mapsto z + b \rangle \text{ mit } b \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{oder} \quad \langle z \mapsto \omega z \mid \omega \in \Lambda \rangle \text{ mit } \Lambda \subseteq \mathbb{C} \text{ Gitter.}$$

Im ersten Fall erhalten wir keine kompakte Riemann'sche Flächen, im zweiten Fall gerade die Tori aus Kapitel 3.

- $\text{Aut}(\mathbb{H}) = \{\varphi_M \mid M \in \text{GL}_2(\mathbb{R})^+\}$ . Untergruppen  $\Gamma \subseteq \text{Aut}(\mathbb{H})$ , die eigentlich diskontinuierlich auf  $\mathbb{H}$  operieren, gibt es viele; im Beispiel der Kongruenzuntergruppen hatten wir das etwa in Abschnitt 4.4 gezeigt. Eine freie Aktion liegt vor, wenn  $\Gamma$  keine elliptischen Elemente enthält. Der Quotient  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  ist kompakt, wenn  $\Gamma$  zudem keine parabolischen Elemente enthält. Das schließt die von uns genauer untersuchten Kongruenzuntergruppen  $\Gamma \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  aus, da wir in Proposition 4.18 gezeigt hatten, dass die Spitzenmenge bezüglich einer beliebigen Kongruenzuntergruppe stets durch  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  gegeben ist.

Der Satz folgt, wenn man noch zeigen kann, dass alle Riemann'schen Flächen vom dritten Typ, die Geschlecht 0 bzw. 1 haben, konform äquivalent sind zur Riemann'schen Zahlenkugel bzw. einem Periodentorus.

## 4.6 Der Begriff der Modulfunktion

In Abschnitt 3.2 haben wir eingesehen, dass sich die meromorphen Funktionen auf einem gegebenen Periodentorus  $\mathbb{C}/\Lambda$  eins zu eins übersetzen lassen in doppeltperiodische Funktionen aus  $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ , die elliptischen Funktionen zum Gitter  $\Lambda$ . Letztere sind insofern leichter zugänglich als sie sich mit den Methoden der Funktionentheorie 1 studieren lassen. Ziel dieses Abschnitts ist es, für die meromorphen Funktionen auf einer gegebenen Modulkurve  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  etwas Vergleichbares zu erreichen. Genauer wollen wir einen Eins-zu-eins-Zusammenhang zwischen den meromorphen Funktionen auf  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  und einer Klasse von Funktionen aus  $\mathcal{M}(\mathbb{H})$  beweisen.

Sei also nun für den Rest des Abschnitts  $\Gamma \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  eine fest gewählte Kongruenzuntergruppe. Jede Funktion  $F \in \mathcal{M}(\Gamma \backslash \mathbb{H}^*)$  induziert eine Funktion  $f : \mathbb{H} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  via  $f = (F \circ \pi)|_{\mathbb{H}}$ , wobei  $\pi : \mathbb{H}^* \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  die kanonische Projektion ist. Wir wollen nun die Eigenschaften von  $F$  untersuchen und in solche für  $f$  übersetzen. Da  $F$  als Funktion modulo  $\Gamma$  wohldefiniert ist, gilt zum einen die Invarianzbedingung

$$f(M\langle z \rangle) = f(z) \quad \text{für alle } M \in \Gamma.$$

Nach Satz 1.27 lässt sich andererseits die Meromorphie von  $F$  dahingehend übersetzen, dass  $F \in \text{Hol}(\Gamma \backslash \mathbb{H}^*, \overline{\mathbb{C}}) \setminus \{\infty\}$  gilt. Nach Definition heißt dies, dass für jedes Paar von Karten  $\varphi : U \rightarrow V$  von  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  und  $\psi : U' \rightarrow V'$  von  $\overline{\mathbb{C}}$  mit  $F(U) \subseteq U'$  die Funktion

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow V'$$

holomorph ist. Betrachten wir nun speziell den Atlas von  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ , den wir in Abschnitt 4.4 konstruiert haben; sei also  $z_0 \in \mathbb{H}^*$  und  $W$  eine offene Umgebung mit

$$\Gamma_{z_0} = \{M \in \Gamma \mid M\langle W \rangle \cap W \neq \emptyset\},$$

so dass wir eine natürliche Einbettung  $\Gamma_{z_0} \backslash W \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  haben und  $\Gamma_{z_0} \backslash W$  eine offene Umgebung von  $\pi(z_0)$  in  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  ist.

**Fall 1:**  $z_0 \in \mathbb{H}^*$  ist weder elliptisch noch parabolisch. Dann ist  $\varphi$  durch die (identische) Abbildung

$$(\pi|_W)^{-1} : U := \Gamma_{z_0} \backslash W \rightarrow V := W$$

gegeben, und die Meromorphie von  $F|_U = F|_{\Gamma_{z_0} \backslash W}$  ist äquivalent dazu, dass für alle Karten  $\psi : U' \rightarrow V'$  von  $\overline{\mathbb{C}}$  mit  $f(V) = (F \circ \pi)(V) = F(U) \subseteq U'$  die Funktion

$$\psi \circ f = \psi \circ F \circ \pi : V \rightarrow V'$$

holomorph ist. Nach Satz 1.27 ist dies gerade die Meromorphie von  $f|_V = f|_W$ .<sup>104</sup>

**Fall 2:**  $z_0 \in \mathbb{H}$  ist elliptisch. Mit der selben Argumentation zeigt man auch hier, dass die Meromorphie von  $F|_{\Gamma_{z_0} \backslash W}$  äquivalent zur Meromorphie von  $f|_W$  ist.

**Fall 3:**  $z_0 \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  ist eine Spitze von  $\Gamma$ . In diesem Fall ist die Argumentation etwas subtiler, weil wir die Funktion  $f$  als Funktion auf  $\mathbb{H}$  (ohne die Spitzen) definiert haben. Seien  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  eine Matrix mit  $M\langle z_0 \rangle = \infty$  und  $h$  die positive ganze Zahl mit

$$M\Gamma_{z_0}M^{-1} \cdot \{\pm I_2\} = \{\pm T^{hm} \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

Hierbei hängt  $h$  nicht von der speziellen Wahl der Matrix  $M$  ab,

denn: Für eine weitere Matrix  $M' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit  $M'\langle z_0 \rangle = \infty$  liegt offenbar  $M'M^{-1}$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ , es gibt also ein  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $M'M^{-1} = T^k$ . Es folgt

$$\begin{aligned} M'\Gamma_{z_0}(M')^{-1} \cdot \{\pm I_2\} &= M'M^{-1}M\Gamma_{z_0}M^{-1}M(M')^{-1} \cdot \{\pm I_2\} \\ &= T^k \left\{ \pm T^{hm} \mid m \in \mathbb{Z} \right\} T^{-k} \\ &= \left\{ \pm T^{hm} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

#

Sei weiter  $q_h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}$  die durch  $q_h(z) := \exp\left(\frac{2\pi iz}{h}\right)$  definierte Abbildung. Dann ist  $\varphi$  durch die Zuordnung

$$\varphi : \begin{cases} U := \Gamma_{z_0} \backslash W & \rightarrow V := (q_h \circ \varphi_M)(W) \subseteq \mathbb{E}, \\ x & \mapsto \exp\left(\frac{2\pi i}{h} M\langle (\pi|_W)^{-1}(x) \rangle\right) \end{cases}$$

gegeben. Nach Satz 1.27 ist die Meromorphie von  $F|_U$  äquivalent dazu, dass  $f$  auf  $W \setminus \{z_0\}$  meromorph ist und dass sich  $f \circ \varphi_M^{-1} \circ q_h^{-1}$  meromorph nach  $(q_h \circ \varphi_M)(z_0) = 0$  fortsetzen lässt. Trifft letztere Eigenschaft zu, so sagen wir ab sofort auch einfacher,  $f$  sei *meromorph in der Spitze*  $z_0$ . Die Laurententwicklung von  $f \circ \varphi_M^{-1} \circ q_h^{-1}$  in 0 nennen wir auch die **FOURIERentwicklung**<sup>105</sup> von  $f$  in der Spitze  $z_0$ .

<sup>104</sup>Aufgrund der lokalen Gestalt von  $\pi$  ist klar, dass mit  $F|_U$  auch  $f|_V$  nicht identisch  $\infty$  ist und umgekehrt.

<sup>105</sup>Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Es ist nun klar, dass sich die Zuordnung  $F \mapsto f$  umkehren lässt. Da sie offensichtlich auch  $\mathbb{C}$ -linear ist, haben wir den folgenden Satz gezeigt.

**Satz 4.40.** Die Zuordnung  $F \mapsto (F \circ \pi)|_{\mathbb{H}}$  liefert einen Isomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen zwischen  $\mathcal{M}(\Gamma \backslash \mathbb{H}^*)$  und dem Raum  $V_0(\Gamma)$  der **Modulfunktionen** bezüglich  $\Gamma$ ,<sup>106</sup> also dem Raum derjenigen meromorphen Funktionen  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$  mit

$$(V_1) \quad f(z) = f(M\langle z \rangle) \quad \text{für alle } M \in \Gamma.$$

$$(V_2) \quad f \text{ ist meromorph in allen Spitzen, das heißt in allen } s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}.$$

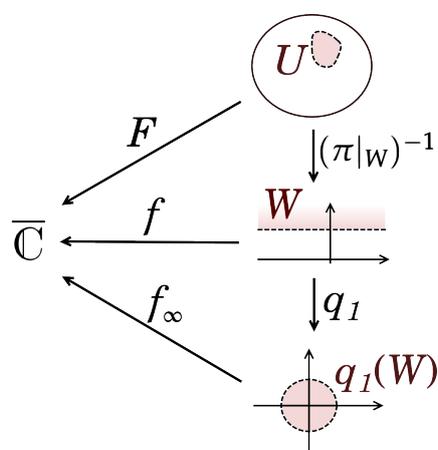


Abbildung 4.4: Die Situation im Spezialfall  $M = I_2$  und  $h = 1$ . Zu überprüfen ist die Meromorphie von  $f_\infty := f \circ q_1^{-1}$  in 0.

**Beispiel 4.41.** Offensichtlich sind alle konstanten Funktionen mit Werten in  $\mathbb{C}$  Modulfunktionen. In Abschnitt 4.11 werden wir mit der  $j$ -Funktion ein nicht-konstantes Beispiel einer Modulfunktion in  $V_0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$  kennenlernen.

## 4.7 Fourierentwicklung

In Abschnitt 4.6 haben wir ad hoc die Fourierentwicklung einer meromorphen Funktion  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$  eingeführt. Im Folgenden werden wir diesen Begriff noch besser verstehen müssen, weshalb wir ihn hier ein wenig gründlicher studieren werden.

Sei also  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine beliebige Abbildung. In Analogie zu den elliptischen Funktionen in Kapitel 3 nehmen wir nun an,  $f$  sei **periodisch**. Im Unterschied zu dort verlangen wir jedoch nur, dass es eine Periode  $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gibt mit

$$\{z + \omega \mid z \in D\} \subseteq D \quad \text{und} \quad f(z + \omega) = f(z) \quad \text{für alle } z \in D.$$

<sup>106</sup>Aus der Definition ist nicht ersichtlich, wieso man an dieser Stelle eine Null in den Index schreibt. In Abschnitt 4.8 werden wir sehen, dass es dafür gewichtige Gründe gibt.

**Beispiel 4.42.**  $e^z$  hat Periode  $2\pi i$  und  $\sin z, \cos z$  haben Periode  $2\pi$ .

**Bemerkung 4.43.** Hat  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  Periode  $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , so hat die Abbildung

$$g : \begin{cases} \frac{1}{\omega} \cdot D & \rightarrow \mathbb{C}, \\ z & \mapsto f(z\omega) \end{cases}$$

Periode 1, denn es gilt

$$g(z+1) = f((z+1)\omega) = f(z\omega + \omega) = f(z\omega) = g(z).$$

In diesem Abschnitt werden wir uns daher auf die Untersuchung 1-periodischer Funktionen beschränken.

Betrachten wir nun für  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  das Gebiet

$$D_{a,b} := \{z \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Im}(z) < b\}.$$

Die Abbildung

$$q_1 : \begin{cases} D_{a,b} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ z & \rightarrow q := e^{2\pi iz} \end{cases}$$

bildet  $D_{a,b}$  offensichtlich auf das Ringgebiet

$$D_r^R := \{q \in \mathbb{C} \mid r := e^{-2\pi b} < |q| < e^{-2\pi a} =: R\}$$

in der komplexen  $q$ -Ebene ab, wobei wir die Rechenregeln  $e^{-2\pi\infty} = 0$  und  $e^{-2\pi(-\infty)} = \infty$  verwenden.

**Bemerkung 4.44.** Offenbar gilt  $D_{0,\infty} = \mathbb{H}$  und  $q_1(\mathbb{H}) = U_0^1$ . In diesem Spezialfall stimmt also die Abbildung  $q_1$  mit derjenigen aus Abschnitt 4.6 überein.

Sei nun  $f : D_{a,b} \rightarrow \mathbb{C}$  speziell eine holomorphe, 1-periodische Funktion. Dann ist die durch  $f_\infty \circ q_1 = f$  gegebene Funktion  $f_\infty : D_r^R \rightarrow \mathbb{C}$  wohldefiniert,

denn: Für  $z \neq \tilde{z}$  mit  $e^{2\pi iz} = e^{2\pi i\tilde{z}}$  gilt  $z - \tilde{z} \in \mathbb{Z}$  und somit  $f(z) = f(\tilde{z})$ . #

Außerdem ist  $f_\infty$  auf  $D_r^R$  holomorph,

denn: Für ein beliebiges  $q_0 \in D_r^R$  untersuchen wir

$$\lim_{q \rightarrow q_0} \frac{f_\infty(q) - f_\infty(q_0)}{q - q_0}.$$

Wir wählen dafür eine Folge  $(q_\nu)_{\nu=1}^\infty$  in  $D_r^R \setminus \{q_0\}$ , die gegen  $q_0$  konvergiert, und schreiben  $q_\nu = e^{2\pi iz_\nu}$  für alle  $\nu \in \mathbb{N}$  mit je einem geeigneten  $z_\nu \in D_{a,b}$ . Wegen

$$q_\nu - q_0 = e^{2\pi iz_\nu} - e^{2\pi iz_0} = e^{2\pi iz_0} (e^{2\pi i(z_\nu - z_0)} - 1)$$

geht  $e^{2\pi i(z_\nu - z_0)}$  für  $\nu \rightarrow \infty$  gegen 1. Stetige Funktionen respektieren Grenzprozesse; nach Anwendung des Hauptzweigs des Logarithmus geht also  $\text{Log } e^{2\pi i(z_\nu - z_0)}$  für  $\nu \rightarrow \infty$  gegen  $\text{Log } 1 = 0$ . Nach Definition des Logarithmus gibt es andererseits für jedes  $\nu \geq 1$  eine ganze Zahl  $m_\nu$  mit

$$\text{Log } e^{2\pi i(z_\nu - z_0)} = 2\pi i(z_\nu - z_0) + 2\pi i m_\nu = 2\pi i(z_\nu + m_\nu) - 2\pi i z_0.$$

Ersetzen wir also  $z_\nu$  durch  $\tilde{z}_\nu := z_\nu + m_\nu$ , so geht  $\tilde{z}_\nu$  für  $\nu \rightarrow \infty$  gegen  $z_0$ . Mit der 1-Periodizität von  $f$  und  $z \mapsto e^{2\pi iz}$  folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{f_\infty(q_\nu) - f_\infty(q_0)}{q_\nu - q_0} &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{f(z_\nu) - f(z_0)}{e^{2\pi i z_\nu} - e^{2\pi i z_0}} \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{f(\tilde{z}_\nu) - f(z_0)}{e^{2\pi i \tilde{z}_\nu} - e^{2\pi i z_0}} \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\tilde{z}_\nu - z_0}{e^{2\pi i \tilde{z}_\nu} - e^{2\pi i z_0}} \cdot \frac{f(\tilde{z}_\nu) - f(z_0)}{\tilde{z}_\nu - z_0} \\ &= \frac{1}{2\pi i e^{2\pi i z_0}} \cdot f'(z_0) \end{aligned}$$

und somit die komplexe Differenzierbarkeit von  $f_\infty$  in  $q_0$ . #

Nach Funktionentheorie 1 hat  $f_\infty$  also eine auf Kompakta in  $D_r^R$  gleichmäßig absolut konvergente Laurententwicklung um  $q = 0$  von der Form

$$f_\infty(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n \quad \text{für alle } q \in D_r^R$$

mit Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|q|=\rho} \frac{f_\infty(q)}{q^{n+1}} dq \quad \text{für ein } \rho \in (r, R),$$

wobei über die Kreislinie genau einmal im positiven Sinne integriert wird. Setzen wir in der Koeffizientenformel die Parametrisierung der Integrationskurve ein, so erhalten wir

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f_\infty(\rho e^{2\pi i t})}{(\rho e^{2\pi i t})^{n+1}} \cdot 2\pi i \rho \cdot e^{2\pi i t} dt = \int_0^1 f_\infty(\rho e^{2\pi i t}) (\rho e^{2\pi i t})^{-n} dt.$$

Setzen wir  $z_0 := \frac{\log \rho}{2\pi i}$ , so haben wir insgesamt den folgenden Satz gezeigt.

**Satz 4.45.** Gelte  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , und sei  $f : D_{a,b} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit Periode 1. Dann hat  $f$  eine **Fourierentwicklung**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n = f_\infty(q) \quad \text{für alle } z \in D_{a,b}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten  $a_n \in \mathbb{C}$ .<sup>107</sup> Die Reihe ist gleichmäßig absolut konvergent auf Kompakta in  $D_{a,b}$ , und es gilt die Formel

$$a_n = \int_C f(z) e^{-2\pi i n z} dz \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z},$$

wobei  $C$  durch  $\gamma(t) = z_0 + t$  mit  $t \in [0, 1]$  gegeben ist.

<sup>107</sup>Wir werden manchmal diese Gleichungskette ausnutzen und etwas schlampig  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n$  für die Fourierentwicklung einer 1-periodischen Funktion  $f$  schreiben.

**Definition 4.46.** (a) Zu einer holomorphen, 1-periodischen Funktion  $f : D_{a,\infty} \rightarrow \mathbb{C}$  gibt es nach Satz 4.45 eine holomorphe Funktion  $f_\infty : D_0^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f_\infty \circ q_1 = f$ , wobei wir die dort eingeführte Notation benutzen. Wir nennen  $f$  **holomorph** bzw. **meromorph in  $z = \infty$** , wenn  $f_\infty$  in  $q = 0$  holomorph bzw. meromorph ist.

(b) Sei  $h \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Zu einer holomorphen,  $h$ -periodischen Funktion  $f : D_{a,\infty} \rightarrow \mathbb{C}$  ist nach Bemerkung 4.43 die Funktion  $g(z) := f(hz)$  holomorph und 1-periodisch. Die Funktion  $f$  heißt **holomorph** bzw. **meromorph in  $z = \infty$** , wenn dies im Sinne von (a) auf die Funktion  $g$  zutrifft.

(c) Sei nun speziell  $a = 0$ , und sei  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  eine meromorphe,  $h$ -periodische Funktion mit  $h \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Wir nennen  $f$  **holomorph** bzw. **meromorph in  $z = \infty$** , wenn

- die Menge

$$\{y \in \mathbb{R}_{>0} \mid \text{es gibt eine Polstelle von } f \text{ mit Imaginärteil } y\}$$

nach oben beschränkt ist, so dass die Einschränkung von  $f$  auf ein geeignetes  $D_{a,\infty}$  holomorph ist,

- diese Einschränkung  $f|_{D_{a,\infty}}$  im Sinne von (b) holomorph bzw. meromorph in  $z = \infty$  ist.

Es ist eine leichte aber lehrreiche Übung zu zeigen, dass diese Definition für  $k = 0$  mit derjenigen aus Abschnitt 4.6 übereinstimmt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir ein Beispiel studieren, das wir in Abschnitt 4.9 benötigen werden.

**Beispiel 4.47.** Sei  $k \geq 2$  eine ganze Zahl, und sei  $D_{0,\infty} = \mathbb{H}$  die obere Halbebene. Dann gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (z - n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}. \quad (4.9)$$

*Beweis.* Die Reihe auf der linken Seite von (4.9) konvergiert gleichmäßig absolut auf Kompakta in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ , wie wir in (2.3) für  $k = 2$  eingesehen hatten und im allgemeinen Fall analog zeigen könnten. Insbesondere stellt sie eine auf  $\mathbb{H}$  holomorphe Funktion dar. Wegen der absoluten Konvergenz können wir die Reihe auch umordnen und sehen so ein, dass die untersuchte Funktion 1-periodisch ist. Nach Satz 4.45 hat daher die linke Seite von (4.9) als holomorphe, 1-periodische Funktion auf  $\mathbb{H}$  eine Fourierentwicklung.

Nach der Partialbruchzerlegung 2.5 des Kotangens und deren absoluter Konvergenz gilt die Gleichheit meromorpher Funktionen aus  $\mathcal{M}(\mathbb{C})$

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right).$$

Andererseits gilt für alle  $z \in \mathbb{H}$

$$\pi \cot(\pi z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \frac{\frac{e^{\pi iz} + e^{-\pi iz}}{2}}{\frac{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}}{2i}} = \pi i \frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi i \frac{(q-1)+2}{q-1} = \pi i \left(1 + \frac{2}{q-1}\right) \\
&= \pi i \left(1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) = \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n,
\end{aligned}$$

wobei wir die Formel für die geometrische Reihe anwenden dürfen, da für  $z \in \mathbb{H}$  die Voraussetzung  $|q| < 1$  erfüllt ist. Fügen wir diese beiden Resultate zusammen, so erhalten wir

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right) = \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Da beide Seiten dieser Gleichung auf Kompakta in  $\mathbb{H}$  gleichmäßig absolut konvergieren, dürfen wir sie beliebig oft ableiten.  $(k-1)$ -maliges Ableiten nach  $z$  ergibt

$$(-1)^k (k-1)! \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^k} = (2\pi i)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n,$$

wie behauptet (*Nachrechnen!*). □

## 4.8 Modulformen

Der Begriff der meromorphen Modulform ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der Modulfunktion. Man betrachtet hierbei nicht nur meromorphe Funktionen, die unter der Aktion einer Kongruenzuntergruppe  $\Gamma$  invariant bleiben, sondern auch solche mit einem kontrollierten Transformationsverhalten unter  $\Gamma$  wie folgt.

**Proposition 4.48.** Für beliebiges  $k \in \mathbb{Z}$  ist über die Zuordnung  $(M, f) \mapsto f|_k M$  mit

$$(f|_k M)(z) := (cz + d)^{-k} f(M\langle z \rangle)$$

eine Aktion der Kongruenzuntergruppe  $\Gamma$  auf der Menge der meromorphen Funktionen in  $\mathcal{M}(\mathbb{H})$  gegeben. Der zugehörige Operator  $\cdot|_k$  heißt der **( $k$ -te) PETERSSON'sche Strichoperator**.<sup>108</sup>

*Beweis.* Für ein beliebiges  $z \in \mathbb{H}$  und

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

setzen wir  $j(M, z) := cz + d$ .<sup>109</sup> Wie man leicht überprüft, gilt dann für beliebige  $M, \tilde{M} \in \Gamma$  und alle  $z \in \mathbb{H}$  die so genannte **Kozykelbedingung**

$$j(M\tilde{M}, z) = j(M, \tilde{M}\langle z \rangle)j(\tilde{M}, z).$$

<sup>108</sup>Hans Petersson (1902-1984)

<sup>109</sup>Diese Schreibweise ist in der Theorie der Modulformen etabliert und hat den Vorteil, ohne Namen für die Einträge der Matrix  $M$  auszukommen.

Es folgt für die selben Matrizen  $M, \tilde{M}$  und alle  $z \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} (f|_k(M\tilde{M}))(z) &= j(M\tilde{M}, z)^{-k} f(M\tilde{M}(z)) \\ &= j(\tilde{M}, z)^{-k} j(M, \tilde{M}(z))^{-k} f(M(\tilde{M}(z))) \\ &= j(\tilde{M}, z)^{-k} (f|_k M)(\tilde{M}(z)) \\ &= ((f|_k M)|_k \tilde{M})(z). \end{aligned}$$

Da offensichtlich für alle  $z \in \mathbb{H}$  die Beziehung  $(f|_k I_2)(z) = f(z)$  gilt, folgt die Proposition.  $\square$

**Definition 4.49.** Sei  $k$  eine beliebige ganze Zahl. Eine meromorphe Funktion  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$  mit

$$(V_1) \quad f(z) = (cz + d)^{-k} f(M(z)) =: (f|_k M)(z) \quad \text{für alle } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma,$$

$$(V_2) \quad (f|_k M)(z) \text{ ist meromorph in } z = \infty \quad \text{für alle } M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

heißt eine (**meromorphe**) **Modulform** von **Gewicht**  $k$  bezüglich  $\Gamma$ . Ist für ein  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  die Funktion  $(f|_k M)(z)$  in  $z = \infty$  holomorph bzw. meromorph, so sagt man auch,  $f$  selbst sei **holomorph** bzw. **meromorph in der Spitze**  $M(\infty)$ .

**Bemerkung 4.50.** Um Bedingung  $(V_2)$  in Definition 4.49 im Allgemeinen einen Sinn zu geben, müssen wir nach Definition 4.46 zeigen, dass die dort vorkommenden Funktionen  $f|_k M$  für beliebige  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  ganzzahlige Periode haben. Da wir  $(V_1)$  voraussetzen können, ist dies tatsächlich so,

denn: Sei  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  beliebig. Wegen der Endlichkeit von  $[\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]$  enthält die unendliche Menge  $\{MT^h \mid h \in \mathbb{Z}\}$  zwangsläufig  $\Gamma$ -äquivalente Elemente; es gilt also

$$\tilde{M}MT^{h_1} = MT^{h_2} \quad \text{für ein } \tilde{M} \in \Gamma \text{ und } h_1, h_2 \in \mathbb{Z}.$$

Mit Proposition 4.48 folgt

$$\begin{aligned} (f|_k M)(z + h_2 - h_1) &= \left( (f|_k M)|_k T^{h_2 - h_1} \right)(z) = \left( f|_k (MT^{h_2 - h_1}) \right)(z) \\ &= (f|_k(\tilde{M}M))(z) \stackrel{(V_1)}{=} (f|_k M)(z) \end{aligned}$$

und somit die Bemerkung. #

**Definition 4.51.** Sei  $f$  eine meromorphe Modulform von Gewicht  $k$  bezüglich  $\Gamma$ , sei  $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  eine Spitze, und sei  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  eine beliebige Matrix mit  $M(\infty) = s$ . Dann heißt für alle  $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$

$$w_0\text{-ord}(f; s) := w_0\text{-ord}((f|_k M)_\infty; 0)$$

die  $w_0$ -**Ordnung** von  $f$  in  $z = s$ .

**Bemerkung 4.52.** Der Begriff der  $w_0$ -Ordnung in  $z = s$  einer meromorphen Modulform ist wohldefiniert, hängt also nicht von der speziellen Wahl der Matrix  $M$  mit  $M(\infty) = s$  ab,

denn: Sei  $M' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  eine weitere Matrix mit  $M' \langle \infty \rangle = s$ . Nach Definition der Meromorphie in  $z = s$  hat  $f$  dann zwei Fourierentwicklungen

$$f(z) = \sum_{n=-N(M)}^{\infty} a_n(M) e^{\frac{2\pi i}{h} M^{-1} \langle z \rangle} = \sum_{n=-N(M')}^{\infty} a_n(M') e^{\frac{2\pi i}{h} (M')^{-1} \langle z \rangle}$$

mit geeigneten  $N(M), N(M') \in \mathbb{Z}$ .<sup>110</sup> Andererseits liegt offenbar  $(M')^{-1}M$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$ , es gibt also ein  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $(M')^{-1}M = T^k$ . Es folgt

$$f(z) = \sum_{n=-N(M')}^{\infty} a_n(M') e^{\frac{2\pi i}{h} (M^{-1} \langle z \rangle + k)} = \sum_{n=-N(M')}^{\infty} \left( a_n(M') e^{\frac{2\pi i k}{h}} \right) e^{\frac{2\pi i}{h} M^{-1} \langle z \rangle}.$$

Aus der Eindeutigkeit der Laurententwicklung bekommen wir nun sofort

$$a_n(M) = a_n(M') e^{\frac{2\pi i k n}{h}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

und insbesondere  $N(M) = N(M')$  wie behauptet. #

**Definition 4.53.** (a) Für den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der meromorphen Modulformen von Gewicht  $k$  bezüglich  $\Gamma$  schreiben wir  $V_k(\Gamma)$ .<sup>111</sup>

(b) Den Unterraum der auf ganz  $\mathbb{H}^*$  holomorphen Modulformen aus  $V_k(\Gamma)$  bezeichnen wir mit  $M_k(\Gamma)$  und nennen seine Elemente die **(ganzen) Modulformen** von Gewicht  $k$  bezüglich  $\Gamma$ .

(c) Für den Unterraum der in allen Spitzen verschwindenden Modulformen aus  $M_k(\Gamma)$  schreiben wir  $S_k(\Gamma)$ ; seine Elemente heißen die **Spitzenformen** von Gewicht  $k$  bezüglich  $\Gamma$ .

**Bemerkung 4.54.** Gilt  $-I_2 \in \Gamma$ , so folgt  $V_k(\Gamma) = \{0\}$  für alle ungeraden Werte von  $k$ ,

denn: Nach  $(V_1)$  gilt dann für ein beliebiges  $f \in V_k(\Gamma)$

$$f(z) = (f|_k(-I_2))(z) = (0 \cdot z + (-1))^{-k} f((-I_2) \langle z \rangle) = (-1)^k f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Für ungerades  $k$  folgt sofort  $f \equiv 0$ , wie behauptet. #

Ein guter Grund solche Funktionen zu untersuchen, ist, dass sich die Eisensteinreihen aus Abschnitt 3.3 leicht in solche Funktionen übersetzen lassen, wie wir in Abschnitt 4.9 sehen werden. Eine strukturelle Motivation ergibt sich aus der Theorie der Differentiale auf Riemann'schen Flächen.<sup>112</sup>

Eine für die Praxis interessante Fragestellung ist die, wie man einer meromorphen Funktion  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$  ansehen kann, ob sie in  $V_k(\Gamma)$  liegt. Besonders schwierig ist hierbei die Meromorphie in den Spitzen zu überprüfen. Die folgende Beobachtung vereinfacht diese Überprüfung ganz erheblich.

<sup>110</sup>Dass die Zahl  $h$  nicht von der Wahl der Matrix  $M$  abhängt, hatten wir schon in Abschnitt 4.6 eingesehen.

<sup>111</sup>Die in Abschnitt 4.6 eingeführten Modulfunktionen sind offenbar gerade die meromorphen Modulformen von Gewicht 0. So rechtfertigt sich die Schreibweise  $V_0(\Gamma)$ , die zunächst noch etwas rätselhaft war.

<sup>112</sup>Tatsächlich gibt es einen  $\mathbb{C}$ -Vektorraumisomorphismus zwischen dem Raum  $\Omega^1(\Gamma \backslash \mathbb{H}^*)$  der holomorphen Differentiale auf  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  und dem Raum  $S_2(\Gamma)$  der Spitzenformen vom Gewicht 2.

**Lemma 4.55.** Sei  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$  eine meromorphe Funktion mit  $(V_1)$ . Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

- (i)  $f$  ist meromorph in allen Spitzen.
- (ii)  $f$  ist meromorph in einem Vertretersystem der Äquivalenzklassen von Spitzen bezüglich  $\Gamma$ .<sup>113</sup>

*Beweis.* Zum Beweis genügt es offenbar zu zeigen, dass (i) aus (ii) folgt. Seien also  $s, t \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  zwei Spitzen mit  $\tilde{M}\langle t \rangle = s$  für ein  $\tilde{M} \in \Gamma$ . Wir nehmen an, dass  $f$  in  $t$  meromorph ist, dass es also ein  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit  $M\langle \infty \rangle = t$  gibt, so dass  $(f|_k M)(z)$  in  $z = \infty$  meromorph ist. Die Meromorphie von  $f$  in  $s$  folgt sofort wegen

$$(f|_k(\tilde{M}M))(z) = (f|_k M)(z)$$

und  $\tilde{M}M\langle \infty \rangle = s$ . □

Im für uns wichtigsten Fall  $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  gibt es bekanntlich nur eine Äquivalenzklasse von Spitzen. Nach Lemma 4.55 genügt es in diesem Fall also, die Meromorphie einer meromorphen Funktion  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$  in  $z_0 = \infty$  zu überprüfen.

## 4.9 Beispiele für Modulformen

Wir wollen nun endlich nichttriviale Beispiele für Modulformen kennenlernen. Der Übersichtlichkeit halber beschränken wir uns dafür auf Modulformen zu  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Um die Notation einfach zu halten schreiben wir ab sofort kurz  $V_k, M_k$  und  $S_k$  für  $V_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ ,  $M_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$  und  $S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ .

**Definition 4.56.** Sei  $k \geq 4$  eine gerade ganze Zahl. Dann heißt

$$G_k(z) := \sum'_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} (mz + n)^{-k} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

die *Eisensteinreihe* vom Gewicht  $k$ .

**Bemerkung 4.57.** In Proposition 3.26 haben wir schon einmal eine Eisensteinreihe definiert, damals in Abhängigkeit von einem Gitter  $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  mit  $\mathbb{R}$ -linear unabhängigen  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ . Im Spezialfall  $\omega_1 = z \in \mathbb{H}$  und  $\omega_2 = 1$  erhalten wir die Eisensteinreihe aus Definition 4.56. Tatsächlich ist bis auf Multiplikation mit einem  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  jedes Gitter  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  von diesem Typ,

denn: Wir setzen  $a := \omega_2$ . Dann gilt

$$\omega_2^{-1}\Lambda = \mathbb{Z} \frac{\omega_1}{\omega_2} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \left( -\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) + \mathbb{Z}.$$

Wegen der  $\mathbb{R}$ -linearen Unabhängigkeit liegt eine der Zahlen  $\pm \frac{\omega_2}{\omega_1}$  in der oberen Halbebene. #

<sup>113</sup>Nach Proposition 4.20 ist dies eine endliche Menge.

Wir müssen bei dieser Übersetzung allerdings aufpassen, denn aus der Definition der Eisensteinreihe in Proposition 3.26 ist unmittelbar klar, dass

$$G_k(a\Lambda) = a^{-k} G_k(\Lambda) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

gilt. Die Eisensteinreihen sind also unter Drehstreckung des zugrundeliegenden Gitters nicht invariant. Wir werden aber in Proposition 4.70 eine aus Eisensteinreihen zusammengesetzte Funktion kennenlernen, die tatsächlich invariant ist.

**Lemma 4.58.** Die Reihe  $G_k$  ist gleichmäßig absolut konvergent auf Bereichen der Form

$$D_\varepsilon := \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}(z) \geq \varepsilon, \operatorname{Re}(z)^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}\} \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Inbesondere ist die durch  $G_k$  gegebene Funktion auf  $\mathbb{H}$  holomorph.

*Beweis.* Wegen  $k > 2$ , Lemma 3.21 und dem Majorantenkriterium genügt es zum Beweis des Lemmas zu zeigen, dass es ein  $\delta > 0$  gibt mit

$$|mz + n|^2 \geq \delta |mi + n|^2 = \delta(m^2 + n^2) \quad \text{für alle } z \in D_\varepsilon \text{ und alle } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Wenn wir wie üblich  $z = x + iy$  schreiben, lässt sich dies äquivalent umformen dazu, dass es ein  $\delta > 0$  gibt mit

$$(x^2 + y^2 - \delta)m^2 + 2xmn + (1 - \delta)n^2 \geq 0 \quad \text{für alle } z \in D_\varepsilon \text{ und alle } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Etwas algebraischer formuliert heißt das nichts anderes als, dass es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle  $z \in D_\varepsilon$  die quadratische Form

$$(x^2 + y^2 - \delta)X^2 + 2xXY + (1 - \delta)Y^2$$

positiv semidefinit ist, also ausschließlich Werte  $\geq 0$  annimmt.<sup>92</sup> Es gilt also zu zeigen, dass es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle  $z \in D_\varepsilon$  die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2 + y^2 - \delta & x \\ x & 1 - \delta \end{pmatrix}$$

positiv semidefinit ist, also für die Hauptminoren gilt

- (i)  $x^2 + y^2 - \delta \geq 0$ ,
- (ii)  $(x^2 + y^2 - \delta)(1 - \delta) - x^2 = -\delta x^2 + (1 - \delta)y^2 - \delta(1 - \delta) \geq 0$ .

Nach Definition von  $D_\varepsilon$  genügt es  $\delta < \varepsilon^2$  zu setzen, um Bedingung (i) zu erfüllen. Für Bedingung (ii) nehmen wir nun ohne Einschränkung  $\delta < 1$  an. Dann gilt für alle  $z \in D_\varepsilon$  die Abschätzung

$$-\delta x^2 + (1 - \delta)y^2 - \delta(1 - \delta) \geq -\delta\varepsilon^{-1} + (1 - \delta)\varepsilon^2 - \delta(1 - \delta),$$

und Bedingung (ii) folgt, wenn wir zeigen können, dass es ein  $\delta \in (0, 1)$  gibt mit

$$\varepsilon^2 \geq \delta \frac{\varepsilon^{-1} + (1 - \delta)}{1 - \delta}.$$

Das Lemma folgt, da die rechte Seite offensichtlich für  $\delta \rightarrow 0$  gegen Null geht.  $\square$

**Satz 4.59.** Für jedes gerade ganze  $k \geq 4$  liegt die Eisensteinreihe  $G_k$  in  $M_k$ .

*Beweis.* Nach Korollar 4.14 wird die Gruppe  $SL_2(\mathbb{Z})$  erzeugt von der Stürzung  $S$  und der Translation  $T$ . Da der Petersson'sche Strichoperator nach Bemerkung 4.48 tatsächlich ein Operator ist, genügt es zur Überprüfung der Modulform-Eigenschaft ( $V_1$ ) die Bedingungen

$$G_k|_k S = G_k \quad \text{und} \quad G_k|_k T = G_k$$

zu zeigen. Tatsächlich gilt für alle  $z \in \mathbb{H}$

$$G_k(z+1) = \sum'_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} (m(z+1) + n)^{-k} = \sum'_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} (mz + (m+n))^{-k} = G_k(z)$$

und

$$z^{-k} G_k\left(-\frac{1}{z}\right) = z^{-k} \sum'_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \left(m\left(-\frac{1}{z}\right) + n\right)^{-k} = \sum'_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} (nz - m)^{-k} = G_k(z).$$

Bei den Umformungen gilt zu beachten, dass mit  $(m, n)$  auch  $(m, m+n)$  und  $(n, -m)$  alle Elemente von  $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  genau einmal durchlaufen und dass die betrachteten Reihen absolut also unbedingt konvergieren.

Es verbleibt die Holomorphie von  $G_k$  in den Spitzen zu zeigen. Nach Lemma 4.55 genügt es dafür die Holomorphie in einem vollständigen Vertretersystem der Spitzen von  $SL_2(\mathbb{Z})$  zu überprüfen, und nach Bemerkung 4.10 ist ein solches durch  $\{\infty\}$  gegeben. Zu zeigen ist nach der Definition von Holomorphie in  $\infty$  und dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz, dass  $G_k \circ q_1^{-1}$  in einer kleinen Umgebung von  $q = 0$  beschränkt ist. Das ist sicherlich richtig, wenn

$$\lim_{q \rightarrow 0} (G_k \circ q_1^{-1}) = \lim_{z \rightarrow \infty} G_k$$

existiert. Sei also  $(z_\nu)_{\nu=1}^\infty$  eine Folge in  $\mathbb{H}$  mit  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{Im}(z_\nu) = \infty$ . Wegen  $G_k(z+1) = G_k(z)$  für alle  $z \in \mathbb{H}$  können wir ohne Einschränkung  $|\text{Re}(z_\nu)| \leq \frac{1}{2}$  für alle  $\nu$  annehmen. Dann liegen alle Punkte  $z_\nu$  ab einem hinreichend großen  $\nu$  in

$$D_1 = \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Im}(z) \geq 1, \text{Re}(z)^2 \leq 1\}.$$

Nach Lemma 4.58 konvergiert die Eisensteinreihe  $G_k$  auf  $D_1$  gleichmäßig, so dass wir den Grenzübergang gliedweise vollziehen dürfen. Wir erhalten

$$\sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ m \neq 0}} \lim_{\nu \rightarrow \infty} (mz_\nu + n)^{-k} = 0$$

und somit

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} G_k(z_\nu) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k},$$

womit der Satz gezeigt ist. □

**Satz 4.60.** Die Fourierentwicklung der Eisensteinreihe  $G_k$  mit  $k \geq 4$  ganz und gerade ist durch

$$G_k(z) = 2 \zeta(k) + 2 \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

gegeben, wobei

$$\zeta(k) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$$

den Wert der **Riemann'schen Zetafunktion** an der Stelle  $k$  bezeichnet und

$$\sigma_{k-1}(n) := \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d^{k-1}$$

die  $(k-1)$ -te **Teilersummenfunktion** definiert.

*Beweis.* Da die Reihe nach Lemma 4.58 absolut konvergiert, dürfen wir sie in einen Teil mit  $m = 0$  und einen Teil mit  $m \neq 0$  aufspalten und erhalten so

$$G_k(z) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} n^{-k} + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 0}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (mz + n)^{-k} \stackrel{k \text{ gerade}}{=} 2 \zeta(k) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (mz + n)^{-k}.$$

Desweiteren gilt für alle ganzen  $k \geq 2$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (w + n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{2\pi i n w} \quad \text{für alle } w \in \mathbb{H},$$

wie wir in (4.9) eingesehen haben. Wenden wir dies mit  $w = mz$  an, erhalten wir

$$G_k(z) = 2 \zeta(k) + 2 \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^{mn}.$$

Setzen wir nun  $t := mn$ , so durchläuft  $n$  alle positiven Teiler von  $t$ , und es gilt

$$G_k(z) = 2 \zeta(k) + 2 \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{t=1}^{\infty} \left( \sum_{\substack{d|t \\ d>0}} d^{k-1} \right) q^t.$$

Nach Definition der  $(k-1)$ -ten Teilersummenfunktion haben wir somit den Satz bewiesen.  $\square$

**Satz 4.61.** Die **BERNOULLIZahlen**<sup>114</sup>  $B_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  sind definiert durch die Taylorentwicklung von

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \quad \text{für alle } z \in U_{2\pi}(0).$$

Für sie gelten die folgenden Eigenschaften.

<sup>114</sup>Jakob I. Bernoulli (1655-1705), wobei die Bezeichnung „I.“ zur Abgrenzung von seinem ebenfalls in der Mathematik tätigen Großneffen Jakob II. Bernoulli (1759-1789) dient.

- (i)  $B_n \in \mathbb{Q}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Speziell gelten  $B_0 = 1$  und  $B_1 = -\frac{1}{2}$ .
- (ii) Es gilt die Rekursionsformel  $(-1)^n B_n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} B_\nu$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- (iii) Für ungerades  $n > 1$  gilt  $B_n = 0$ .
- (iv) Für gerades  $n \geq 2$  gilt  $B_n = \frac{(-1)^{n/2-1} n!}{2^{n-1} \pi^n} \zeta(n)$ .

*Beweis.* Zunächst gilt es den Konvergenzbereich der Taylorreihe aus dem Satz zu bestimmen. Dafür betrachten wir die Funktion  $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ . Diese hat in  $z_0 = 0$  eine hebbare Singularität und nimmt dort den Wert 1 an. Desweiteren hat sie Polstellen in den Punkten  $z_\nu = 2\pi i \nu$  für alle  $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Das sind alle Singularitäten von  $f$ . Nach dem Satz von Taylor konvergiert also die Taylorentwicklung von  $f$  um  $z = 0$  in  $U_{2\pi}(0)$ .

Sei also  $z \in U_{2\pi}(0)$ . Dann gilt zum einen

$$1 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} z^n = B_0.$$

Zum anderen haben wir

$$\begin{aligned} -z &= z \left( \frac{1 - e^z}{e^z - 1} \right) = z \left( \frac{1}{e^z - 1} - \frac{e^z}{e^z - 1} \right) = z \left( \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{1 - e^{-z}} \right) = \frac{z}{e^z - 1} - \frac{-z}{e^{-z} - 1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (1 - (-1)^n) z^n = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{2B_n}{n!} z^n, \end{aligned}$$

so dass wir nach Koeffizientenvergleich

$$B_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad B_n = 0 \quad \text{für alle ungeraden } n > 1$$

und insbesondere (iii) erhalten. Daraus, aus  $B_0 = 1$  und aus der Rekursionsformel für  $n + 1$  folgt  $B_n \in \mathbb{Q}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und somit Behauptung (i).

Die Rekursionsformel wiederum folgt mit Koeffizientenvergleich aus

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} B_\nu \frac{z^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n \frac{B_\nu}{\nu!(n-\nu)!} z^n \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!\mu!} z^{\nu+\mu} && (\mu := n - \nu) \\ &= \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} z^\nu \right) \cdot \left( \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^\mu}{\mu!} \right) \\ &= \frac{z}{e^z - 1} \cdot e^z \\ &= \frac{-z}{e^{-z} - 1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot B_n \frac{z^n}{n!}. \end{aligned}$$

Es verbleibt Behauptung (iv) zu zeigen. Dafür setzen wir  $z = 2\pi iw$ . Für  $w \in U_1(0)$  gilt dann

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2\pi iw)^n &= \frac{2\pi iw}{e^{2\pi iw} - 1} = \pi iw \frac{2}{e^{2\pi iw} - 1} \\ &= \pi iw \left( \frac{e^{2\pi iw} + 1}{e^{2\pi iw} - 1} - \frac{e^{2\pi iw} - 1}{e^{2\pi iw} - 1} \right) = \pi iw \left( \frac{e^{\pi iw} + e^{-\pi iw}}{e^{\pi iw} - e^{-\pi iw}} - 1 \right) \\ &= \pi w (\cot(\pi w) - i). \end{aligned}$$

Mit  $B_1 = -\frac{1}{2}$  folgt

$$\pi w \cot(\pi w) = 1 + \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{n/2} (2\pi)^n B_n}{n!} w^n \quad \text{für alle } w \in U_1(0).$$

Andererseits gilt mit der Partialbruchzerlegung (2.5) des Kotangens

$$\begin{aligned} \pi w \cot(\pi w) &= 1 + w \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{w - m} + \frac{1}{m} \right) = 1 + w \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{w - m} + \frac{1}{w + m} \right) \\ &= 1 + 2w^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{w^2 - m^2} = 1 - 2w^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{w}{m})^2} \\ &= 1 - 2w^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{w}{m} \right)^{2n} = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n+2}} \right) w^{2n+2} \\ &= 1 - 2 \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \zeta(n) w^n. \end{aligned}$$

Behauptung (iv) folgt aus einem weiteren Koeffizientenvergleich. □

**Definition 4.62.** Sei  $k \geq 4$  eine gerade ganze Zahl. Dann heißt

$$E_k(z) := \frac{1}{2\zeta(k)} \cdot G_k(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

die *normierte Eisensteinreihe vom Gewicht  $k$* .

Nach Satz 4.61 ist die Fourierreiheentwicklung der normierten Eisensteinreihen durch

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

gegeben. Mit  $B_4 = -\frac{1}{30}$  und  $B_6 = \frac{1}{42}$  gilt also im Speziellen

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n \quad \text{und} \quad E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n.$$

**Bemerkung 4.63.** Da die Bernoullizahlen nach Satz 4.61 rationale Zahlen sind, trifft dies auch auf die Fourierkoeffizienten der normierten Eisensteinreihen  $E_k$  mit  $k \geq 4$  ganz und gerade zu. In den Spezialfällen  $E_4$  und  $E_6$  sehen wir, dass die Koeffizienten sogar ganzzahlig sind.

Mithilfe der Eisensteinreihen lässt sich ohne Mühe eine Vielfalt weiterer Modulformen einführen. Wir beschränken uns auf zwei Beispiele.

**Proposition 4.64.** Die Diskriminante

$$\Delta(z) := \frac{1}{1728} (E_4^3 - E_6^2) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

ist eine Funktion in  $S_{12}$ . Ihre Fourierentwicklung ist von der Form

$$\Delta(z) = 0 + q - 24 q^2 \pm \text{Terme höherer Ordnung.}$$

*Beweis.* Nach Übungsaufgabe 4.5 sind  $E_4^3$  und  $E_6^2$  jeweils Modulformen in  $M_{12}$ . Da  $M_{12}$  ein Vektorraum ist, folgt  $\Delta \in M_{12}$ . Der Rest der Proposition ergibt sich, wenn wir die explizit bekannten Fourierentwicklungen von  $E_4$  und  $E_6$  dazu benutzen, um ebensolche für  $E_4^3$  und  $E_6^2$  zu bestimmen. In der Tat gelten

$$\begin{aligned} E_4^3(z) &= 1 + 720 q + 179280 q^2 + \text{Terme höherer Ordnung,} \\ E_6^2(z) &= 1 - 1008 q + 220752 q^2 \pm \text{Terme höherer Ordnung.} \end{aligned}$$

□

Die Diskriminante wird zusammen mit den Eisensteinreihen eine wichtige Rolle bei der Untersuchung der Struktur der Räume  $M_k$  in Abschnitt 4.10 spielen.

## 4.10 Die Valenzformel und Folgerungen daraus

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, die Valenzformel 4.65 zu zeigen und als Folgerung daraus Basen für die  $\mathbb{C}$ -Vektorräume  $M_k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  angeben zu können.

**Satz 4.65.** Sei  $f \in V_k$  nicht konstant Null. Sei  $S(f)$  bzw.  $T(f)$  ein Vertretersystem modulo  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  von Polstellen bzw. Nullstellen von  $f$  auf  $\mathbb{H}^*$ . Dann gilt die **Valenzformel**, oft auch kurz  $\frac{k}{12}$ -Formel genannt,

$$\sum_{t \in T(f)} \frac{0\text{-ord}(f; t)}{e_t} - \sum_{s \in S(f)} \frac{\infty\text{-ord}(f; s)}{e_s} = \frac{k}{12} \quad \text{mit} \quad e_z := \begin{cases} \frac{|\text{SL}_2(\mathbb{Z})_z|}{2} & \text{für } z \in \mathbb{H}, \\ 1 & \text{für } z \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}. \end{cases}$$

**Bemerkung 4.66.** Nach Lemma 2.16 ist eine Lösung einer Cousin-Verteilung auf  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*$  nichts anderes als eine Lösung einer geeigneten Null- und Polstellenverteilung  $(\{u_s\}_{s \in S}, \{u_t\}_{t \in T})$ . In Hinsicht auf Satz 4.40 besagt nun die Valenzformel 4.65 angewendet auf Modulfunktionen aus  $V_0$ , dass eine solche Null- und Polstellenverteilung nur dann eine Lösung haben kann, wenn

$$\sum_{s \in S} \frac{u_s}{e_s} = \sum_{t \in T} \frac{u_t}{e_t}$$

gilt. Es lohnt ein Vergleich mit dem 4. Liouville'schen Satz 3.18.

*Beweis von Satz 4.65.* Zunächst sei bemerkt, dass die Summen in der Valenzformel endlich sind, denn: Die Menge  $\mathcal{F} \cup \{\infty\}$  ist kompakt, wie wir im Beweis von Lemma 4.27 eingesehen haben, so dass eine meromorphe Funktion dort nur endlich viele Null- bzw. Polstellen haben kann. Die Behauptung folgt, da  $\mathcal{F} \cup \{\infty\}$  bekanntermaßen ein Vertretersystem von  $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*$  enthält. #

Sei also  $0 \neq f \in V_k$  gegeben. Die Beweisidee ist dann die folgende. Wir integrieren die Funktion  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  entlang eines geeignet modifizierten Randes des Fundamentalbereichs  $\mathcal{F}$  und werten dieses Integral auf zwei verschiedene Weisen aus, zum einen mithilfe des Satzes vom Null- und Polstellen zählenden Integrals und zum anderen unter Ausnutzung des Transformationsverhaltens von  $f$  unter  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

Nehmen wir zunächst an,  $f$  habe auf dem Rand  $\partial\mathcal{F}$  keine Null- und Polstellen mit der möglichen Ausnahme der Punkte  $i$  und  $\bar{q}$  (und dann auch  $-\bar{q}$ ). Sei  $C$  die in der folgenden Zeichnung rot dargestellte stückweise glatte geschlossene Kurve.  $C$  werde dabei in mathematisch positiver Richtung einfach durchlaufen.

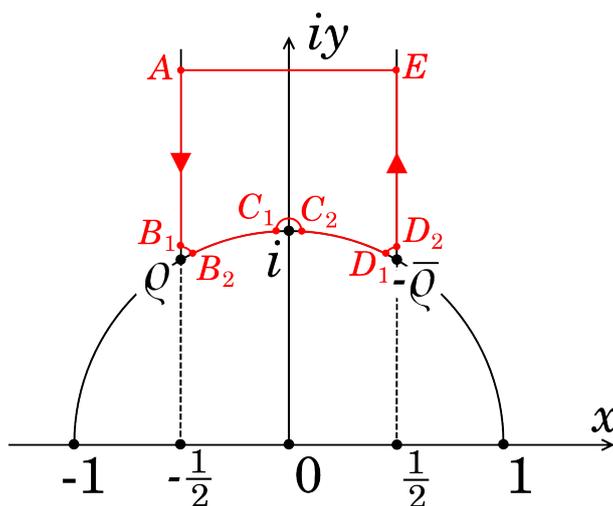


Abbildung 4.5: Die Punkte  $A$  und  $E$  sind so gewählt, dass es (mit möglicher Ausnahme von  $\infty$ , das wir uns hier als  $\lim_{y \rightarrow \infty} iy$  vorstellen sollten) keine Null- oder Polstelle von  $f$  mit Imaginärteil größer  $\text{Im}(A) = \text{Im}(E)$  gibt. Die Punkte  $B_1, B_2$  bzw.  $C_1, C_2$  bzw.  $D_1, D_2$  sind so gewählt, dass das Kurvenstück von  $q$  bzw.  $i$  bzw.  $-\bar{q}$  bis zu ihnen Länge  $\varepsilon > 0$  hat. Hierbei ist  $\varepsilon$  so klein gewählt, dass im Inneren der Kurve  $C$  von jeder Null- und Polstelle von  $f$  (mit möglicher Ausnahme von  $q$  und  $i$ ) jeweils genau ein Vertreter modulo  $\Gamma$  liegt.

Nach Konstruktion und dem Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{\substack{z \in \mathcal{F} \\ z \neq i, q}} (0\text{-ord}(f; z) - \infty\text{-ord}(f; z)) \\ &= \sum_{t \in T(f)} 0\text{-ord}(f; t) - \sum_{s \in S(f)} \infty\text{-ord}(f; s) - \sum_{z \in \{q, i, \infty\}} (0\text{-ord}(f; z) - \infty\text{-ord}(f; z)). \end{aligned}$$

Wir wollen das Integral nun auch abschnittsweise per Hand ausrechnen und das Ergebnis mit dieser Formel vergleichen.

- (i) Die Geradenstücke  $\overline{AB_1}$  von  $A$  nach  $B_1$  und  $\overline{ED_2}$  von  $E$  nach  $D_2$  werden unter Anwendung der Translation  $T$  aufeinander abgebildet. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{ED_2}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{AB_1}} \frac{f'(T\langle z \rangle)}{f(T\langle z \rangle)} dT\langle z \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{AB_1}} \frac{f'(z+1)}{f(z+1)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{AB_1}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \end{aligned}$$

- (ii) Der Kreisbogen  $\widehat{B_1 B_2}$  von  $B_1$  nach  $B_2$  wird parametrisiert durch  $z = \varrho + \varepsilon e^{it}$  für  $t \in [\alpha(\varepsilon), \frac{\pi}{2}]$  mit einem geeigneten Winkel  $\alpha(\varepsilon)$ . In einer den Kreisbogen ganz enthaltenden punktierten Kreisscheibe um  $\varrho$  können wir  $f$  nach dem Satz von der Laurententwicklung schreiben als

$$f(z) = (z - \varrho)^m g(z)$$

mit  $m = 0\text{-ord}(f; \varrho) - \infty\text{-ord}(f; \varrho)$  und einer in der ganzen Kreisscheibe holomorphen Funktion  $g$  mit  $g(\varrho) \neq 0$ . In dieser Notation gilt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - \varrho} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{B_1 B_2}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha(\varepsilon)} \left( \frac{m}{\varepsilon e^{it}} + \frac{g'(\varrho + \varepsilon e^{it})}{g(\varrho + \varepsilon e^{it})} \right) i\varepsilon e^{it} dt \\ &= \frac{m}{2\pi} (\alpha(\varepsilon) - \frac{\pi}{2}) + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha(\varepsilon)} \frac{g'(\varrho + \varepsilon e^{it})}{g(\varrho + \varepsilon e^{it})} e^{it} dt \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m}{2\pi} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \right) + 0 \\ &= -\frac{1}{6} (0\text{-ord}(f; \varrho) - \infty\text{-ord}(f; \varrho)), \end{aligned}$$

denn der Integrand im zweiten Term ist beschränkt. Analog gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{D_1 D_2}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{6} (0\text{-ord}(f; \varrho) - \infty\text{-ord}(f; \varrho)),$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die Ordnungen in  $-\bar{\varrho}$  wegen der Äquivalenz die selben wie in  $\varrho$  sind, und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{C_1 C_2}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2} (0\text{-ord}(f; i) - \infty\text{-ord}(f; i)).$$

- (iii) Die Kreisbögen  $B_2\hat{C}_1$  von  $B_2$  nach  $C_1$  und  $D_1\hat{C}_2$  von  $D_1$  nach  $C_2$  werden unter Anwendung der Stürzung  $S$  aufeinander abgebildet, denn auf die Einheitskreislinie eingeschränkt gilt

$$S\langle z \rangle = -\frac{1}{z} = -\frac{\bar{z}}{|z|^2} = -\bar{z}, \quad \text{also } S\langle x + iy \rangle = -x + iy.$$

Es folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{D_1\hat{C}_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2\hat{C}_1} \frac{f'(S\langle z \rangle)}{f(S\langle z \rangle)} dS\langle z \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2\hat{C}_1} \frac{f'(S\langle z \rangle)}{z^k f(z)} \left( \frac{dz}{z^2} \right). \quad (4.10)$$

Leiten wir die gerade schon benutzte Beziehung  $f(S\langle z \rangle) = z^k f(z)$  ab, so erhalten wir

$$f'(S\langle z \rangle) \frac{\partial S\langle z \rangle}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} f(S\langle z \rangle) = kz^{k-1} f(z) + z^k f'(z).$$

Eingesetzt in (4.10) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{D_1\hat{C}_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2\hat{C}_1} \frac{kz^{k-1} f(z) + z^k f'(z)}{z^{k-2} f(z)} \left( \frac{dz}{z^2} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2\hat{C}_1} \left( \frac{k}{z} + \frac{f'(z)}{f(z)} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2\hat{C}_1} \frac{k}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2\hat{C}_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \end{aligned}$$

Für das erste Integral auf der rechten Seite gilt hierbei

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{B_2\hat{C}_1} \frac{k}{z} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k}{2\pi} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{k}{2\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{k}{12}.$$

- (iv) Die Abbildung  $q_1 : z \mapsto e^{2\pi iz}$  bildet das Geradenstück  $\overline{EA}$  auf eine genau einmal negativ durchlaufene Kreislinie  $K$  um  $q = 0$  ab, in deren Inneren, mit der möglichen Ausnahme von  $q = 0$ , keine Null- und Polstellen von  $f \circ q_1^{-1}$  liegen. Mit dem bekannten Zusammenhang

$$f(z) = \sum_{n \geq N} a_n e^{2\pi inz} = \sum_{n \geq N} a_n q^n = (f \circ q_1^{-1})(q)$$

zwischen der Fourierentwicklung von  $f$  bei  $z = \infty$  und der Laurententwicklung von  $f \circ q_1^{-1}$  um  $q = 0$  gilt dann

$$f'(z) = 2\pi i \sum_{n \geq N} n a_n e^{2\pi inz} = 2\pi i q \sum_{n \geq N} n a_n q^{n-1} = 2\pi i q (f \circ q_1^{-1})'(q)$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{EA}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{2\pi i q (f \circ q_1^{-1})'(q)}{(f \circ q_1^{-1})(q)} \frac{dq}{2\pi i q} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{(f \circ q_1^{-1})'(q)}{(f \circ q_1^{-1})(q)} dq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left( 0\text{-ord}((f \circ q_1^{-1}); 0) - \infty\text{-ord}((f \circ q_1^{-1}); 0) \right) \\
&= - (0\text{-ord}(f; \infty) - \infty\text{-ord}(f; \infty)),
\end{aligned}$$

wobei das vorletzte Gleichheitszeichen mit dem Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral folgt.

Offensichtlich haben wir hiermit die Valenzformel für den Fall bewiesen, dass  $f$  auf  $\partial\mathcal{F}$  mit der möglichen Ausnahme von  $i$  und  $\varrho$  keine Null- und Polstellen hat. Für den Fall, dass es doch solche Null- und Polstellen gibt, modifiziert man die Integrationskurve wie in der Abbildung angegeben und verfährt entsprechend.

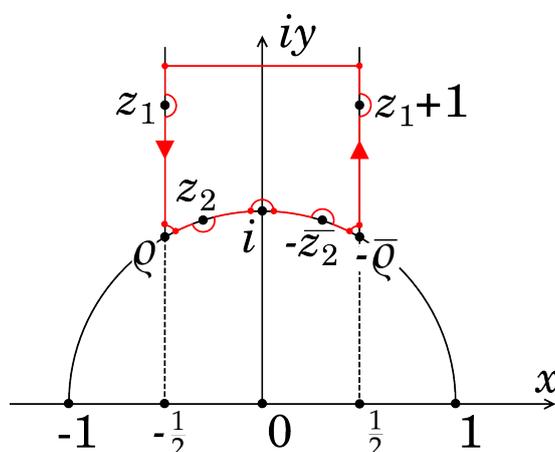


Abbildung 4.6: Die Punkte  $z_1$  und  $z_2$  repräsentieren die beiden möglichen Typen von Null- bzw. Polstellen, die nun noch hinzukommen. Man beachte, dass die jeweiligen Kreisbögen unter  $T$  bzw.  $S$  aufeinander abgebildet werden.

□

Eine wichtige Anwendung der Valenzformel ist, dass wir mit ihr und unserem Wissen über die Eisensteinreihen eine Aussage über die Struktur der Vektorräume  $M_k$  und  $S_k$  treffen können.

**Satz 4.67.** (a) Für gerades<sup>115</sup>  $k$  gilt  $M_k = \begin{cases} \{0\} & \text{für } k < 0, \\ \mathbb{C} & \text{für } k = 0, \\ \{0\} & \text{für } k = 2, \\ \mathbb{C}E_k \oplus S_k & \text{für } k \geq 4. \end{cases}$

(b) Die Abbildung  $f \mapsto f \cdot \Delta$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraumisomorphismus von  $M_{k-12}$  nach  $S_k$ .

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Behauptung (a).

<sup>115</sup>Dass die Vektorräume  $M_k$  für ungerades  $k$  nur aus der Null bestehen, hatten wir schon in Bemerkung 4.54 eingesehen.

$k < 0$ . Gäbe es für ein  $k < 0$  eine ganze Modulform  $f \in M_k$  ungleich 0, so wäre aufgrund der Holomorphie von  $f$  die linke Seite der Valenzformel nicht-negativ, die rechte nach Voraussetzung jedoch negativ. Ein solches  $f$  kann es also nicht geben.

$k = 0$ . Die Inklusion  $\mathbb{C} \subseteq M_0$  ist klar. Die andere Inklusion ist ein Spezialfall von Korollar 1.38, kann aber wie folgt auch direkt aus der Valenzformel hergeleitet werden. Für jedes  $f \in M_0$  und jedes  $z_0 \in \mathbb{H}$  liegt auch  $g(z) := f(z) - f(z_0)$  in  $M_0$ . Wegen  $g(z_0) = 0$  kann  $g$  die Valenzformel nicht erfüllen. Es folgt  $g \equiv 0$  und somit  $f \equiv f(z_0)$  konstant.

$k = 2$ . Die Lösbarkeit der Valenzformel in  $M_2$  ist gleichbedeutend damit, natürliche Zahlen  $n_\rho$ ,  $n_i$  und  $n_{\text{sonst}}$  zu finden mit

$$\frac{n_\rho}{3} + \frac{n_i}{2} + n_{\text{sonst}} = \frac{1}{6}.$$

Da es solche natürlichen Zahlen nicht gibt, kann es auch keine nichttriviale Modulform in  $M_2$  geben.

$k \geq 4$ . Sei  $f \in M_k$  mit Fourierentwicklung  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ , und sei weiter  $g := f - a_0 E_k$ . Nach Definition hat  $E_k$  konstanten Fourierkoeffizienten 1, so dass  $g$  in  $S_k$  liegt. Es folgt  $f = a_0 E_k + g \in \mathbb{C} E_k \oplus S_k$ .<sup>116</sup>

Zum Beweis von Behauptung (b) genügt es, die Surjektivität der Zuordnung  $f \mapsto f \cdot \Delta$  zu überprüfen; die Injektivität ist klar. Für eine beliebige Spitzenform  $g \in S_k$  setzen wir  $f := g/\Delta$ . Es gilt

$$0\text{-ord}(\Delta; \infty) = 1 \quad \text{und} \quad 0\text{-ord}(\Delta; z) = 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}, \quad (4.11)$$

denn: Nach Proposition 4.64 ist der Koeffizient von  $q$  bei der Fourierentwicklung von  $\Delta$  gerade 1; es gilt also  $0\text{-ord}(\Delta; \infty) = 1$ . Der Rest der Behauptung ist eine direkte Anwendung der Valenzformel 4.65. #

Es folgt zum einen die Holomorphie von  $f$  auf  $\mathbb{H}$ . Zum anderen folgt wegen  $g \in S_k$

$$0\text{-ord}(f; \infty) = 0\text{-ord}(g; \infty) - 0\text{-ord}(\Delta; \infty) = 0\text{-ord}(g; \infty) - 1 \geq 0$$

und somit die Holomorphie von  $f$  in  $\infty$ . Wegen  $g \in M_k$  und  $\Delta \in M_{12}$  gilt  $f \in M_{k-12}$ , und wir haben ein Urbild gefunden.  $\square$

**Korollar 4.68.** Sei  $k \geq 0$  gerade. Dann gilt  $\dim M_k = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{für } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1 & \text{für } k \not\equiv 2 \pmod{12}. \end{cases}$

*Beweis.* Nach Satz 4.67 gilt

$$S_k = \{0\} \quad \text{und somit} \quad M_k = \mathbb{C} E_k \quad \text{für } k \in \{4, 6, 8, 10\}.$$

Zusammen mit den im Satz explizit angegebenen Fällen  $k \in \{0, 2\}$  folgt so die Behauptung für  $0 \leq k \leq 10$ .

<sup>116</sup>Die Direktheit der Summe ist klar, da der konstante Fourierkoeffizient von  $E_k$  ja gerade 1 ist.

Wieder nach Satz 4.67 gilt

$$\dim M_k = 1 + \dim S_k = 1 + \dim M_{k-12} \quad \text{für alle } k \geq 4$$

und somit induktiv die Behauptung.  $\square$

**Korollar 4.69.** Sei  $k \geq 0$  gerade. Dann bilden die „Monome“  $E_4^\alpha E_6^\beta$  für  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  mit  $4\alpha + 6\beta = k$  eine Basis des  $\mathbb{C}$ -Vektorraums  $M_k$ .

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass die angegebenen Funktionen den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $M_k$  erzeugen.

$k \leq 6$ . Das haben wir bereits im Beweis von Korollar 4.68 eingesehen.

$k = 8$ . Nach Korollar 4.68 gilt  $\dim M_8 = 1$ . Andererseits sind die konstanten Terme der Fourierreihenentwicklungen von  $E_8, E_4^2 \in M_8$  definitionsgemäß beide 1. Es folgt  $E_8 = E_4^2$  und somit die Behauptung für  $k = 8$ .

$k = 10$ . Nach Korollar 4.68 gilt  $\dim M_{10} = 1$ . Andererseits sind die konstanten Terme der Fourierreihenentwicklungen von  $E_{10}, E_4 E_6 \in M_{10}$  nach Definition beide 1. Es folgt  $E_{10} = E_4 E_6$  und somit die Behauptung für  $k = 10$ .

$k \geq 12$ . In diesem Fall gibt es offenbar stets  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  mit  $4\alpha + 6\beta = k$ , und die Fourierreihenentwicklung der zugehörigen Modulform  $g := E_4^\alpha E_6^\beta$  hat den konstanten Term 1. Sei nun  $f \in M_k$  eine beliebige Modulform mit Fourierreihenentwicklung  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ . Dann ist  $f - a_0 g \in S_k$ , nach Teil (b) von Satz 4.67 gibt es also ein  $h \in M_{k-12}$  mit

$$f - a_0 g = h \Delta.$$

Nach Definition ist die Diskriminante eine  $\mathbb{C}$ -Linearkombination von  $E_4^3$  und  $E_6^2$ . Wir können nun annehmen, schon gezeigt zu haben, dass sich  $h$  als  $\mathbb{C}$ -Linearkombination von „Monomen“  $E_4^\gamma E_6^\delta$  mit  $4\gamma + 6\delta = k - 12$  schreiben lässt. Tatsächlich stellt dieser Fall den Schritt  $k - 12 \implies k$  eines Induktionsbeweises dar, dessen Anfang wir in den Fällen  $k \leq 10$  behandelt haben.

Nun wollen wir zeigen, dass die Menge

$$\{E_4^\alpha E_6^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N} \text{ mit } 4\alpha + 6\beta = k\}$$

$\mathbb{C}$ -linear unabhängig ist. Nehmen wir dazu an, es gelte

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N} \\ 4\alpha + 6\beta = k}} \lambda_{\alpha, \beta} E_4^\alpha E_6^\beta = 0 \quad \text{mit gewissen } \lambda_{\alpha, \beta} \in \mathbb{C}. \quad (4.12)$$

Wir nehmen zunächst an, es gelte  $k \equiv 0 \pmod{4}$ . Wegen  $4\alpha + 6\beta = k$  ist dann  $\beta$  gerade, es gibt also ein  $\beta' \in \mathbb{N}$  mit  $\beta = 2\beta'$ . Für dieses gilt dann  $\alpha = \frac{k}{4} - 3\beta'$  und somit

$$E_4^\alpha E_6^\beta = E_4^{\frac{k}{4} - 3\beta'} E_6^{2\beta'} = E_4^{\frac{k}{4}} \left( \frac{E_6^2}{E_4^3} \right)^{\beta'}.$$

Eingesetzt in (4.12) erhalten wir so

$$E_4^{\frac{k}{4}} \sum_{\beta' \in \mathbb{N}} \lambda_{\frac{k}{4} - 3\beta', 2\beta'} \left( \frac{E_6^2}{E_4^3} \right)^{\beta'} = 0.$$

Nehmen wir nun an, es gäbe einen Koeffizienten ungleich Null in dieser Gleichung. Dann wäre  $E_6^2/E_4^3$  Nullstelle eines von Null verschiedenen Polynoms aus  $\mathbb{C}[X]$  und somit gleich einer Konstanten,

denn: Die meromorphen Funktionen  $\mathcal{M}(\mathbb{H})$  bilden nach Bemerkung 1.28 einen Körper, der  $\mathbb{C}$  enthält. Ein von Null verschiedenes Polynom  $P \in \mathbb{C}[X]$  hat also in  $\mathcal{M}(\mathbb{H})$  höchstens  $\deg(P)$  Nullstellen. Da nach dem Fundamentalsatz der Algebra bereits  $\deg(P)$  Nullstellen von  $P$  in  $\mathbb{C}$  liegen, sind folglich alle Nullstellen von  $P$  in  $\mathcal{M}(\mathbb{H})$  konstant. #

Diese Konstante wäre gleich Null,

denn: Zum einen gilt

$$E_6(i) = i^{-6} E_6\left(-\frac{1}{i}\right) = -E_6(i)$$

und somit  $E_6(i) = 0$ . Zum anderen gilt nach Satz 4.60 und Normierung

$$E_4(i) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e^{-2\pi n} > 0.$$

#

Es folgte  $E_6 \equiv 0$ , was nicht sein kann. Es gibt also keinen Koeffizienten ungleich Null, und wir haben die lineare Unabhängigkeit im Fall  $k \equiv 0 \pmod{4}$  bewiesen. Die Behauptung im Fall  $k \equiv 2 \pmod{4}$  beweist man ähnlich (Übung!). □

#### 4.11 Die $j$ -Invariante

Wir haben immer noch kein Beispiel für eine nicht-konstante Modulfunktion gefunden. Diesen Missstand wollen wir nun beheben.

**Proposition 4.70.** Die  $j$ -Invariante oder auch *absolute Invariante*

$$j(z) := \frac{E_4^3(z)}{\Delta(z)}$$

ist eine Funktion in  $V_0$ . Ihre Fourierentwicklung ist von der Form

$$j(z) = q^{-1} + 744 + \text{Terme höherer Ordnung.}$$

*Beweis.* Sowohl  $E_4^3$  als auch  $\Delta$  liegen in  $M_{12}$ . Analog zu Übungsaufgabe 4.5 folgt  $j \in V_0$ . Die Fourierentwicklung von  $j$  berechnet man leicht aus den explizit bekannten Fourierentwicklungen von  $E_4^3$  und  $\Delta$ . □

**Bemerkung 4.71.** Rechnen wir die Normierungen von  $E_4$  und  $E_6$  wieder heraus, so gilt

$$j(z) = 1728 \frac{20 G_4^3(z)}{20 G_4^3(z) - 49 G_6^2(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Auf diese Weise lässt sich die  $j$ -Invariante zu einer Funktion auf der Menge der Gitter  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  fortsetzen, so wie wir dies für die Eisensteinreihen schon in Bemerkung 4.57 eingesehen hatten. Das heißt, es gilt

$$j(\Lambda) = 1728 \frac{20 G_4^3(\Lambda)}{20 G_4^3(\Lambda) - 49 G_6^2(\Lambda)} = 1728 \frac{g_2^3(\Lambda)}{g_2^3(\Lambda) - 27 g_3^2(\Lambda)}.$$

Mit den Rechenregeln für die Multiplikation des Gitters mit einer komplexen Zahl  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  aus Bemerkung 4.57 folgt die Invarianzeigenschaft

$$j(a\Lambda) = j(\Lambda) \quad \text{für alle Gitter } \Lambda \subseteq \mathbb{C} \text{ und alle } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Das ist gleichzeitig der Grund für die Benennung dieser Funktion.

**Proposition 4.72.**  $j(\mathbb{H}) = \mathbb{C}$ .

*Beweis.* Zu  $j \in V_0$  ist wie in Abschnitt 4.6 über

$$j = (J \circ \pi)|_{\mathbb{H}} \quad \text{mit der Projektion } \pi : \mathbb{H}^* \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*$$

eine (nichtkonstante) Funktion

$$J \in \mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*) \stackrel{1.27}{\subseteq} \mathrm{Hol}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*, \overline{\mathbb{C}})$$

assoziiert. Da die Riemann'sche Fläche  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*$  nach Satz 4.29 kompakt ist, folgt mit Satz 1.36 die Surjektivität von  $J$ . Die Proposition folgt, da die Projektion  $\pi$  ebenfalls surjektiv ist und die Funktion  $J \circ \pi$  in  $z = \infty$  eine Polstelle hat.  $\square$

Aus der Surjektivität der  $j$ -Invarianten folgt ein Existenzsatz, den wir in Abschnitt 3.6 schon benutzt haben.

**Korollar 4.73.** Zu je zwei komplexen Zahlen  $g_2$  und  $g_3$  mit  $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$  gibt es ein Gitter  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  mit  $g_2(\Lambda) = g_2$  und  $g_3(\Lambda) = g_3$ .

*Beweis.* Seien also  $g_2$  und  $g_3$  zwei komplexe Zahlen mit  $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ . Nach Proposition 4.72 gibt es dann ein  $z \in \mathbb{H}$  mit

$$j(z) = 1728 \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2},$$

und nach Bemerkung 4.71 gibt es ein Gitter  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  mit

$$j(\Lambda) = 1728 \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}.$$

Da jede komplexe Zahl eine 12-te Wurzel besitzt, gibt es ein  $a \in \mathbb{C}$  mit

$$\Delta(a\Lambda) = a^{-12}\Delta(\Lambda) = \frac{g_2^3 - 27g_3^2}{1728}.$$

Hier haben wir das Transformationsverhalten benutzt, das wir für die Diskriminante erhalten, wenn wir sie wie die Eisensteinreihen und die Invariante als Funktion auf der Menge der Gitter  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  betrachten. (Dies zu zeigen ist eine *Übung*.) Wegen  $j(a\Lambda) = j(\Lambda)$  können wir also ohne Einschränkung annehmen, es gelte

$$g_2^3(\Lambda) = g_2^3 \quad \text{und} \quad g_3^2(\Lambda) = g_3^2.$$

Wegen  $g_2(i\Lambda) = i^{-4}g_2(\Lambda) = g_2(\Lambda)$  und  $g_3(i\Lambda) = i^{-6}g_3(\Lambda) = -g_3(\Lambda)$  können wir sogar annehmen, es gelte

$$g_2^3(\Lambda) = g_2^3 \quad \text{und} \quad g_3(\Lambda) = g_3.$$

Sei nun  $\zeta$  eine 6-te Einheitswurzel. Dann gilt  $g_2(\zeta\Lambda) = \zeta^{-4}g_2(\Lambda)$  und  $g_3(\zeta\Lambda) = \zeta^{-6}g_3(\Lambda) = g_3(\Lambda)$ . Wenn  $\zeta$  alle 6-ten Einheitswurzeln durchläuft, so durchläuft offenbar  $\zeta^{-4} = \zeta^2$  alle dritten Einheitswurzeln. Nach geeigneter Wahl von  $\zeta$  können wir daher

$$g_2(\Lambda) = g_2 \quad \text{und} \quad g_3(\Lambda) = g_3$$

annehmen. □

**Proposition 4.74.** Für  $z, z_0 \in \mathbb{H}$  gilt

$$j(z) = j(z_0) \iff \text{es gibt ein } M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ mit } M\langle z \rangle = z_0.$$

*Beweis.* Für ein beliebiges aber festes  $z_0 \in \mathbb{H}$  ist die Funktion  $f := j - j(z_0)$  offensichtlich in  $V_0$ . Nach (4.11) hat  $f$  in  $z = \infty$  einen Pol erster Ordnung und keine Polstelle in  $\mathbb{H}$ . Insbesondere ist  $f \not\equiv 0$ , so dass die Valenzformel gilt. Für  $f$  besagt diese

$$\sum_{t \in T(f)} \frac{0\text{-ord}(f; t)}{e_t} - 1 = 0.$$

Unsere Funktion  $f$  hat also modulo  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  nur die offensichtliche Nullstelle bei  $z = z_0$ . Die Proposition folgt sofort. □

**Satz 4.75.** Die durch  $j$  induzierte Funktion  $J \in \mathcal{M}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*)$  ist konform.

*Beweis.* Nach Satz 1.27 gilt  $J \in \text{Hol}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*, \overline{\mathbb{C}})$ . Nach den Propositionen 4.72 und 4.74, und weil  $j$  in  $z = \infty$  einen Pol hat, ist  $J$  außerdem bijektiv. Mit dem Konformitätskriterium 1.34 folgt, dass  $J$  eine konforme Abbildung zwischen  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*$  und  $\overline{\mathbb{C}}$  ist, und somit der Satz. □

**Bemerkung 4.76.** Satz 4.75 erklärt mathematisch befriedigend, warum das Geschlecht der kompakten Riemann'schen Fläche  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*$  Null ist (vgl. Lemma 4.36).

**Korollar 4.77.** Die Menge  $V_0$  ist identisch mit dem Körper der rationalen Funktionen  $\mathbb{C}(j)$  in  $j$ .

*Beweis.* Nach Satz 4.75 ist die Abbildung  $J : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^* \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  konform und induziert somit über die Zuordnung

$$f \mapsto f \circ J$$

einen Isomorphismus zwischen den  $\mathbb{C}$ -Algebren  $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*)$  und  $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$ . Andererseits ist

$$f \circ J \mapsto f \circ j$$

nach Satz 4.40 ein Isomorphismus zwischen den  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen  $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*)$  und  $V_0$ . Es ist leicht zu zeigen, dass sie die in Übungsaufgabe 4.5 eingeführte Multiplikation respektiert und so ebenfalls zu einem  $\mathbb{C}$ -Algebrenisomorphismus wird (*Übung!*). Das Korollar folgt, weil wir in Korollar 2.5 bereits gezeigt hatten, dass  $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$  mit dem Körper  $\mathbb{C}(X)$  der rationalen Funktionen in einer Variablen identisch ist.  $\square$

## Übungsaufgaben

**Aufgabe 4.1.** Sei  $s \in \mathbb{C}$ , und sei  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  hyperbolisch mit  $M\langle s \rangle = s$ . Zeigen Sie, dass dann  $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  gilt.

**Aufgabe 4.2.** Zeigen Sie die folgenden Aussagen, um zu zeigen, dass für ein beliebiges  $N \in \mathbb{N}_{>0}$  der Index  $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]$  endlich ist.

(a) Der Gruppenhomomorphismus  $\mathrm{mod}(N) : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$  ist surjektiv, und es folgt

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = |\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})|.$$

Sei  $N = \prod_{p \text{ prim}} p^{v_p}$  die Primfaktorzerlegung von  $N$ . Nach dem Chinesischen Restsatz gilt dann

$$|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})| = \prod_{p \text{ prim}} |\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})|.$$

(b)  $|\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})| = p^{4v_p}(1-p^{-1})(1-p^{-2})$ .

(c)  $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})| = p^{3v_p}(1-p^{-2})$ .

Insgesamt haben wir sogar etwas mehr gezeigt, nämlich

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = N^3 \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|N}} (1-p^{-2}).$$

Außerdem folgt nun leicht:

(d) Jede Kongruenzuntergruppe  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist von endlichem Index.

**Aufgabe 4.3.** Zeigen Sie, dass  $\{I_2, S, ST\}$  ein Rechtsvertretersystem von  $\Gamma_0(2)$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist.

**Aufgabe 4.4.** Zeigen Sie, dass für alle bis auf endlich viele teilerfremde Paare  $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$  die Abschätzung

$$\sup\{\operatorname{Im}(M\langle z \rangle) \mid M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ und } z \in U_1\} < \inf_{z \in U_2} \operatorname{Im}(z)$$

gilt.

**Aufgabe 4.5.** Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) Seien  $k, \ell \in \mathbb{Z}$ , und sei  $f \in V_k$  bzw.  $g \in V_\ell$  eine Modulform vom Gewicht  $k$  bzw.  $\ell$ . Dann ist durch

$$(f \cdot g)(z) := f(z) \cdot g(z)$$

eine Modulform aus  $V_{k+\ell}$  definiert.

- (b) Liegen schon  $f \in M_k$  und  $g \in M_\ell$ , so gilt  $f \cdot g \in M_{k+\ell}$ .  
(c) Ist in der Situation von (b) eine der Funktionen eine Spitzenform, so trifft dies auch auf  $f \cdot g$  zu.