Siegel'sche Modulformen

Sommersemester 2017

Dr. Hendrik Kasten

1. Juni 2022

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 0

Einleitung

Am Ende des 19. Jahrhunderts wurden die aus der Funktionentheorie bekannten Modulformen entdeckt. Diese lassen sich als komplexwertige Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene $\mathbb{H}$ verstehen, deren Quotienten meromorphe Funktionen auf dem Faktorraum $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ einer festen diskreten Untergruppe Γ von $SL_2(\mathbb{R})$ sind. Lange Zeit war nur wenig über Verallgemeinerungen auf Funktionen mehrer komplexer Veränderlicher bekannt, bis in den 30er-Jahren des 20. Jahrhunderts CARL LUDWIG SIEGEL[1] Modulformen n-ten Grades einführte, die heute nach ihm benannten ***Siegel'schen Modulformen***. Siegel entdeckte diese beim Studium quadratischer Formen. Die in diesem Kontext auftauchenden Thetareihen werden unser erstes Beispiel für Modulformen vom Grad $n > 1$ sein.

Beginnen werden wir in Kapitel 1 mit einem ganz anderen Thema, nämlich mit dem Studium der ***symplektischen Gruppe*** $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$, einer Verallgemeinerung der Gruppe $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})$. Wir werden ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ bestimmen und ihre Aktion auf dem ***Siegel'schen Halbraum*** $\mathbb{H}_n$ untersuchen, einer Verallgemeinerung der oberen Halbebene $\mathbb{H}$. Hierbei wird die Bestimmung eines Fundamentalbereichs der Aktion deutlich aufwändiger sein als im bekannten Spezialfall $n = 1$.

Erst in Kapitel 2 werden wir uns den Modulformen widmen. Nachdem wir diese definiert haben, werden wir als ein Beispiel zunächst die Thetareihen einführen, um dann den Siegel'schen Φ-Operator und damit auch den Begriff der Spitzenform einzuführen. Mithilfe des Φ-Operators lässt sich der Raum der Modulformen als eine direkte Summe von Räumen KLINGEN'scher[2] Eisensteinreihen schreiben. Um das einzusehen, zeigen wir für große Gewichte die Surjektivität des Siegeloperators und führen das PETERSSONskalarprodukt[3] ein.

In Kapitel 3 führen wir noch die HECKEalgebra[4] der symplektischen Gruppe ein und wagen einen Ausblick in die daraus entstehende Hecketheorie.

[1] Carl Ludwig Siegel (1896-1981)
[2] Helmut Klingen (* 1927)
[3] Hans Petersson (1902-1984)
[4] Erich Hecke (1887-1947)

KAPITEL 1

Die modulare Gruppe

1.1 Die symplektische Gruppe

Wir wollen zuerst ein paar praktische Notationen einführen. Sei dafür R ein beliebiger Ring und $n \in \mathbb{N}_0$.

- Für je zwei Matrizen $A, B \in R^{2n \times 2n}$ schreiben wir kurz
$$A[B] := {}^tBAB.$$
- Sind die Abmessungen aus dem Kontext heraus klar, schreiben wir kurz „0“ für die Nullmatrix in $R^{n\times n}$ und „1“ für die Einheitsmatrix in $R^{n\times n}$.

Definition 1.1. *Sei R ein Ring und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt die Teilmenge*

$$\mathrm{Sp}_n(R) = \{M \in \mathrm{GL}_{2n}(R) \mid \mathbf{j}[M] = \mathbf{j}\} \subseteq \mathrm{GL}_{2n}(R) \quad \textit{mit } \mathbf{j} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2n}(R)$$

die ***symplektische Gruppe*** *vom Grad n über R.*

Dass $\mathrm{Sp}_n(R)$ tatsächlich eine Gruppe ist, überprüfen wir leicht mit dem Untergruppenkriterium: Offensichtlich ist $I_{2n} \in \mathrm{Sp}_n(R)$, und für $M_1, M_2 \in \mathrm{Sp}_n(R)$ gilt

$$\mathbf{j}[M_1M_2^{-1}] = {}^t(M_1M_2^{-1})\mathbf{j}(M_1M_2^{-1}) = {}^tM_2^{-1}\left({}^tM_1\mathbf{j}M_1\right)M_2^{-1} = {}^tM_2^{-1}\mathbf{j}M_2^{-1} = \mathbf{j},$$

wobei die letzte Gleichung folgt, wenn wir auf $\mathbf{j}[M_2] = \mathbf{j}$ die Transformation $[M_2^{-1}]$ anwenden.

Bemerkung 1.2. *Für $M \in \mathrm{GL}_{2n}(R)$ gilt $M \in \mathrm{Sp}_n(R) \iff {}^tM \in \mathrm{Sp}_n(R)$,*

denn: Wie wir gerade eingesehen haben, gilt

$$M \in \mathrm{Sp}_n(R) \iff M^{-1} \in \mathrm{Sp}_n(R) \iff \mathbf{j} = \mathbf{j}[M^{-1}] = {}^tM^{-1}\mathbf{j}M^{-1}.$$

Nun ist aber $\mathbf{j}^{-1} = -\mathbf{j}$, *so dass folgt:*

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{Sp}_n(R) &\iff \mathbf{j} = -{}^tM^{-1}\mathbf{j}^{-1}M^{-1} = -\left(M\mathbf{j}{}^tM\right)^{-1} \\ &\iff \mathbf{j} = M\mathbf{j}{}^tM = \mathbf{j}[{}^tM] \\ &\iff {}^tM \in \mathrm{Sp}_n(R), \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. #

Um die Bedingung $\mathbf{j}[M] = \mathbf{j}$ für $M \in \mathrm{GL}_{2n}(R)$ besser zu verstehen, ist es sinnvoll, die Matrix M in $(n \times n)$-Blöcke zu zerlegen. Wir schreiben von nun an immer

$$M = \begin{pmatrix} a_M & b_M \\ c_M & d_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

wobei wir die Indizes $\cdot_M$ weglassen werden, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \mathbf{j}[M] = \mathbf{j} &\iff \begin{pmatrix} {}^tac - {}^tca & {}^tad - {}^tcb \\ {}^tbc - {}^tda & {}^tbd - {}^tdb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff {}^tac, {}^tbd \text{ symmetrisch und } {}^tad - {}^tcb = 1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Wegen Bemerkung 1.2 können wir äquivalent auch ${}^tM$ statt M betrachten. Es gilt

$$\mathbf{j}[{}^tM] = \mathbf{j} \iff a{}^tb, c{}^td \text{ symmetrisch und } a{}^td - b{}^tc = 1. \tag{1.3}$$

Eine erste Folgerung daraus ist eine Formel für das Inverse einer symplektischen Matrix.

Bemerkung 1.3. *Für eine Matrix* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(R)$ *gilt* $M^{-1} = \begin{pmatrix} {}^td & -{}^tb \\ -{}^tc & {}^ta \end{pmatrix}$,

denn: Es gilt offensichtlich

$$\begin{pmatrix} {}^td & -{}^tb \\ -{}^tc & {}^ta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tda - {}^tbc & {}^tdb - {}^tbd \\ -{}^tca + {}^tac & -{}^tcb + {}^tad \end{pmatrix} \overset{(1.2)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^td & -{}^tb \\ -{}^tc & {}^ta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a{}^td - b{}^tc & -a{}^tb + b{}^ta \\ c{}^td - d{}^tc & -c{}^tb + d{}^ta \end{pmatrix} \overset{(1.3)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

was die Behauptung zeigt. #

Mit der Rechnung aus dem Beweis der Bemerkung sehen wir auch, dass jede Matrix aus $R^{2n\times 2n}$, die (1.2) bzw. (1.3) erfüllt, automatisch eine inverse Matrix hat, also in $\mathrm{GL}_{2n}(R)$ liegt. Diese beiden stellen also jeweils einen kompletten Satz an Bedingungen für die Symplektizität einer Matrix aus $R^{2n\times 2n}$ dar.

Beispiel 1.4. *Die bisher aufgezählten Eigenschaften von* $\mathrm{Sp}_n(R)$ *wirken vage vertraut. In der Tat erhalten wir im Spezialfall* $n = 1$

$$\mathrm{Sp}_1(R) = \{M \in \mathrm{GL}_2(R) \mid \mathbf{j}[M] = \mathbf{j}\} \overset{(1.2)}{=} \{M \in \mathrm{GL}_2(R) \mid ad - bc = 1\} = \mathrm{SL}_2(R).$$

Bemerkung 1.2 besagt dann, dass die Determinante einer Matrix aus $\mathrm{GL}_2(R)$ *sich unter Transponieren nicht ändert, und Bemerkung 1.3 liefert die bekannte Formel für das Inverse in* $\mathrm{SL}_2(R)$.

Bekanntlich wird die Gruppe $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ von den zwei Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt. Für viele Fragestellungen genügt es dann, Eigenschaften der gesamten Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ nur für diese beiden Erzeuger nachzuprüfen, etwa um festzustellen, ob eine gegebene Funktion eine Modulform bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist. Eine analoges Resultat ist natürlich auch für $\mathrm{Sp}_n(R)$ mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$ und einem beliebigen Ring R wünschenswert. In voller Allgemeinheit wird uns das nicht gelingen. Wir betrachten daher die folgende Unterklasse von Ringen.

Definition 1.5. *Ein* **EUKLID*ischer Ring***[5] *ist ein Paar (R, φ) aus einem nullteilerfreien kommutativen Ring mit Eins R und einer* ***Division mit Rest****, also einer Funktion $\varphi : R \setminus \{0_R\} \to \mathbb{N}_0$ mit der Eigenschaft, dass es zu je zwei Elementen $a, b \in R$ mit $b \neq 0_R$ zwei Elemente $q, r \in R$ gibt mit*

$$a = bq + r \quad \text{und} \quad \varphi(r) < \varphi(b) \text{ oder } r = 0_R.$$

Vereinfachend schreiben wir auch R statt (R, φ).

Beispiel 1.6. (a) *Bekanntermaßen sind die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zusammen mit dem gewöhnlichen Absolutbetrag ein euklidischer Ring.*

(b) *Jeder Körper K zusammen mit der Funktion $\varphi(a) = 1$ für alle $a \in K$ ist ebenfalls ein euklidischer Ring,*
denn: Die Bedingung bedeutet dann, dass es für jedes $a \in K$ und jedes $b \in K^\times$ ein $q \in K$ gibt mit $a = bq$. Wir wählen $q = b^{-1}a$ und sind fertig. #

Im Rest dieses Abschnitts zeigen wir nun den folgenden Satz.

Satz 1.7. *Für einen euklidischen Ring R und $n \in \mathbb{N}$ wird die Gruppe $\mathrm{Sp}_n(R)$ von den Matrizen*

$$S := S^{(n)} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_b := T_b^{(n)} := \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } {}^t b = b \in R^{n \times n}$$

erzeugt.

Korollar 1.8. *Für einen euklidischen Ring R haben Matrizen in $\mathrm{Sp}_n(R)$ Determinante $+1$.*

Für den Beweis holen wir ein wenig aus. Zunächst konstruieren wir Erzeugendensysteme für die Speziellen Linearen Gruppen $\mathrm{SL}_n(R)$. Ähnlich wie in (1.1) wird es gelegentlich von Vorteil sein, Matrizen aus $R^{n \times n}$ in folgender Weise zu zerlegen. Für ein beliebiges $x \in R^{n \times n}$ und ein beliebiges $0 \leq r \leq n$ schreiben wir

$$x = \begin{pmatrix} x_1^{(r)} & x_2^{(r)} \\ x_3^{(r)} & x_4^{(r)} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

mit $x_1^{(r)} \in R^{r \times r}$, $x_2^{(r)} \in R^{r \times (n-r)}$, $x_3^{(r)} \in R^{(n-r) \times r}$, $x_4^{(r)} \in R^{(n-r) \times (n-r)}$. Wenn die Größe aller beteiligten Teilmatrizen aus dem Kontext klar ist, werden wir dabei die Indizes $\cdot^{(r)}$ weglassen.

[5] Euklid von Alexandria (ca. 3. Jahrhundert v. Chr.)

Proposition 1.9. *Für einen euklidischen Ring R und $n \geq 2$ wird die Gruppe $\mathrm{SL}_n(R)$ von den folgenden Matrizen erzeugt*

(i) $1 + re_{ij}$ *mit einem $r \in R$ und einer Elementarmatrix*

$$e_{ij} := \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & \text{j-te Spalte} & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow \text{i-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

mit $1 \leq i < j \leq n$,

(ii) $\tilde{p}_\sigma := \mathrm{diag}(\mathrm{sgn}(\sigma), 1, \ldots, 1) \cdot p_\sigma$ *mit einem $\sigma \in S_n$ und p_σ der Permutationsmatrix mit*

$$p_\sigma \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ v_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix} \quad \text{für alle } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in R^n,$$

(iii) $\tilde{d}_r := \mathrm{diag}(r, r^{-1}, 1, \ldots, 1)$ *mit einem $r \in R^\times$.*

Bemerkung 1.10. *In (ii) genügt es, Permutationen σ aus einem Erzeugendensystem von S_n zu betrachten, denn es gilt $p_\sigma p_\tau = p_{\sigma \circ \tau}$ für alle $\sigma, \tau \in S_n$.*

Beweis (Proposition 1.9). Wir wollen zeigen, dass $\mathrm{SL}_n(R)$ gleich der von den in der Proposition aufgelisteten Matrizen erzeugten Untergruppe $G_n \subseteq \mathrm{SL}_n(R)$ ist.

Sei dafür zunächst $v \in R^n \setminus \{0\}$. Da die modifizierten Permutationsmatrizen $\tilde{p}_\sigma$ in G_n enthalten sind, gibt es ein $g \in G_n$ und ein $w \in R^n$ mit $gv = w$, dessen erste Komponente w_1 von Null verschieden ist. Wir wählen dabei g derart, dass $\varphi(w_1)$ minimal ist. Dann gilt für alle $i \in \{2, \ldots, n\}$ entweder $w_i = 0$ oder $\varphi(w_i) \geq \varphi(w_1)$. Nun sind die Matrizen der Form

$$h_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ q_2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ q_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $q_2, \ldots, q_n \in R$ in G_n enthalten, und es gilt

$$h_q g v = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 + q_2 w_1 \\ \vdots \\ w_n + q_n w_1 \end{pmatrix}.$$

Da R als euklidisch vorausgesetzt war, können wir die q_i so wählen, dass für alle $i \in \{2, \ldots, n\}$

$$\varphi(w_i + q_i w_1) < \varphi(w_1) \quad \text{oder} \quad w_i + q_i w_1 = 0$$

gilt. Nun können wir das selbe Verfahren auf diesen Vektor anstelle von v anwenden. Nach endlich vielen Iterationsschritten erhalten wir

$$\text{Für alle } v \in R^n \text{ gibt es } g \in G_n,\ r \in R \text{ mit } gv = {}^t(r, 0, \ldots, 0). \tag{1.5}$$

Sei nun $u \in \mathrm{SL}_n(R)$. Nach (1.5) gibt es eine Matrix $g \in G_n$, so dass die erste Spalte von gu von der Form ${}^t(r, 0, \ldots, 0)$ ist. Wegen $\det(g) = \det(u) = 1$ ist dabei $r \in R^\times$. Wir können ohne Einschränkung $r = 1$ annehmen und sonst mit $\tilde{d}_r^{-1}$ multiplizieren. So erhalten wir

$$gu = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & u' \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

mit einem $u' \in \mathrm{SL}_{n-1}(R)$. Da für $n = 2$ schon $u' = 1$ gelten muss, ist also die Proposition in diesem Fall schon bewiesen.

Wir beweisen nun die Proposition per Induktion nach n, und nehmen dafür an, es gelte bereits $\mathrm{SL}_{n-1}(R) = G_{n-1}$. Dann ist die Matrix u' aus (1.6) bereits in G_{n-1} und daher $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u' \end{smallmatrix}\right) \in G_n$.[6] Der Induktionsschritt und damit die Proposition folgt mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix} \in G_n.$$

□

Offenbar wird die Lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(R)$ von den Matrizen aus $\mathrm{SL}_n(R)$ und den Diagonalmatrizen erzeugt. Es folgt

Proposition 1.11. *Für einen euklidischen Ring R und $n \geq 2$ wird die Gruppe $\mathrm{GL}_n(R)$ von den folgenden Matrizen erzeugt.*

(i) $1 + re_{ij}$ *mit* $r \in R$ *und* $1 \leq i < j \leq n$,

(ii) p_σ *mit* $\sigma \in S_n$,

(iii) $d_r := \mathrm{diag}(r, 1, \ldots, 1)$ *mit* $r \in R^\times$.

[6] Um dies einzusehen setzt man für u' nach und nach alle Erzeuger von G_{n-1} ein und zeigt die Behauptung.

Korollar 1.12. *Für einen euklidischen Ring R und $n \geq 1$ wird die Gruppe $\mathrm{GL}_n(R)$ von der Teilmenge der symmetrischen Matrizen erzeugt.*

Beweis. Für $n = 1$ ist die Aussage trivial. Zum Beweis der Behauptung im Fall $n \geq 2$ betrachten wir das System von Erzeugenden von $\mathrm{GL}_n(R)$ aus Proposition 1.11 und stellen jedes seiner Elemente als Produkt symmetrischer Matrizen dar:

- Für Transpositionen $\tau \in S_n$ ist offensichtlich die Permutationsmatrix p_τ symmetrisch. Wegen Bemerkung 1.10 und weil S_n von Transpositionen erzeugt wird, sind also alle p_σ mit $\sigma \in S_n$ Produkt symmetrischer Matrizen.
- Man überprüft leicht, dass $(1 + re_{ij})p_{(ij)}$ symmetrisch ist. Da nach der vorherigen Überlegung auch $p_{(ij)}$ symmetrisch ist, ist $1 + re_{ij} = \big((1 + re_{ij})p_{(ij)}\big)p_{(ij)}$ ein Produkt symmetrischer Matrizen.
- Die Diagonalmatrizen d_r sind bereits symmetrisch.

□

Beweis (Satz 1.7). Wir bezeichnen die von den im Satz erwähnten speziellen Matrizen erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Sp}_n(R)$ mit $\mathcal{G}_n$.

Wir zeigen zunächst $\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & {}^t u^{-1} \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{G}_n$ für ein beliebiges $u \in \mathrm{GL}_n(R)$. Wegen Korollar 1.12 genügt es, dabei symmetrische Matrizen u zu betrachten. Für diese gilt

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & {}^t u^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1},$$

was offensichtlich die Behauptung zeigt.

Sei nun $v \in R^{2n} \setminus \{0\}$ beliebig. Dann gibt es ein $G \in \mathcal{G}_n$ mit

$$Gv = {}^t(1, 0, \ldots, 0), \tag{1.7}$$

denn: Um ein $G \in \mathcal{G}_n$ zu finden, so dass die erste Komponente von Gv ungleich Null ist, unterteilen wir v in zwei Vektoren $v_1, v_2 \in R^n$. Wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

können wir ohne Einschränkung $v_1 \neq 0$ annehmen. Nun betrachten wir

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & {}^t u^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv_1 \\ {}^t u^{-1} v_2 \end{pmatrix}.$$

Wie im Beweis von Proposition 1.9 finden wir ein $u \in \mathrm{SL}_n(R)$ mit $uv_1 = {}^t(1,0,\dots,0)$. Setzen wir nun

$$b := \begin{pmatrix} -w_1 + \sum_{j=2}^n w_j & -w_2 & \cdots & -w_n \\ -w_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -w_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

so folgt

$$ST_bS^{-1}\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & {}^tu^{-1} \end{pmatrix} v = {}^t(1,0,\dots,0).$$

Da alle beteiligten Matrizen in $\mathcal{G}_n$ liegen, zeigt dies die Behauptung. #

Sei nun $M \in \mathrm{Sp}_n(R)$. Mit (1.7) wählen wir ein $G \in \mathcal{G}_n$ mit $GM = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, wobei in der Notation von (1.4)

$$a_1^{(1)} = 1,\ a_3^{(1)} = 0,\ c_1^{(1)} = 0,\ c_3^{(1)} = 0$$

gelte. Für $n = 1$ heißt das gerade $GM = \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, so dass der Satz in diesem Fall bewiesen ist. Für $n \geq 2$ zeigen wir die Behauptung per Induktion über n. Die Matrix[7]

$$M_4 := \begin{pmatrix} a_4 & b_4 \\ c_4 & d_4 \end{pmatrix} \in R^{2(n-1)\times 2(n-1)}$$

ist symplektisch, also in $\mathrm{Sp}_{n-1}(R)$,

denn: Man rechnet leicht nach, dass

$$a_4{}^tb_4 = (a^tb)_4 \quad \text{und} \quad c_4{}^td_4 = (c^td)_4$$

symmetrisch sind und

$$a_4{}^td_4 - b_4{}^tc_4 = (a^td - b^tc)_4 = 1$$

gilt. Die Behauptung folgt mit (1.3). #

Es folgt sofort, dass auch

$$\tilde{M}_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 & d_4 \end{pmatrix} \in R^{2n\times 2n}$$

symplektisch ist, also in $\mathrm{Sp}_n(R)$ liegt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $M_4 \in \mathrm{Sp}_{n-1}(R) = \mathcal{G}_{n-1}$. Es folgt $\tilde{M}_4 \in \mathcal{G}_n$,

denn: Für $M_4 = T_b^{(n-1)}$ mit symmetrischem b ist dies trivial. Für $M_4 = S^{(n-1)}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_{n-1} & 0 & -1_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1_{n-1} & 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1_n & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -1_{n-1} \end{matrix} \\ \hline 0_n & \multicolumn{2}{c}{1_n} \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{1_n} & 0_n \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1_{n-1} \end{matrix} & 1_n \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1_n & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -1_{n-1} \end{matrix} \\ \hline 0_n & \multicolumn{2}{c}{1_n} \end{array}\right).$$

[7] Wie in (1.4) angekündigt, schreiben wir die Indizes $\cdot^{(1)}$ jetzt nicht mehr mit.

Da $\tilde{\ }$ ein Gruppenhomomorphismus ist, genügt es, die Behauptung für M_4 aus einem Erzeugendensystem von $\mathcal{G}_{n-1}$ zu zeigen, und wir sind fertig. #

Es gilt nun

$$\tilde{M}_4^{-1}GM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t d_4 & 0 & -{}^t b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -{}^t c_4 & 0 & {}^t a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ 0 & a_4 & b_3 & b_4 \\ 0 & c_2 & d_1 & d_2 \\ 0 & c_4 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} \overset{(1.2)}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a_2 & \multirow{2}{*}{$*_n$} \\ 0 & 1_{n-1} & \\ \hline 0 & c_2 & \multirow{2}{*}{$*_n$} \\ 0 & 0_{n-1} & \end{array}\right).$$

Da dies eine Matrix in $\mathrm{Sp}_n(R)$ ist, gilt auch

$$\begin{pmatrix} * & c_2 \\ * & * \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c_2 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix} \overset{(1.2)}{=} {}^t\begin{pmatrix} 0 & c_2 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix},$$

also $c_2 = 0$. Wieder mit der Symplektizität folgt

$$\begin{aligned} \tilde{M}_4^{-1}GM &= \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1_{n-1} \end{matrix} & *_n \\ \hline 0_n & \begin{matrix} 1 & 0 \\ -{}^t a_2 & 1_{n-1} \end{matrix} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1_{n-1} \end{matrix} & 0_n \\ \hline 0_n & \begin{matrix} 1 & 0 \\ -{}^t a_2 & 1_{n-1} \end{matrix} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1_n & *_n \\ \hline 0_n & 1_n \end{array}\right) \in \mathcal{G}_n \end{aligned}$$

und also $M \in \mathcal{G}_n$. □

1.2 Der Siegel'sche Halbraum

Aus der Funktionentheorie ist bekannt, dass $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ via MÖBIUStransformationen[8]

$$z \mapsto M\langle z\rangle = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{mit } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ operiert, was Anlass zur Definition des Begriffs der Modulform bezüglich $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt. Wir wollen dies auf $n \geq 1$ verallgemeinern.

Definition 1.13. *Sei n eine positive ganze Zahl. Die Menge der Matrizen*

$$\mathbb{H}_n := \left\{ z \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid z \text{ symmetrisch}, \mathrm{Im}(z) \text{ positiv definit} \right\}$$

*heißt dann der **Siegel'sche Halbraum** vom Grad n. Hierbei ist der Imaginärteil von z eintragsweise zu verstehen. Um auszudrücken, dass eine Matrix $w \in \mathbb{C}^{n\times n}$ positiv definit bzw. positiv semidefinit ist, schreiben wir von nun an auch $w > 0$ bzw. $w \geq 0$.*

[8] August Ferdinand Möbius (1790-1868)

Beispiel 1.14. *Offensichtlich gilt* $\mathbb{H}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\} = \mathbb{H}$.

Eine Matrix z im Siegel'schen Halbraum $\mathbb{H}_n$ ist symmetrisch und also bereits durch ihre Einträge $z_{k\ell}$ mit $1 \leq k \leq \ell \leq n$ gegeben. Auf diese Weise ist $\mathbb{H}_n$ eine offene Teilmenge des Vektorraums

$$\mathrm{Symm}_n(\mathbb{C}) := \{z \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid {}^tz = z\} \cong \mathbb{C}^{\frac{1}{2}\cdot n(n+1)}.$$

Da für je zwei positiv definite symmetrische Matrizen $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und jedes $r \in [0,1]$ auch $ry_1 + (1-r)y_2$ positiv definit ist, ist $\mathbb{H}_n$ des Weiteren konvex und insbesondere einfach zusammenhängend.

Wir werden nun zeigen, dass $\mathbb{H}_n$ in der Tat eine Operation von $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ zulässt, die eine direkte Verallgemeinerung derjenigen von $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}$ ist.

Proposition 1.15. $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ *operiert auf* $\mathbb{H}_n$ *via*

$$z \mapsto M\langle z\rangle := (az+b)\cdot(cz+d)^{-1} \quad \textit{mit } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Genau wie schon für $n = 1$ *heißt diese Abbildung dabei die* M *zugeordnete* ***Möbiustransformation****.*

Beweis. Seien $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ und $z \in \mathbb{H}_n$. Wir schreiben kurz

$$p := az + b \quad \text{und} \quad q := cz + d.$$

Wir wollen zunächst zeigen, dass q eine reguläre Matrix ist und also $M\langle z\rangle$ in $\mathbb{C}^{n\times n}$ liegt. Dafür langt es zu zeigen, dass das komplexe lineare Gleichungssystem $qv = 0$ nur die triviale Lösung hat. Sei also $v \in \mathbb{C}^n$ ein Spaltenvektor mit $qv = 0$. Wegen

$$ {}^tp\bar{q} - {}^tq\bar{p} = (z{}^ta + {}^tb)(c\bar{z} + d) - (z{}^tc + {}^td)(a\bar{z} + b) \overset{(1.2)}{=} z - \bar{z} = 2i\cdot\mathrm{Im}(z) \tag{1.9}$$

gilt dann

$$ {}^tv\cdot(2i\cdot\mathrm{Im}(z))\cdot\bar{v} = {}^tv\cdot\left({}^tp\bar{q} - {}^tq\bar{p}\right)\cdot\bar{v} = {}^tv{}^tp\overline{(qv)} - {}^t(qv)\bar{p}\bar{v} \overset{qv=0}{=} 0.$$

Wegen $\mathrm{Im}(z) > 0$ folgt daraus wie gefordert $v = 0$.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass $M\langle z\rangle$ tatsächlich in $\mathbb{H}_n$ liegt. Die Symmetrie von $M\langle z\rangle$ folgt aus

$$\begin{aligned} {}^t(M\langle z\rangle) = M\langle z\rangle &\iff {}^tq^{-1}{}^tp = pq^{-1} \iff {}^tqp = {}^tpq \\ &\iff (z{}^ta + {}^tb)(cz+d) = (z{}^tc + {}^td)(az+b) \end{aligned} \tag{1.10}$$

und der Symplektizität von M. Untersuchen wir also den Imaginärteil von $M\langle z\rangle$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(M\langle z\rangle) &= \frac{1}{2i}\cdot\left(M\langle z\rangle - \overline{M\langle z\rangle}\right) \\ &\overset{(1.10)}{=} \frac{1}{2i}\cdot\left({}^t(pq^{-1}) - \bar{p}\bar{q}^{-1}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\cdot{}^tq^{-1}\left({}^tp\bar{q} - {}^tq\bar{p}\right)\bar{q}^{-1} \\ &\overset{(1.9)}{=} {}^tq^{-1}\cdot\mathrm{Im}(z)\cdot\bar{q}^{-1}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Da ${}^t q^{-1} \cdot \operatorname{Im}(z) \cdot \bar{q}^{-1}$ als hermitesche Form äquivalent zu $\operatorname{Im}(z)$ ist und $\operatorname{Im}(z) > 0$ gilt, folgt $M\langle z\rangle \in \mathbb{H}_n$.

Es bleibt zu zeigen, dass durch $(M, z) \mapsto M\langle z\rangle$ wirklich eine Gruppenaktion von $\operatorname{Sp}_n(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}_n$ gegeben ist. Aber genau wie im Fall $n = 1$ gilt

$$1_{2n}\langle z\rangle = z \quad \text{und} \quad M\tilde{M}\langle z\rangle = M\langle \tilde{M}\langle z\rangle\rangle \quad \text{für alle } M, \tilde{M} \in \operatorname{Sp}_n(\mathbb{R}),\ z \in \mathbb{H}_n.$$

□

Beispiel 1.16. *Für die Erzeugenden S, T_b von $\operatorname{Sp}_n(\mathbb{R})$ gilt*

$$S\langle z\rangle = -z^{-1} \quad \textit{und} \quad T_b\langle z\rangle = z + b.$$

Außerdem gilt für alle $u \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & {}^t u^{-1} \end{pmatrix} \langle z\rangle = z[{}^t u].$$

Proposition 1.17. *Zwei Matrizen $M, \tilde{M} \in \operatorname{Sp}_n(\mathbb{R})$ definieren genau dann die selbe Möbiustransformation, wenn sie sich höchstens um das Vorzeichen unterscheiden.*

Beweis. Betrachten wir ein $M \in \operatorname{Sp}_n(\mathbb{R})$ mit $M\langle z\rangle = z$ für alle $z \in \mathbb{H}_n$. Dann gilt offensichtlich

$$az + b = z(cz + d) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}_n, \tag{1.12}$$

insbesondere für alle Matrizen $ir1_n$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Das Polynom $cX^2 + (a-d)iX + b$ hat daher unendlich viele reelle Nullstellen, und damit auch jedes der Polynome

$$c_{jk}X^2 + (a-d)_{jk}iX + b_{jk} \in \mathbb{C}[X]$$

für $1 \leq j, k \leq n$. Es folgt sofort $c = b = 0$ und $d = a$. Laut (1.12) gilt nun außerdem noch $az = za$ für alle $z \in \mathbb{H}_n$. Betrachten wir auf beiden Seiten der Gleichung den Imaginärteil, so folgt $a\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z)a$ für alle $z \in \mathbb{H}_n$, also $ay = ya$ für alle symmetrischen, positiv definiten $y \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Nach Übungsaufgabe 1.3 trifft dies genau auf die Matrizen der Form $r1_n$ mit $r \in \mathbb{R}$ zu. Da andererseits symplektische Matrizen immer Determinante $+1$ haben, folgt $r \in \pm 1$ und damit die Behauptung. □

Man kann den Siegel'schen Halbraum $\mathbb{H}_n$ auch als Quotientenraum der symplektischen Gruppe $\operatorname{Sp}_n(\mathbb{R})$ auffassen. Hierzu betrachten wir die Abbildung

$$\pi : \begin{cases} \operatorname{Sp}_n(\mathbb{R}) & \to \mathbb{H}_n, \\ M & \mapsto M\langle i1_n\rangle. \end{cases}$$

Diese ist surjektiv,

denn: Sei $z = x + iy \in \mathbb{H}_n$ beliebig. Nach dem Struktursatz für selbstadjungierte Endomorphismen lässt sich y als symmetrische Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ als Produkt $y = u\,{}^tu$ mit einem $u \in \mathbb{R}^{n\times n}$ schreiben. Da y außerdem positiv definit ist, muss u sogar in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ liegen. Es gilt dann

$$\pi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u & 0\\ 0 & {}^tu^{-1}\end{pmatrix}\right) = \pi\begin{pmatrix}u & x\,{}^tu^{-1}\\ 0 & {}^tu^{-1}\end{pmatrix} = x + iy = z.$$

Wir sehen, dass schon Matrizen M mit $c_M = 0$ ganz $\mathbb{H}_n$ erreichen. #

Eine unmittelbare Konsequenz ist

Bemerkung 1.18. $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ *operiert transitiv auf* $\mathbb{H}_n$*, es gibt also für je zwei Elemente* $z, w \in \mathbb{H}_n$ *eine Matrix* $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ *mit* $M\langle z\rangle = w$*.*

Offenbar ist

$$\mathcal{K}_n := \{M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \mid M\langle i1_n\rangle = i1_n\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. Diese misst in folgender Weise, „wie sehr" die Abbildung π nicht injektiv ist.

Lemma 1.19. *Für zwei Matrizen* $M, \tilde{M} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ *sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) $\pi(M) = \pi(\tilde{M})$,

(ii) $M^{-1}\tilde{M} \in \mathcal{K}_n$,

(iii) $M\mathcal{K}_n = \tilde{M}\mathcal{K}_n$.

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt aus

$$\begin{aligned}\pi(M) = \pi(\tilde{M}) &\iff M\langle i1_n\rangle = \tilde{M}\langle i1_n\rangle\\ &\iff (M^{-1}\tilde{M})\langle i1_n\rangle = i1_n\\ &\iff M^{-1}\tilde{M} \in \mathcal{K}_n,\end{aligned}$$

und die Äquivalenz von (ii) und (iii) ist klar. □

Wenn wir wie üblich mit $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})/\mathcal{K}_n$ die Menge der Rechtsnebenklassen $M\mathcal{K}_n$ mit $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ bezeichnen, folgt sofort

Korollar 1.20. π *induziert eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})/\mathcal{K}_n & \to & \mathbb{H}_n,\\ M\mathcal{K}_n & \mapsto & M\langle i1_n\rangle.\end{array}$$

Einer Möbiustransformation $z \mapsto \tilde{M}\langle z\rangle$ *entspricht unter dieser Bijektion die Linksmultiplikation* $M\mathcal{K}_n \mapsto (\tilde{M}M)\mathcal{K}_n$*.*

Lemma 1.21. *Es gilt*

$$\mathcal{K}_n = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R}).$$

Bezüglich der von $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ *geerbten Topologie auf* $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ *ist* $\mathcal{K}_n$ *daher kompakt.*

Beweis. Für alle $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{K}_n &\iff M\langle i1_n \rangle = i1_n \\ &\iff ia + b = id - c \\ &\iff (a = d) \wedge (b = -c). \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 1.3 ist das gleichbedeutend zu ${}^tM = M^{-1}$, also zur Orthogonalität von M. Das ist zum einen eine abgeschlossene Bedingung. Zum anderen folgt daraus, dass die Zeilen und Spalten der Matrizen in $\mathcal{K}_n$ Länge 1 haben, also die Beschränktheit von $\mathcal{K}_n$. □

Wir betrachten $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ von nun an immer mit dieser Topologie. Andererseits ist $\mathbb{H}_n$ standardmäßig mit der Einschränkung der Standardtopologie auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ versehen. Es gilt dann

Satz 1.22. *Die Abbildung π ist **eigentlich**, Urbilder kompakter Mengen unter π sind also wieder kompakt.*

Beweis. Es genügt offenbar, Folgendes zu beweisen: Sei (M_j) eine Folge von Matrizen in $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, so dass die Folge $(M_j\langle i1_n\rangle)$ in $\mathbb{H}_n$ konvergiert. Dann besitzt (M_j) eine konvergente Teilfolge. Passend zum Beweis der Surjektivität von π machen wir dabei den Ansatz

$$M_j\langle i1_n\rangle =: z_j = x_j + iu_j{}^tu_j \quad \text{für alle } j.$$

Dann ist $M_j\langle i1_n\rangle = \tilde{M}_j\langle i1_n\rangle$ mit

$$\tilde{M}_j = \begin{pmatrix} 1 & x_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j & 0 \\ 0 & {}^tu_j^{-1} \end{pmatrix},$$

so dass es ein $P_j \in \mathcal{K}_n$ gibt mit $M_j = \tilde{M}_jP_j$. Da $\mathcal{K}_n$ kompakt ist, besitzt (P_j) eine konvergente Teilfolge. Wir können daher ohne Einschränkung annehmen, (P_j) konvergiere. Nach Voraussetzung konvergiert (z_j), also auch (x_j) und $(u_j{}^tu_j)$. Dann muss auch (u_j) beschränkt sein und deshalb eine konvergente Teilfolge besitzen. Wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, (u_j) konvergiere gegen ein $u \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Nach Voraussetzung ist der Grenzwert von (z_j) in $\mathbb{H}_n$ enthalten, so dass $u{}^tu$ positiv definit sein muss. Hieraus folgt $\det({}^tu) \neq 0$, so dass auch $({}^tu_j^{-1})$ konvergiert. Es folgt die Konvergenz von $(\tilde{M}_j)$ und damit diejenige von $(M_j) = (\tilde{M}_jP_j)$. □

Definition 1.23. *Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ heißt **diskret**, wenn der Durchschnitt von Γ mit einer beliebigen kompakten Teilmenge $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ endlich ist.*

Beispiel 1.24. *Das wichtigste Beispiel für eine diskrete Untergruppe ist die **Siegel'sche Modulgruppe***

$$\Gamma_n := \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}).$$

Definition 1.25. *Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ operiert **eigentlich diskontinuierlich**, falls für je zwei Kompakta $K, \tilde{K} \subseteq \mathbb{H}_n$ die Menge*

$$\{M \in \Gamma \mid M\langle K\rangle \cap \tilde{K} \neq \emptyset\}$$

endlich ist.

Satz 1.26. *Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ ist genau dann diskret, wenn sie eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{H}_n$ operiert.*

Beweis. Sei zunächst $\Gamma \subseteq \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ diskret. Da nach Satz 1.22 die Abbildung π eigentlich ist, sind die Urbilder

$$\mathcal{K} := \pi^{-1}(K) \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{K}} := \pi^{-1}(\tilde{K})$$

zweier beliebiger kompakter Teilmengen $K, \tilde{K} \subseteq \mathbb{H}_n$ kompakt in $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. Als Bild der kompakten Menge $\tilde{\mathcal{K}} \times \mathcal{K}$ unter der stetigen Abbildung $(\tilde{M}, M) \mapsto \tilde{M}M^{-1}$ ist dann auch die Menge

$$\tilde{\mathcal{K}}\mathcal{K}^{-1} := \{\tilde{M}M^{-1} \mid M \in \mathcal{K}, \tilde{M} \in \tilde{\mathcal{K}}\}$$

wieder kompakt. Sei nun ein beliebiges $M \in \Gamma$ mit $M\langle K\rangle \cap \tilde{K} \neq \emptyset$ gegeben. Für dieses gibt es ein $z \in K$ mit $M\langle z\rangle \in \tilde{K}$ und damit auch ein $N \in \mathcal{K}$ mit $MN \in \tilde{\mathcal{K}}$. Jedes solche M liegt also im (endlichen!) Durchschnitt des Kompaktums $\tilde{\mathcal{K}}\mathcal{K}^{-1}$ mit der diskreten Gruppe Γ. Letztere operiert daher eigentlich diskontinuierlich auf dem oberen Halbraum $\mathbb{H}_n$.

Sei nun $\Gamma \subseteq \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ nicht diskret. Dann gibt es eine kompakte Teilmenge $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, die unendlich viele Matrizen aus Γ enthält. Wegen der Stetigkeit der Möbiustransformationen ist dann $\pi(\mathcal{K})$ kompakt. Nach Konstruktion enthält nun

$$\{M \in \Gamma \mid M\langle i1_n\rangle \in \pi(\mathcal{K})\} = \{M \in \Gamma \mid M\langle\{i1_n\}\rangle \cap \pi(\mathcal{K}) \neq \emptyset\}$$

unendlich viele Elemente; Γ operiert also nicht eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{H}_n$. □

Korollar 1.27. *Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ eine diskrete Untergruppe. Dann ist der* ***Stabilisator***

$$\Gamma_z := \{M \in \Gamma \mid M\langle z\rangle = z\}$$[9]

eines Punktes $z \in \mathbb{H}_n$ eine endliche Gruppe.

Diese Eigenschaft ist bei der Definition eines Fundamentalbereichs für die Aktion von Γ auf $\mathbb{H}_n$ unverzichtbar. Das werden wir im nächsten Abschnitt im Fall $\Gamma = \Gamma_n$ untersuchen.

1.3 Der Siegel'sche Fundamentalbereich

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass die Siegel'sche Modulgruppe Γ_n eigentlich diskontinuierlich auf dem Siegel'schen Halbraum $\mathbb{H}_n$ operiert. Das erste große Ziel dieser Vorlesung soll nun sein, einen geometrisch einfach beschreibbaren Fundamentalbereich für diese Aktion zu finden, also eine Teilmenge von $\mathbb{H}_n$ wie folgt.

Definition 1.28. *Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{H}_n$ heißt* ***Fundamentalbereich*** *für die Aktion von Γ_n auf $\mathbb{H}_n$, wenn die folgenden Eigenschaften gelten.*

(i) *$\mathcal{F}$ ist abgeschlossen.*

[9] Die Notation für die volle Modulgruppe Γ_n und den Stabilisator Γ_z eines Punktes $z \in \mathbb{H}_n$ in einer diskreten Untergruppe $\Gamma \subseteq \Gamma_n$ ähneln sich. Aus dem Kontext sollte jedoch stets klar sein, welche Gruppe gemeint ist.

(ii) *Für alle $z \in \mathbb{H}_n$ gibt es ein $M \in \Gamma_n$ mit $M\langle z\rangle \in \mathcal{F}$.*

(iii) $\#\{M \in \Gamma_n \mid M\langle\mathcal{F}\rangle \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\} < \infty$.

(iv) *Für je zwei z, w aus dem offenen Inneren $\mathring{\mathcal{F}}$ von $\mathcal{F}$ mit $w = M\langle z\rangle$ für ein $M \in \Gamma_n$, gilt $M \in \{\pm 1_{2n}\}$ und also $w = z$.*

Im Fall $n = 1$ konstruiert man den Standardfundamentalbereich

$$\mathcal{F}_1 = \{z \in \mathbb{H} \mid |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1\},$$

indem man zeigt, dass in jeder Γ_1-Bahn ein Element z maximaler ***Höhe*** $h(z) := \mathrm{Im}(z)$ liegt, und dass diese Punkte maximaler Höhe dadurch charakterisiert sind, dass für alle $M \in \Gamma_1$ die Abschätzung $|c_M z + d_M| \geq 1$ gilt. Da die Höhe unter der Wirkung von Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ invariant ist, kann man die zusätzliche Forderung $|\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}$ erzwingen. Schnell sieht man ein, dass der so beschriebene Bereich zum einen die Forderungen (i) und (ii) aus der Definition erfüllt und zum anderen zu $\mathcal{F}_1$ identisch ist.

Für $n \geq 2$ lässt sich diese Konstruktion mit $h(z) := \det(\mathrm{Im}(z))$ im Prinzip genauso ansetzen. Jedoch ändert sich die Höhe nicht nur unter den Transformationen $z \mapsto z + b$ mit symmetrischem $b \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ nicht, sondern bleibt auch unter $z \mapsto z[u]$ mit $u \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ invariant. Wir müssen daher zusätzlich eine Forderung an die Imaginärteile der Matrizen in $\mathcal{F}_n$ stellen. Wir untersuchen dafür die Aktion von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ auf der Menge

$$\mathbb{P}_n := \{y \mid z = x + iy \in \mathbb{H}_n\}.$$

Es gilt

Lemma 1.29. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *operiert via*

$$y \mapsto y[{}^t u]$$

auf $\mathbb{P}_n$. Zwei Matrizen $u, \tilde{u}$ in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ operieren genau dann gleich, wenn sie sich höchstens im Vorzeichen unterscheiden.

Beweis. In Beispiel 1.16 haben wir gesehen, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ via $z \mapsto z[{}^t u]$ auf $\mathbb{H}_n$ operiert. Da $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ offenbar die Aufspaltung in Real- und Imaginärteil respektiert, operiert es auf die selbe Weise auch auf $\mathbb{P}_n$. Damit $u \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ trivial operiert, muss für alle $y \in \mathbb{P}_n$ die Bedingung $y = y[{}^t u] = uy{}^t u$ gelten, insbesondere für $y = 1_n$, was die Orthogonalität ${}^t u^{-1} = u$ impliziert. Die Bedingung ist also äquivalent zu $uy = yu$ für alle $y \in \mathbb{P}_n$. Die Behauptung folgt mit der selben Argumentation wie im Beweis von Proposition 1.17. □

1.3.1 Der Raum $\mathbb{P}_n$

Wir können $\mathbb{P}_n$ als die Teilmenge der positiv definiten Matrizen in

$$\mathrm{Symm}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

auffassen. Als solche ist $\mathbb{P}_n$ offen und enthält mit einem $y \in \mathbb{P}_n$ immer auch die gesamte vom Ursprung ausgehende Halbgerade durch y. Insgesamt ist $\mathbb{P}_n \subseteq \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ also ein offener, konvexer Kegel mit Spitze im Ursprung.

Lemma 1.30. *Jedes $y \in \mathbb{P}_n$ lässt sich eindeutig in der Form $y = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)[b]$ mit einer unipotenten oberen Dreiecksmatrix*

$$b = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \\ 0 & & \ddots & b_{n-1,n} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

schreiben. Dies nennt man die **JACOBI*zerlegung***[10] *von y.*

Beweis. Für die Existenz der Jacobizerlegung genügt es mit einem Induktionsargument zu zeigen, dass sich y für jede Partition $n = p + q$ mit $0 \le p, q \le n$ als

$$y = \begin{pmatrix} y' & 0 \\ 0 & y'' \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1_p & b \\ 0 & 1_q \end{pmatrix} \right]$$

mit $y' \in \mathbb{P}_p$, $y'' \in \mathbb{P}_q$ und $b \in \mathbb{R}^{p \times q}$ schreiben lässt. Das ist wiederum gleichbedeutend damit, dass es ein $b \in \mathbb{R}^{p \times q}$ gibt mit

$$y \left[\begin{pmatrix} 1_p & b \\ 0 & 1_q \end{pmatrix}^{-1} \right] = \begin{pmatrix} y' & 0 \\ 0 & y'' \end{pmatrix} \quad \text{mit } y' \in \mathbb{R}^{p \times p} \text{ und } y'' \in \mathbb{R}^{q \times q}, \tag{1.13}$$

denn wie man leicht überprüft, liegt die linke Seite in (1.13) in $\mathbb{P}_n$, so dass $y' \in \mathbb{P}_p$ und $y'' \in \mathbb{P}_q$ zwangsläufig gelten müssen. Nun ist aber $y_1^{(p)}$ invertierbar, da y als positiv definit vorausgesetzt war. Wir können also $b = y_1^{-1} y_2$ wählen und erhalten dann

$$y \left[\begin{pmatrix} 1_p & y_1^{-1} y_2 \\ 0 & 1_q \end{pmatrix}^{-1} \right] = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_4 - y_1^{-1}[y_2] \end{pmatrix}$$

und somit die Existenz der Jacobizerlegung.

Wir wollen nun die Eindeutigkeit der Jacobizerlegung zeigen und betrachten dafür zwei Jacobizerlegungen $\operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)[b]$ und $\operatorname{diag}(d'_1, \dots, d'_n)[b']$ einer gegebenen Matrix $y \in \mathbb{P}_n$. Da für $n = 1$ nichts zu zeigen ist, können wir ohne Einschränkung $n \ge 2$ annehmen. Es gilt dann

$$\begin{aligned} & \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)[b] = \operatorname{diag}(d'_1, \dots, d'_n)[b'] \\ \Longleftrightarrow\; & \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n) = \operatorname{diag}(d'_1, \dots, d'_n)[b' b^{-1}]. \end{aligned}$$

Schreiben wir nun kurz $\beta := b' b^{-1}$, so erhalten wir durch eintragsweises Vergleichen der ersten Zeilen links und rechts

$$d_1 = d'_1 \quad \text{und} \quad 0 = d'_1 \beta_{1j} \text{ für alle } j \in \{2, \dots, n\}.$$

Wegen $d'_1 = y_1 > 0$ folgt daraus $\beta_{ij} = 0$ für alle $j \in \{2, \dots, n\}$. Insbesondere gilt

$$\operatorname{diag}(d_2, \dots, d_n) = \operatorname{diag}(d'_2, \dots, d'_n)[(\beta_1)_4^{(1)}].$$

[10] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

Induktiv können wir die Dimension der betrachteten Matrizen auf $n = 2$ reduzieren; hier gilt

$$\begin{pmatrix} d_{n-1} & 0 \\ 0 & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_{n-1,n} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d'_{n-1} & 0 \\ 0 & d'_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta_{n-1,n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d'_{n-1} & d'_{n-1}\beta_{n-1,n} \\ d'_{n-1}\beta_{n-1,n} & d'_{n-1}\beta^2_{n-1,n} + d'_n \end{pmatrix}.$$

Wir lesen sofort $d_{n-1} = d'_{n-1}$, $\beta_{n-1,n} = 0$ und $d_n = d'_n$ ab. Insgesamt erhalten wir also

$$d_j = d'_j \text{ für alle } j \in \{1, \dots, n\} \quad \text{und} \quad \beta = b'b^{-1} = 1_n, \text{ also } b = b'.$$

Das ist die behauptete Eindeutigkeit der Jacobizerlegung. □

Korollar 1.31. *Für alle $y \in \mathbb{P}_n$ gilt die* **HADAMARD-*Ungleichung***[11]

$$\det(y) \leq \prod_{j=1}^{n} y_{jj}.$$

Beweis. Betrachten wir eine Jacobizerlegung $y = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)[b]$ von y wie in Lemma 1.30. Dann gilt für alle $1 \leq j \leq n$

$$y_{jj} = d_j + \sum_{k=1}^{j-1} d_k b^2_{kj} \geq d_j,$$

woraus sofort die Hadamard-Ungleichung folgt. □

Satz 1.32. *Für ein beliebiges $y \in \mathbb{P}_n$ existiert die Zahl*

$$\mathfrak{m}(y) := \min_{v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} (y[v])$$

und erfüllt die **HERMITE-*Ungleichung***[12]

$$\mathfrak{m}(y) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \det(y)^{\frac{1}{n}}.$$

Beweis. Die Menge $M_c := \{v \in \mathbb{R}^n \mid y[v] \leq c\}$ für ein $c > 0$ ist kompakt,

denn: Mit $y = {}^t uu$ gilt

$$M_c = \{v \in \mathbb{R}^n \mid {}^t(uv)(uv) \leq c\} = \text{ Bild unter } u^{-1} \text{ von } \{v \in \mathbb{R}^n \mid {}^t vv \leq c\}.$$

#

Da $\mathbb{Z}^n$ diskret ist, ist der Durchschnitt $M_c \cap \mathbb{Z}^n$ endlich. Hieraus folgt die Existenz von $\mathfrak{m}(y)$.

Wir zeigen die Hermite-Ungleichung per Induktion. Offenbar stimmt die Aussage für $n = 1$. Wir nehmen also die Wahrheit der Aussage für $n - 1$ an und betrachten eine Matrix $y \in \mathbb{P}_n$.

[11] Jacques Hadamard (1865-1963)
[12] Charles Hermite (1822-1901)

Ein beliebiges $w \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ lässt sich schreiben als $w = mv$ mit einem $m \in \mathbb{N}$ und einem $v = {}^t(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$ mit $\mathrm{ggT}(v_1, \ldots, v_n) = 1$. Dann gilt

$$y[w] = m^2 y[v] \geq y[v].$$

Offensichtlich wird also das Minimum $\mathfrak{m}(y)$ bei einem Vektor $v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ mit teilerfremden Einträgen angenommen. Solch ein v kommt stets als erste Spalte einer Matrix $u \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ vor,

denn: Nach (1.5) gibt es eine Matrix $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ mit $gv = {}^t(r, 0, \ldots, 0)$, wobei $r \in \mathbb{Z}$ bis auf das Vorzeichen der größte gemeinsame Teiler der Einträge von v ist, in unserem Falle also 1. Die Behauptung folgt nach Linksmultiplikation mit g^{-1}. #

Da für den ersten Standardbasisvektor e_1 von $\mathbb{Z}^n$ gerade $ue_1 = v$ gilt, folgt leicht

$$\mathfrak{m}(y[u]) = \mathfrak{m}(y).$$

Andererseits gilt natürlich auch $\det(y[u]) = \det(y)$, so dass wir für unsere Überlegung annehmen dürfen, dass $v = e_1$ und $\mathfrak{m}(y) = y_{11}$ gelten. Wir führen eine Zerlegung

$$y = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 \\ 0 & y'' \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix} \right]$$

zur Partition $n = 1 + (n-1)$ durch wie wir sie im Beweis der Jacobizerlegung studiert haben. Wenn wir ein beliebiges $w \in \mathbb{Z}^n$ als $w = \binom{w'}{w''}$ mit $w' \in \mathbb{Z}$ und $w'' \in \mathbb{Z}^{n-1}$ schreiben, gilt

$$y[w] = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 \\ 0 & y'' \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} w' + bw'' \\ w'' \end{pmatrix} \right] = y_{11}(w' + bw'')^2 + y''[w''].$$

Wir wählen nun $w = \binom{w'}{w''}$ wie folgt:

- Zum einen gelte $y''[w''] = \mathfrak{m}(y'')$,
- zum anderen $|w' + bw''| \leq \frac{1}{2}$.

Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$y_{11} = \mathfrak{m}(y) \leq y[w] \leq \frac{1}{4} \cdot y_{11} + \mathfrak{m}(y'') \leq \frac{1}{4} \cdot \mathfrak{m}(y) + \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \det(y'')^{\frac{1}{n-1}}$$

und somit

$$\frac{3}{4} \cdot y_{11} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \det(y'')^{\frac{1}{n-1}}.$$

Nehmen wir beide Seiten zur $(n-1)$-ten Potenz[13] und multiplizieren mit y_{11}, so erhalten wir

$$y_{11}^n \leq y_{11} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \det(y'') = \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \det(y)^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

und damit die Behauptung. □

[13] Alle beteiligten Größen sind positive reelle Zahlen.

1.3.2 Verbesserung der Hermite'schen Ungleichung ($\star$)

Die Hermite'sche Ungleichung und das Studium der Werte $y[v]$ überhaupt ist ursprünglich ein Problem aus der Theorie der Gitter in reellen Vektorräumen. Mit Methoden aus dieser Theorie lässt sich die Hermite-Ungleichung dann auch substantiell verbessern.

Definition 1.33. *Eine Teilmenge $L \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **(vollständiges) Gitter**, wenn es eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ gibt mit*

$$L = \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}v_n.$$

*Diese Basis heißt dann eine **Basis** von L. Die Matrix, deren Spalten die Koordinaten von $v_1, \dots, v_n$ sind, heißt die **Matrix von** $\{v_1, \dots, v_n\}$.*

Nach Definition gilt für die Matrix g einer Basis eines Gitters L

$$\{g\tilde{v} \mid \tilde{v} \in \mathbb{Z}^n\} = L$$

und insbesondere $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Ist $\tilde{g}$ die Matrix einer anderen Basis von L, so gilt

$$\tilde{g} = gu \quad \text{mit } u \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}). \tag{1.14}$$

Definition 1.34. *Für ein Gitter $L \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von L heißt*

$$\mathscr{F} := \{r_1 v_1 + \ldots + r_n v_n \mid 0 \leq r_j \leq 1 \text{ für } 1 \leq j \leq n\}$$

*die **Fundamentalmasche** von L bezüglich $\{v_1, \dots, v_n\}$ und*

$$\mathrm{vol}(L) := \mathrm{vol}(\mathscr{F}) := \int_{\mathscr{F}} \mathrm{d}x = |\det(g)|$$

mit dem LEBESGUE*-Maß*[14] $\mathrm{d}x$ *auf* $\mathbb{R}^n$ *das **Volumen** des Gitters L.*[15]

Satz 1.35 (MINKOWSKI'scher Gitterpunktsatz[16]). *Sei $L \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gitter und $K \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, kompakt, konvex und zentralsymmetrisch.*[17] *Ist dann*

$$\mathrm{vol}(K) > 2^n \,\mathrm{vol}(L),$$

so enthält $K \cap L$ einen Punkt $v \neq 0$.

Bemerkung 1.36. *Der Gitterpunktsatz spielt eine wichtige Rolle in der Algebraischen Zahlentheorie, wo man mit ihm die Endlichkeit der Klassenzahl einer algebraischen Körpererweiterung zeigen kann.*

Beweis. Für $\frac{1}{2}K = \{\frac{1}{2}v \mid v \in K\}$ gilt nach Voraussetzung

$$\mathrm{vol}\big(\frac{1}{2}K\big) = 2^{-n}\,\mathrm{vol}(K) > \mathrm{vol}(L) = \mathrm{vol}(\mathscr{F}),$$

[14] Henri Léon Lebesgue (1875-1941)
[15] Wegen (1.14) ist $\mathrm{vol}(L)$ unabhängig von der Basiswahl.
[16] Hermann Minkowski (1864-1909)
[17] Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann ***zentralsymmetrisch***, wenn für alle $v \in M$ auch $-v \in M$ gilt.

wobei $\mathscr{F}$ eine Grundmasche von L sei. Wir nehmen nun an, alle Translate $\frac{1}{2}K + v$ mit $v \in L$ wären paarweise disjunkt. Da $\frac{1}{2}K$ kompakt und L diskret ist, gälte dann

$$\frac{1}{2}K = (\frac{1}{2}K) \cap \mathbb{R}^n = (\frac{1}{2}K) \cap \bigsqcup_{v \in L} (\mathscr{F} - v) = \bigsqcup_{v \in L} \Big((\frac{1}{2}K) \cap (\mathscr{F} - v) \Big) = \bigsqcup_{j=1}^{m} \Big((\frac{1}{2}K) \cap (\mathscr{F} - v_j) \Big)$$

mit einer endlichen Teilmenge $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq L$. Es folgte

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(\frac{1}{2}K) &= \sum_{j=1}^{m} \operatorname{vol}\Big((\frac{1}{2}K) \cap (\mathscr{F} - v_j) \Big) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \operatorname{vol}\Big(v_j + \Big((\frac{1}{2}K) \cap (\mathscr{F} - v_j) \Big) \Big) && \text{(Translationsinvarianz von vol)} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \operatorname{vol}\Big(\Big((\frac{1}{2}K) + v_j \Big) \cap \mathscr{F} \Big) \\
&= \operatorname{vol}\Big(\bigsqcup_{j=1}^{m} \Big((\frac{1}{2}K) + v_j \Big) \cap \mathscr{F} \Big) && \text{(Translate } \big(\tfrac{1}{2}K\big) + v_j \text{ paarweise disjunkt)} \\
&\leq \operatorname{vol}(\mathscr{F}).
\end{aligned}$$

Da dies im Widerspruch zur umgekehrten Abschätzung weiter oben steht, muss es also Gitterpunkte $v_1 \neq v_2 \in L$ geben, so dass $\big(\frac{1}{2}K\big) + v_1$ und $\big(\frac{1}{2}K\big) + v_2$ nichtleeren Durchschnitt haben. Das bedeutet, dass es Punkte $v_1 \neq v_2 \in L$ und $w_1, w_2 \in K$ gibt mit

$$\frac{1}{2}w_1 + v_1 = \frac{1}{2}w_2 + v_2$$

und somit

$$\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2 = v_1 - v_2 \quad \in L \setminus \{0\}.$$

Wegen der Zentralsymmetrie liegt mit w_2 auch $-w_2$ in K, und wegen der Konvexität auch jeder der Punkte $\lambda w_1 + (1-\lambda)(-w_2)$ mit $\lambda \in [0,1]$. Insbesondere gilt

$$\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2 \in K \cap \big(L \setminus \{0\}\big)$$

und somit der Satz. □

Beispiel 1.37. *Für $r > 0$ sei $K_r := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq r\}$ mit $\|v\|^2 = \langle v \mid v \rangle$ die **abgeschlossene n-Kugel** von Radius r. Dann erfüllt K_r die Voraussetzungen des Gitterpunktsatzes, ist also nichtleer, kompakt, konvex und zentralsymmetrisch. Es gilt*

$$\operatorname{vol}(K_r) = r^n \operatorname{vol}(K_1) = r^n \cdot \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}.$$

Korollar 1.38. *Gilt für ein Gitter $L \subseteq \mathbb{R}^n$*

$$r^n \geq 2^n \cdot \frac{\operatorname{vol}(L)}{\operatorname{vol}(K_1)},$$

so enthält K_r einen Punkt aus $L \setminus \{0\}$.

Beweis. Für
$$r^n > 2^n \cdot \frac{\mathrm{vol}(L)}{\mathrm{vol}(K_1)}$$
folgt das Korollar sofort aus dem Minkowski'schen Gitterpunktsatz 1.35. Gelte nun also
$$r^n = 2^n \cdot \frac{\mathrm{vol}(L)}{\mathrm{vol}(K_1)}.$$
Dann enthält nach dem bereits Bewiesenen $K_{r+\frac{1}{2}}$ einen Punkt aus $L \setminus \{0\}$. Da $K_{r+\frac{1}{2}}$ kompakt ist, besteht der Durchschnitt $K_{r+\frac{1}{2}} \cap L$ aus nur endlich vielen Punkten $0, v_1, \ldots, v_k$, die ohne Einschränkung die Anordnung
$$0 < \|v_1\| \leq \|v_2\| \leq \ldots \leq \|v_k\|$$
erfüllen. Nehmen wir nun an, die v_j lägen alle bereits in $K_{r+\frac{1}{2}} \setminus K_r$. Dann folgte sofort $r < \|v_1\|$ und also $r < \|v_1\| - \varepsilon$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$. Zusammen mit der Voraussetzung ergäbe sich
$$\left(\|v_1\| - \varepsilon\right)^n > r^n = 2^n \cdot \frac{\mathrm{vol}(L)}{\mathrm{vol}(K_1)},$$
insbesondere enthielte nach dem Bewiesenen $K_{\|v_1\|-\varepsilon} \subseteq K_{r+\frac{1}{2}}$ einen Punkt aus $L \setminus \{0\}$. Das ist ein Widerspruch zur Minimalität von v_1, so dass eines der v_j schon in K_r liegen muss, was zu zeigen war. □

In offensichtlicher Verschärfung der Hermite'schen Ungleichung 1.32 folgt hieraus

Korollar 1.39. *Für ein beliebiges $y \in \mathbb{P}_n$ gilt*
$$\mathfrak{m}(y) < \left(1 + \frac{n}{4}\right) \cdot \det(y)^{\frac{1}{n}}.$$

Beweis. Als positiv definite symmetrische Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ lässt sich jedes gegebene $y \in \mathbb{P}_n$ schreiben als $y = {}^t g g$ mit einer geeigneten Matrix $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Wir betrachten nun das eindeutig bestimmte Gitter $L \subseteq \mathbb{R}^n$, für das die Spalten der Matrix g eine Basis bilden. Für je zwei Gitterpunkte $v = g\tilde{v}$ und $w = g\tilde{w}$ in L mit $\tilde{v}, \tilde{w} \in \mathbb{Z}^n$ und für das Standardskalarprodukt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ gilt
$$\langle v \mid w \rangle = {}^t v w = {}^t\tilde{v}({}^t g g)\tilde{w} = {}^t\tilde{v} y \tilde{w}$$
und insbesondere
$$\langle v \mid v \rangle = y[\tilde{v}] \quad \text{für alle } v \in L.$$
Wir erhalten somit
$$\mathfrak{m}(y) = \min_{\tilde{v}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} (y[\tilde{v}]) = \min_{v\in L\setminus\{0\}} \langle v \mid v \rangle.$$
Nach Korollar 1.38 mit
$$r = 2 \cdot \left(\frac{\mathrm{vol}(L)}{\mathrm{vol}(K_1)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

gibt es ein $v \in L \setminus \{0\}$ mit

$$\langle v \mid v \rangle \leq 4 \cdot \left(\frac{\mathrm{vol}(L)}{\mathrm{vol}(K_1)} \right)^{\frac{2}{n}},$$

was uns die Abschätzung

$$\mathfrak{m}(y) \leq 4 \cdot \left(\frac{\mathrm{vol}(L)}{\mathrm{vol}(K_1)} \right)^{\frac{2}{n}} = 4 \cdot \left(\frac{|\det(g)|}{\mathrm{vol}(K_1)} \right)^{\frac{2}{n}} = 4 \cdot \mathrm{vol}(K_1)^{-\frac{2}{n}} \cdot \det(y)^{\frac{1}{n}}$$

liefert. Die Behauptung folgt, da mit der STIRLING'schen[18] Formel für die Γ-Funktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die Asymptotik

$$4 \cdot \mathrm{vol}(K_1)^{-\frac{2}{n}} \sim \frac{2n}{\pi e}$$

und in Folge sogar die Abschätzung

$$4 \cdot \mathrm{vol}(K_1)^{-\frac{2}{n}} < 1 + \frac{n}{4}$$

gilt. □

1.3.3 Minkowski'sche Reduktionstheorie

In diesem Abschnitt wollen wir die Aktion von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{P}_n$ genauer studieren. Dabei soll $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ ab sofort auch kurz die ***unimodulare Gruppe*** U_n heißen.

Definition 1.40. *Der Bereich $\mathcal{R}_n$ der **Minkowski-reduzierten Matrizen** ist gegeben durch diejenigen $y \in \mathbb{P}_n$, die folgende Bedingungen erfüllen.*

(i) *Für alle $1 \leq j \leq n$ gilt: $y[v] \geq y_{jj}$ für alle $v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\pm e_j\}$ mit $\mathrm{ggT}(v_j, \ldots, v_n) = 1$,*

(ii) *Für alle $1 \leq j \leq n-1$ gilt: $y_{j,j+1} \geq 0$.*

Das Ziel dieses Unterabschnitts ist es, folgenden Satz zu zeigen.

Satz 1.41. *Die Menge $\mathcal{R}_n$ ist ein Fundamentalbereich für die Aktion von U_n auf $\mathbb{P}_n$ in folgendem Sinne.*

(i) *$\mathcal{R}_n$ ist abgeschlossen.*

(ii) *Für alle $y \in \mathbb{P}_n$ gibt es ein $u \in U_n$ mit $y[u] \in \mathcal{R}_n$,*

(iii) $\#\{u \in U_n \mid \mathcal{R}_n[u] \cap \mathcal{R}_n \neq \emptyset\} < \infty$,

(iv) *Gehen zwei $y, \tilde{y}$ aus dem offenen Inneren $\mathring{\mathcal{R}}_n$ von $\mathcal{R}_n$ durch $\tilde{y} = y[u]$ mit einem $u \in U_n$ ineinander über, so folgt $u \in \{\pm 1_n\}$ und also $\tilde{y} = y$.*

Wir führen keinen eigenen Beweis für den Satz sondern zeigen die vier Eigenschaften 1.41 (i) - (iv) in gesonderten Lemmata. Bevor wir dies tun, ist es nützlich, uns zu überlegen, wie das Innere $\mathring{\mathcal{R}}_n$ und der Rand $\partial\mathcal{R}_n$ von $\mathcal{R}_n$ aussehen.

[18] James Stirling (1692-1770)

Proposition 1.42. *Das Innere und der Rand von $\mathcal{R}_n$ sind wie folgt gegeben.*

$$\begin{aligned}\mathring{\mathcal{R}}_n &= \{y \in \mathbb{P}_n \mid y \text{ erfüllt die Ungleichungen in Definition 1.40 mit „>" statt „}\geq\text{"}\},\\ \partial\mathcal{R}_n &= \{y \in \mathbb{P}_n \mid y \text{ erfüllt die Ungleichungen in Definition 1.40 mit mindestens einem „="}\}.\end{aligned}$$

Beweis. Es genügt offensichtlich zu zeigen, dass die Mengen auf der rechten Seite in $\mathring{\mathcal{R}}_n$ bzw. $\partial\mathcal{R}_n$ enthalten sind.

Erfülle also $y \in \mathbb{P}_n$ die Ungleichungen in Definition 1.40 mit „>" statt „≥". Bezeichnen wir nun den kleinsten Eigenwert von y mit $\lambda > 0$ und wählen ein $0 < \varepsilon < \lambda$. Dann definieren wir eine Umgebung

$$U := \{\tilde{y} \in \mathbb{P}_n \mid \tilde{y} - y > -\varepsilon 1_n,\ |\tilde{y}_{jj} - y_{jj}| < \varepsilon,\ \tilde{y}_{j,j+1} > 0 \text{ für alle passenden } j\}.$$

von y. Es gilt $U \subseteq \mathcal{R}_n$ und somit $y \in \mathring{\mathcal{R}}_n$,

denn: Bedingung (ii) von 1.40 ist für jedes $\tilde{y} \in U$ trivialerweise erfüllt. Für alle $\tilde{y} \in U$, alle $1 \leq j \leq n$ und alle $v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\pm e_j\}$ mit $\operatorname{ggT}(v_j, \ldots, v_n) = 1$ gilt zudem

$$\tilde{y}[v] - \tilde{y}_{jj} = y[v] + (\tilde{y} - y)[v] - y_{jj} - (\tilde{y}_{jj} - y_{jj}) > (\lambda - \varepsilon)^t vv - y_{jj} - \varepsilon.$$

Der Ausdruck rechts hängt nicht von $\tilde{y}$ ab und ist positiv für alle bis auf endlich viele v. Durch die Wahl eines neuen, möglicherweise kleineren ε können wir erreichen, dass es keine Ausnahmevektoren mehr gibt und für alle $\tilde{y} \in U$ auch Bedingung (i) von 1.40 gilt. #

Damit haben wir die erste Behauptung der Proposition gezeigt.

Erfülle nun y die Ungleichungen in Definition 1.40 so, dass mindestens eine dieser Ungleichungen eine Gleichheit ist. Klar, dass es dann in jeder noch so kleinen Umgebung von y einen Punkt in $\mathbb{P}_n$ gibt, für den gerade diese Ungleichung nicht gilt. Das zeigt auch die zweite Behauptung. □

Aus Proposition 1.42 folgt sofort die Abgeschlossenheit von $\mathcal{R}_n$; das ist Eigenschaft 1.41 (i). Als nächstes wollen wir zeigen, dass sich jedes $y \in \mathbb{P}_n$ durch ein unimodulares $u \in U_n$ nach $\mathcal{R}_n$ transportieren lässt; also Eigenschaft 1.41 (ii). Dies untersuchen wir zunächst in einem Beispiel.

Beispiel 1.43. *Die Matrix*

$$y = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

ist offensichtlich symmetrisch und positiv definit, liegt also in $\mathbb{P}_2$. Mit $y_{12} = -\frac{3}{2} < 0$ verletzt sie jedoch Bedingung (ii) von Definition 1.40, so dass y nicht in $\mathcal{R}_2$ liegt. Für $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in U_2$ gilt aber

$$y[u] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_2.$$

Wir wollen nun zeigen, dass dies kein Zufall ist und zeigen das folgende

Lemma 1.44. *Für alle $y \in \mathbb{P}_n$ gibt es ein $u \in U_n$ mit $y[u] \in \mathcal{R}_n$. Es gilt also*

$$\mathbb{P}_n = \bigcup_{u \in U_n} \mathcal{R}_n[u].$$

Beweis. Sei $y \in \mathbb{P}_n$ beliebig aber fest. Wir werden nun $y =: y^{(0)}$ in n Reduktionsschritten zu einer Matrix $y^{(n)} \in \mathcal{R}_n$ machen. Dabei setzen wir für $k = 0, \ldots, n-1$

$$y^{(k+1)} := y^{(k)}[u^{(k+1)}]$$

mit einer geeigneten unimodularen Matrix $u^{(k+1)} \in U_n$ der Form

$$u^{(k+1)} = \left(\begin{array}{c|c c} & s_1 & \\ 1_k & \vdots & 0 \\ & s_k & \\ \hline & s_{k+1} & \\ 0 & \vdots & * \\ & s_n & \end{array}\right) \quad \text{mit } \operatorname{ggT}(s_{k+1}, \ldots, s_n) = 1.$$

Dann wird zum einen bei der Zuordnung

$$y^{(k)} \mapsto y^{(k+1)} := y^{(k)}[u^{(k+1)}]$$

die Teilmatrix $(y^{(k)})_1^{(k)}$ nicht verändert; insbesondere hat $y^{(k+1)}$ die Eigenschaften

Für alle $1 \le j \le k$ gilt: $y^{(k+1)}[v] \ge y_{jj}^{(k+1)}$ für alle $v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\pm e_j\}$ mit $\operatorname{ggT}(v_j, \ldots, v_n) = 1$,

Für alle $1 \le j \le k-1$ gilt: $y_{j,j+1}^{(k+1)} \ge 0$,

wenn $y^{(k)}$ sie hat. Zum andern kommen für die Spalte s in $u^{(k+1)}$ tatsächlich alle Vektoren mit der genannten Teilerfremdheitsbedingung infrage,

denn: Offensichtlich ist $u^{(k+1)}$ genau dann in U_n, wenn $(u^{(k+1)})_4^{(k)}$ in U_{n-k} liegt. Zu zeigen ist also, dass für $m \in \mathbb{Z}$ jeder Vektor aus $\mathbb{Z}^m$ mit teilerfremden Einträgen als erste Spalte einer unimodularen Matrix vorkommt. Das haben wir aber schon im Beweis der Hermite-Ungleichung 1.32 gezeigt. #

Wegen der positiven Definitheit von $y^{(k)}$ und der Ganzheit von s können wir daher immer ein s finden, das für $y^{(k+1)}$ die Bedingung

$$y^{(k+1)}[v] = y^{(k)}[u^{(k+1)}v] \ge y^{(k)}[s] = y_{k+1,k+1}^{(k+1)} \text{ für alle } v \in \mathbb{Z}^n \text{ mit } \operatorname{ggT}(v_{k+1}, \ldots, v_n) = 1$$

erzwingt. Um zusätzlich die Bedingung

$$y_{k,k+1}^{(k+1)} \ge 0$$

zu erreichen, ersetzen wir gegebenenfalls s mit $-s$, was offensichtlich nichts an der Unimodularität der Matrix $u^{(k+1)}$ ändert und keine der zuvor gezeigten Eigenschaften von $y^{(k+1)}$ zerstört. □

Beispiel 1.45. *Wir wollen den Algorithmus aus dem Beweis des Lemmas auf die Matrix*

$$y = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

aus dem letzten Beispiel anwenden.

Wir suchen also für den ersten Reduktionsschritt eine unimodulare Matrix $u^{(1)}$, für deren erste Spalte s die Zahl $y[s]$ minimal ist. Das ist gleichbedeutend mit der Suche nach teilerfremden s_1, s_2, für die

$$y[\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}] = s_1^2 - 3s_1s_2 + 5s_2^2$$

minimal ist. Offensichtlich gilt $y[\binom{1}{0}] = 1$. Da y ganzzahlige Einträge hat und positiv definit ist, ist das eine mögliche Wahl von s. Eine mögliche Wahl einer unimodularen Matrix $u^{(1)}$ mit erster Spalte $\binom{1}{0}$ ist $u^{(1)} = 1_2$, was natürlich $y^{(1)} = y$ nach sich zieht.

Als nächstes suchen wir eine unimodulare Matrix $u^{(2)}$, deren erste Spalte durch den Vektor $\binom{1}{0}$ gegeben ist (damit die gerade erreichte Eigenschaft nicht zerstört wird) und für deren zweite Spalte s die Zahl $y^{(1)}[s] = y[s]$ minimal ist. Das ist gleichbedeutend mit der Suche nach einem $s_1 \in \mathbb{Z}$ und einem $s_2 \in \{\pm 1\}$, so dass $y[\binom{s_1}{s_2}]$ minimal ist. Da mit s immer auch $-s$ eine Lösung dieses Minimierungsproblems ist, können wir ohne Einschränkung $s_2 = 1$ annehmen und $s_1^2 - 3s_1 + 5$ minimieren. Der Scheitelpunkt dieser Parabel liegt in $s_1 = \frac{3}{2}$, so dass ein mögliches Minimum in $s_1 = 1$ angenommen wird. Mit $u^{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ folgt

$$y^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix},$$

welches noch nicht in $\mathcal{R}_2$ liegt, da wir negative Nebendiagonaleinträge haben. Ersetzen von s durch $-s$ behebt dieses Problem, und mit $u^{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ erhalten wir die schon zuvor angegebene Matrix

$$y^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_2.$$

Insgesamt haben wir $y[u] = y^{(2)} \in \mathcal{R}_2$ mit $u = u^{(1)}u^{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ erreicht.

Wir machen nun weiter mit dem Beweis des Satzes. Das folgende Lemma impliziert Bedingung 1.41 (iv).

Lemma 1.46. *Seien $y, \tilde{y} \in \mathcal{R}_n$ mit $\tilde{y} = y[u]$ für ein $\{\pm 1_n\} \not\ni u \in U_n$. Dann liegen y und $\tilde{y}$ in $\partial\mathcal{R}_n$.*

Beweis. Nehmen wir zunächst an, u sei eine Diagonalmatrix. Ohne Einschränkung können wir dann annehmen, dass für ein $j \in \{1, \ldots, n-1\}$

$$u_{11} = \ldots = u_{jj} = 1 \quad \text{und} \quad u_{j+1,j+1} = -1$$

gilt. Wegen $\tilde{y} = y[u]$ folgt dann $\tilde{y}_{j,j+1} = -y_{j,j+1}$. Da $\tilde{y}_{j,j+1}$ und $y_{j,j+1}$ nach Bedingung (ii) von 1.40 beide nicht negativ sein können, folgt

$$\tilde{y}_{j,j+1} = 0 = y_{j,j+1},$$

und y liegt nach Proposition 1.42 in $\partial\mathcal{R}_n$.

Sei nun u keine Diagonalmatrix. Wenn wir $s_1, \ldots, s_n$ für die Spalten von u schreiben, gibt es also ein kleinstes $j \in \{1, \ldots, n\}$, für das s_j nicht von der Gestalt $s_j = \pm e_j$ mit dem j-ten Standardbasisvektor e_j ist. Wegen $u \in U_n$ gilt $\det(u) \in \{\pm 1\}$, nach LAPLACE-Entwicklung[19] über die ersten $j-1$ Spalten sogar

$$\det(u_4^{(j-1)}) \in \{\pm 1\}.$$

Insbesondere folgt $\mathrm{ggT}((s_j)_j, \ldots, (s_j)_n) = 1$, und nach Bedingung (i) in 1.40 erhalten wir

$$\tilde{y}_{jj} = y[s_j] \geq y_{jj}.$$

Andererseits gilt mit $\tilde{y} = y[u]$ auch $y = \tilde{y}[u^{-1}]$. Analog zur obigen Argumentation erhalten wir $y_{jj} \geq \tilde{y}_{jj}$ und somit

$$y[s_j] = \tilde{y}_{jj} = y_{jj} \quad \text{für ein } s_j \neq \pm e_j \text{ mit } \mathrm{ggT}((s_j)_j, \ldots, (s_j)_n) = 1,$$

so dass auch in diesem Fall y in $\partial\mathcal{R}_n$ liegen muss. □

Bevor wir auch 1.41 (iii) zeigen können, müssen wir den Bereich $\mathcal{R}_n$ noch etwas genauer studieren.

Proposition 1.47. *Sei $y \in \mathcal{R}_n$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(a) *Für alle $0 \leq r \leq n$ gelten $y_1^{(r)} \in \mathcal{R}_r$ und $y_4^{(r)} \in \mathcal{R}_{n-r}$.*

(b) $\mathfrak{m}(y) = y_{11} \leq \ldots \leq y_{nn}$.

(c) $2|y_{jk}| \leq y_{jj}$ *für alle $j \neq k$.*

(d) $\prod_{j=1}^n y_{jj} \leq c_n \cdot \det(y)$ *mit $c_n \in \mathbb{R}_{>0}$ unabhängig von y.* ***(Minkowski-Ungleichung)***

Beweis. Mit y ist auch y_1 symmetrisch und positiv definit; für letzteres betrachte man die jeweiligen führenden Hauptminoren. Andererseits ist nach Lemma 1.29 mit y auch

$$y[\begin{pmatrix} 0 & 1_r \\ 1_{n-r} & 0 \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} y_4 & {}^t y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}$$

symmetrisch und positiv definit. Mit der selben Argumentation wie für y_1 folgt nun die Symmetrie und die positive Definitheit von y_4. Bedingung 1.40 (i) für y_1 bzw. y_4 folgt nun aus der Reduziertheit von y und

$$y_1[v] = y\left[\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}\right] \text{ für alle } v \in \mathbb{Z}^r \quad \text{bzw.} \quad y_4[v] = y\left[\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}\right] \text{ für alle } v \in \mathbb{Z}^{n-r}.$$

Da y_1 und y_4 offensichtlich Bedingung 1.40 (ii) erfüllen, haben wir damit Aussage (a) gezeigt.

Das Gleichheitszeichen in Aussage (b) folgt, da nach Definition y_{11} das Minimum über die $y[v]$ für die v mit teilerfremden Einträgen ist und das Minimum $\mathfrak{m}(y)$ nach einer Überlegung aus

[19] Pierre Simon Marquis de Laplace (1749-1827)

dem Beweis der Hermite-Ungleichung in solch einem Vektor angenommen wird. Die Ungleichungen folgen sofort, wenn man als v die Standardbasisvektoren $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ einsetzt und sich überlegt, welche Teilerfremdheitsbedingungen diese erfüllen.

Offensichtlich erfüllt $v = e_j \pm e_k$ mit $j \neq k$ die Bedingung $\operatorname{ggT}(v_k, \ldots, v_n) = 1$. Es gilt daher

$$y_{kk} \leq y[e_j \pm e_k] = y_{jj} \pm 2y_{jk} + y_{kk}$$

und somit Aussage (c).

Es bleibt die Minkowski-Ungleichung (d) zu zeigen. Für $n = 1$ stimmt diese offensichtlich mit $c_1 = 1$. Wir nehmen daher an, die Konstanten $c_1, \ldots, c_{n-1}$ seien bereits konstruiert, und zeigen die Existenz der Konstanten c_n per Widerspruchsbeweis. Dafür nehmen wir an, es gebe eine Folge (y_j) in $\mathcal{R}_n$ mit

$$\frac{\prod_{k=1}^{n}(y_j)_{kk}}{\det(y_j)} \to \infty \quad \text{für } j \to \infty.$$

Wegen $(y_j)_{11} = \mathfrak{m}(y_j)$ und der Hermite'schen Ungleichung 1.32 können die Verhältnisse

$$\big[(y_j)_{k+1,k+1} : (y_j)_{kk}\big] \quad \text{mit } k = 1, \ldots, n-1$$

für $j \to \infty$ nicht alle beschränkt sein. Sei also k maximal unter denjenigen Zahlen in $\{1, \ldots, n\}$ mit unbeschränktem Verhältnis $\big[(y_j)_{k+1,k+1} : (y_j)_{kk}\big]$. Dann können wir nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge ohne Einschränkung

$$\frac{(y_j)_{kk}}{(y_j)_{k+1,k+1}} \to 0 \quad \text{für } j \to \infty$$

annehmen. Wie im Beweis der Jacobizerlegung 1.30 schreiben wir

$$y_j = \begin{pmatrix} (y_j)' & 0 \\ 0 & (y_j)'' \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1_k & b_j \\ 0 & 1_{n-k} \end{pmatrix}\right] \quad \text{mit } (y_j)' \in \mathbb{P}_k,\ (y_j)'' \in \mathbb{P}_{n-k} \text{ und } b_j \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}.$$

Nach (a) gilt hierbei sogar $(y_j)' \in \mathcal{R}_k$. Für jedes $v = \binom{v'}{v''}$ mit $v' \in \mathbb{Z}^k$ und $v'' \in \mathbb{Z}^{n-k}$ gilt dann

$$(y_j)[v] = (y_j)'[v' + b_j v''] + (y_j)''[v''].$$

Wir wählen für jedes j ein v_j mit

(i) $(y_j)''[(v_j)''] = \mathfrak{m}((y_j)'')$,
(ii) die Einträge von $(v_j)' + b_j(v_j)''$ liegen zwischen $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$.

Da y_j reduziert ist und $(v_j)''$ nach den Überlegungen im Beweis der Hermite-Ungleichung 1.32 automatisch teilerfremde Einträge hat, gilt

$$(y_j)_{k+1,k+1} \leq y_j[v_j] \overset{\text{(i)}}{=} (y_j)'[(v_j)' + b_j(v_j)''] + \mathfrak{m}((y_j)'').$$

Außerdem ist $(y_j)_{kk} > 0$ der betragsmäßig größte Eintrag von $(y_j)'$, da letztere Matrix ebenfalls reduziert ist. Mit (ii) folgt

$$(y_j)_{k+1,k+1} \leq \frac{k^2}{4} \cdot (y_j)_{kk} + \mathfrak{m}((y_j)'').$$

Nach Voraussetzung gilt $\frac{(y_j)_{kk}}{(y_j)_{k+1,k+1}} \to 0$, so dass mit der Hermite-Ungleichung 1.32 für $(y_j)''$ die Abschätzung

$$(y_j)_{k+1,k+1} \leq c \cdot \det((y_j)'')^{\frac{1}{n-k}} \quad \text{mit einem geeigneten } c > 0 \text{ unabhängig von } j$$

folgt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt weiter

$$(y_j)_{11} \cdot \ldots \cdot (y_j)_{kk} \leq c_k \cdot \det((y_j)').$$

Da außerdem die Verhältnisse

$$\left[(y_j)_{k+2,k+2} : (y_j)_{k+1,k+1}\right], \ldots, \left[(y_j)_{n-1,n-1} : (y_j)_{nn}\right]$$

als beschränkt angenommen waren, gibt es eine Konstante $\tilde{c}$ mit

$$(y_j)_{11} \cdot \ldots \cdot (y_j)_{nn} \leq c_k \cdot \det((y_j)') \cdot \tilde{c} \cdot \det((y_j)'') = c_k \cdot \tilde{c} \cdot \det(y_j).$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, so dass die Proposition bewiesen ist. □

Korollar 1.48. *Es gibt eine nur von n abhängige Konstante $d_n > 0$, so dass jede reduzierte Matrix $y \in \mathcal{R}_n$ der Ungleichung*

$$d_n^{-1} \cdot \operatorname{diag}(y_{11}, \ldots, y_{nn}) \geq y \geq d_n \cdot \operatorname{diag}(y_{11}, \ldots, y_{nn})$$

genügt.

Beweis. Sei $d := \operatorname{diag}(\sqrt{y_{11}}, \ldots, \sqrt{y_{nn}})$. Die Behauptung ist äquivalent dazu, dass die Eigenwerte von $d^{-1}yd^{-1}$ nach oben und unten durch positive Schranken beschränkt sind, die nur von n abhängen.

Dazu gilt zunächst zu bemerken, dass offensichtlich die Hauptminoren von $d^{-1}yd^{-1}$ alle positiv sind, so dass $d^{-1}yd^{-1}$ in $\mathbb{P}_n$ liegt. Insbesondere sind natürlich alle Eigenwerte von $d^{-1}yd^{-1}$ positiv. Weiter gilt

$$(d^{-1}yd^{-1})_{jk} = \frac{y_{jk}}{\sqrt{y_{jj}y_{kk}}},$$

so dass die Diagonaleinträge von $d^{-1}yd^{-1}$ alle gleich 1 sind. Die Summe aller Eigenwerte von $d^{-1}yd^{-1}$, also die Spur, ist somit gleich n. Da alle Eigenwerte positiv sind, zeigt das die erste Ungleichung.

Andererseits ist die Determinante von $d^{-1}yd^{-1}$ mit der Minkowski-Ungleichung 1.47 (d) durch $c_n^{-1} > 0$ nach unten beschränkt. Da sie mit der obigen Überlegung nach oben beschränkt sind, müssen die Eigenwerte von $d^{-1}yd^{-1}$ daher auch nach unten beschränkt sein, was die zweite Ungleichung zeigt. □

Bemerkung 1.49. *Unser Beweis der Minkowski-Ungleichung 1.47 (d) ist indirekt, so dass wir keinerlei Informationen über mögliche Konstanten c_n haben. Für kleine Werte von n kann man solche Konstanten jedoch „zu Fuß" bestimmen. So ist 1 der bestmögliche, also kleinste, Wert für c_1; hier gilt sogar „=" in der Minkowski-Ungleichung 1.47 (d). Der bestmögliche Wert für c_2 ist $\frac{4}{3}$.*

denn: Dafür betrachten wir die Menge

$$\tilde{\mathcal{R}}_2 = \{y \in \mathbb{P}_2 \mid 0 < y_{11} \leq y_{22},\ 2|y_{12}| \leq y_{11}\} \supset \mathcal{R}_2.$$

Für alle $y \in \tilde{\mathcal{R}}_2$ (und insbesondere für alle $y \in \mathcal{R}_2$) gilt

$$\det(y) = y_{11}y_{22} - y_{12}^2 = y_{11}y_{22} - \frac{1}{4}(2|y_{12}|)^2 \geq y_{11}y_{22} - \frac{1}{4}y_{11}^2 \geq \frac{3}{4}y_{11}y_{22}.$$

Daraus folgt, dass $\frac{4}{3}$ ein möglicher Wert für c_2 ist. Andererseits gilt

$$y_{11}y_{22} = 1 = \frac{4}{3}(1 - (\frac{1}{2})^2) = \frac{4}{3}\det(y) \quad \textit{für } y = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_2.$$

Das zeigt die Behauptung. #

Zum Beweis von Satz 1.41 fehlt uns immer noch Bedingung 1.41 (iii). Diese ergibt sich aus dem folgenden Lemma.

Lemma 1.50. *Sei $g \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ eine Matrix mit $0 < |\det(g)| \leq t \in \mathbb{R}_{>0}$, für die es zwei Matrizen $y, \tilde{y} \in \mathcal{R}_n$ gebe mit $\tilde{y} = y[g]$. Dann sind die Einträge von g durch eine Konstante beschränkt, die nur von n und t abhängt.*

Beweis. Wir beweisen den Satz per Induktion nach n. Für $n = 1$ gilt nach Voraussetzung $0 < |g| \leq t \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass die Behauptung ist trivialerweise erfüllt ist.

Sei nun $n > 1$. Wir schreiben

$$y = d[b] \quad \text{und} \quad \tilde{y} = \tilde{d}[\tilde{b}]$$

für die Jabobizerlegungen von y und $\tilde{y}$ und unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: $g_3^{(j)} = 0$ für kein $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gibt es für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ Zahlen $s^{(j)} \leq j < r^{(j)}$ mit $g_{r^{(j)}s^{(j)}} \neq 0$. Nach Korollar 1.48 gibt es ein t_1, das nur von n abhängt, und für das

$$t_1^{-1}d[g] < y[g] = \tilde{y} < t_1\tilde{d}$$

gilt. Insbesondere gilt für die Diagonaleinträge

$$\sum_{\ell=1}^{n} d_{\ell\ell}g_{\ell k}^2 \leq t_1^2\tilde{d}_{kk} \quad \text{für alle } 1 \leq k \leq n. \tag{1.15}$$

Da für alle j der Eintrag $g_{r^{(j)}s^{(j)}}$ in $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ liegt, folgt jeweils $d_{r^{(j)}r^{(j)}} \leq t_1^2\tilde{d}_{s^{(j)}s^{(j)}}$. Da nach den Reduktionsbedingungen $d_{11} \leq d_{22} \leq \ldots \leq d_{nn}$ und $\tilde{d}_{11} \leq \tilde{d}_{22} \leq \ldots \leq \tilde{d}_{nn}$ gilt, folgt für alle $1 \leq j \leq n$

$$d_{jj} \leq t_1^2\tilde{d}_{jj}. \tag{1.16}$$

Wegen $\det(g) \neq 0$ gilt für die Adjunkte

$$g^{\#} = \left((-1)^{k+l}\det(A_{kl})\right)_{k,l=1}^{n} \quad \text{mit } A_{kl} = A \text{ ohne } k\text{-te Zeile und } l\text{-te Spalte}$$

von g bekanntlich $g^{\#} = \det(g) \cdot g^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. Mit $\tilde{y} = y[g]$ folgt sofort

$$\tilde{y}[g^{\#}] = y[gg^{\#}] = \det(g)^2 \cdot y.$$

Wendet man die obige Argumentation auf diese Gleichung an, so erhält man analog

$$\tilde{d}_{jj} \leq t_2^2 d_{jj} \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n \tag{1.17}$$

mit einer nur von n abhängigen Konstanten t_2. Mit den Reduktionsbedingungen folgt aus (1.16) und (1.17) die Beschränktheit der Verhältnisse $[\tilde{d}_{jj} : d_{kk}]$ für alle $1 \leq j,k \leq n$. Die Behauptung für den ersten Fall ergibt sich schließlich aus (1.15).

Fall 2: $g_3^{(j)} = 0$ für ein $j \in \{1,\ldots,n\}$. Es gilt

$$\tilde{d} = \tilde{y}[\tilde{b}^{-1}] = (y[g])[\tilde{b}^{-1}] = y[g\tilde{b}^{-1}] = (d[b])[g\tilde{b}^{-1}] = d[bg\tilde{b}^{-1}].$$

Da d und $\tilde{d}$ diagonal sind, können wir

$$d = {}^t(d^{\frac{1}{2}})d^{\frac{1}{2}} \quad \text{mit } d^{\frac{1}{2}} := \operatorname{diag}(\sqrt{d_1},\ldots,\sqrt{d_n}),$$
$$\tilde{d} = {}^t(\tilde{d}^{\frac{1}{2}})\tilde{d}^{\frac{1}{2}} \quad \text{mit } \tilde{d}^{\frac{1}{2}} := \operatorname{diag}(\sqrt{\tilde{d}_1},\ldots,\sqrt{\tilde{d}_n})$$

schreiben. Eingesetzt erhalten wir

$$1_n = {}^t(d^{\frac{1}{2}}bg\tilde{b}^{-1}(\tilde{d}^{\frac{1}{2}})^{-1})(d^{\frac{1}{2}}bg\tilde{b}^{-1}(\tilde{d}^{\frac{1}{2}})^{-1})$$

und also

$$\tilde{g} := d^{\frac{1}{2}}bg\tilde{b}^{-1}(\tilde{d}^{\frac{1}{2}})^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}).$$

Andererseits ist mit $g_3^{(j)}$ auch $\tilde{g}_3^{(j)} = 0$, wie man leicht nachrechnet. Mit der Orthogonalität folgt $\tilde{g}_2^{(j)} = 0$, $\tilde{g}_1^{(j)} \in \mathrm{O}_j(\mathbb{R})$ und $\tilde{g}_4^{(j)} \in \mathrm{O}_{n-j}(\mathbb{R})$. Zurückübersetzt nach g bedeutet das

$$d_1[b_1g_1] = \tilde{d}_1[\tilde{b}_1], \quad d_4[b_4g_4] = \tilde{d}_4[\tilde{b}_4], \quad b_1g_2 + b_2g_4 = b_1g_1\tilde{b}_1^{-1}\tilde{b}_2. \tag{1.18}$$

Die ersten beiden Gleichungen in (1.18) lassen sich umschreiben zu

$$y_1[g_1] = \tilde{y}_1 \quad \text{und} \quad y_4[g_4] = \tilde{y}_4.$$

Nach 1.47 (a) gelten hierbei $y_1, \tilde{y}_1 \in \mathcal{R}_j$ und $y_4, \tilde{y}_4 \in \mathcal{R}_{n-j}$.

Wegen $t \geq |\det(g)| = |\det(g_1)| \cdot |\det(g_4)|$ und der Ganzzahligkeit der Einträge von g können wir die Induktionsvoraussetzung auf g_1 und g_4 anwenden und sehen, dass deren Einträge durch Konstanten beschränkt sind, die nur von j bzw. $n-j$ (also letztlich von n) und t abhängen. Die Beschränktheit der Einträge von g_2 folgt aus der dritten Gleichung in (1.18),

denn: Nach Korollar 1.48 sind die Einträge von b und $\tilde{b}$ durch eine Konstante beschränkt, die nur von n abhängt. Die Behauptung folgt, da wir ja die Beschränktheit der Einträge von g_1 und g_4 gerade eingesehen hatten. #

□

1.3.4 Siegel'sche Reduktionstheorie

Wie zu Beginn des Abschnitts angekündigt, wollen wir unsere Erkenntnisse über Minkowski-reduzierte Matrizen nun dazu nutzen, einen Fundamentalbereich für die Aktion von Γ_n auf $\mathbb{H}_n$ zu konstruieren.

Definition 1.51. *Ein Punkt $z = x + iy \in \mathbb{H}_n$ heißt **Siegel-reduziert**, wenn er folgende Bedingungen erfüllt:*

(i) $|\det(c_M z + d_M)| \geq 1$ *für alle* $M \in \Gamma_n$,

(ii) *y ist Minkowski-reduziert,*

(iii) *x ist reduziert modulo 1, das heißt*

$$|x_{jk}| \leq \frac{1}{2} \quad \textit{für alle } 1 \leq j,k \leq n.$$

Satz 1.52. *Die Menge der Siegel-reduzierten Matrizen ist ein Fundamentalbereich für die Aktion von Γ_n auf $\mathbb{H}_n$ im Sinne von Definition 1.28 und wird auch der **Siegel'sche Fundamentalbereich** $\mathcal{F}_n$ der Modulgruppe Γ_n genannt.*

Wie im letzten Unterabschnitt werden wir wieder die Beweise für die vier zu überprüfenden Eigenschaften 1.28 (i)-(iv) einzeln führen. Eigenschaft 1.28 (i), also die Abgeschlossenheit von $\mathcal{F}_n$ in $\mathbb{H}_n$, ist hierbei trivialerweise korrekt, da $\mathcal{F}_n$ in $\mathbb{H}_n$ durch abgeschlossene Bedingungen definiert ist.

Bevor wir nun die übrigen Eigenschaften überprüfen, zeigen wir, dass $\mathcal{F}_n$ auch als Teilmenge von $\mathrm{Symm}_n(\mathbb{C})$ abgeschlossen ist; dies benötigen wir später im Beweis von Lemma 2.26. Hierfür schätzen wir zunächst die Imaginärteile von Matrizen in $\mathcal{F}_n$ nach unten ab.

Lemma 1.53. *Es gibt eine nur von n abhängige Zahl $\varepsilon_n > 0$, so dass jedes $z = x + iy \in \mathcal{F}_n$ die Ungleichung $y \geq \varepsilon_n 1_n$ erfüllt.*

Beweis. Nach Bedingung 1.51 (ii) ist y Minkowski-reduziert, so dass wir Korollar 1.48 anwenden dürfen; es gilt also $y \geq d_n \cdot \mathrm{diag}(y_{11}, \dots, y_{nn})$. Andererseits gilt auch

$$y_{jj} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n, \tag{1.19}$$

denn: Für eine Elementarmatrix e_{jj} wie in Proposition 1.9 ist

$$\begin{pmatrix} 1 - e_{jj} & e_{jj} \\ -e_{jj} & 1 - e_{jj} \end{pmatrix}$$

symplektisch. Nach Bedingung 1.51 (i) gilt daher

$$1 \leq |\det(-e_{jj}z + (1 - e_{jj}))| = |x_{jj} + iy_{jj}|.$$

Wegen Bedingung 1.51 (iii) ist $|x_{jj}| \leq \frac{1}{2}$, woraus sofort die Behauptung folgt. #

Das Lemma folgt mit $\varepsilon_n = \frac{\sqrt{3} \cdot d_n}{2}$. □

Proposition 1.54. *$\mathcal{F}_n$ ist abgeschlossen in* $\mathrm{Symm}_n(\mathbb{C})$.

Beweis. Die Menge $\mathcal{F}_n$ liegt in einem ***vertikalen Streifen positiver Höhe*** d

$$V_n(d) := \{z = x + iy \in \mathbb{H}_n \mid \mathrm{tr}(x^2) \leq d^{-1},\ y \geq d1_n\},$$

denn: Für ein beliebiges $z = x + iy \in \mathcal{F}_n$ sind nach Bedingung 1.51 (iii) die Einträge von x betragsmäßig durch $\frac{1}{2}$ beschränkt. Es gilt daher

$$\mathrm{tr}(x^2) = \sum_{j,k=1}^{n} x_{jk}^2 \leq \sum_{j,k=1}^{n} \frac{1}{4} = \frac{n^2}{4}.$$

Nach Lemma 1.53 gilt weiterhin $y \geq \varepsilon_n 1_n$ für ein geeignetes ε_n, das nur von n abhängt. Die Behauptung folgt nun mit $d := \min\{\varepsilon_n, \frac{4}{n^2}\}$. #

Da $\mathcal{F}_n$ durch abgeschlossene Bedingungen als Teilmenge des in $\mathrm{Symm}_n(\mathbb{C})$ abgeschlossenen Bereichs $V_n(d)$ definiert ist, ist damit auch die Proposition gezeigt. □

Wir wollen nun als nächstes Eigenschaft 1.28 (ii) zeigen, dass es also für alle $z \in \mathbb{H}_n$ ein $M \in \Gamma_n$ gibt mit $M\langle z\rangle \in \mathcal{F}_n$. Dafür führen wir, wie zu Beginn des Abschnitts angedeutet, einen Höhenbegriff für Matrizen in $\mathbb{H}_n$ ein und zeigen, dass jede Γ_n-Bahn ein Element maximaler Höhe enthält.

Für eine beliebige Matrix $z = x + iy \in \mathbb{H}_n$ nennen wir $h(z) := \det(y) > 0$ ihre ***Höhe***. Für jedes $M \in \Gamma_n$ gilt

$$h(M\langle z\rangle) \overset{(1.11)}{=} \det\left({}^t(cz+d)^{-1} \cdot \mathrm{Im}(z) \cdot \overline{(cz+d)}^{-1}\right) = |\det(cz+d)|^{-2} \cdot h(z). \tag{1.20}$$

Offensichtlich erfüllt also ein Punkt $z \in \mathbb{H}_n$ Bedingung 1.51 (i) genau dann, wenn er unter allen Punkten seiner Γ_n-Bahn maximale Höhe hat. Durch Einsetzen in (1.20) sehen wir außerdem, dass sich die Höhe eines Punktes $z \in \mathbb{H}_n$ nicht durch Transformationen vom Typ

$$\begin{aligned} z &\mapsto z[u] && \text{für ein } u \in U_n, \\ z &\mapsto z + b && \text{für ein } b \in \mathrm{Symm}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

ändert. Da sich die Bedingungen 1.51 (ii) und (iii) auf diese Weise erzwingen lassen, genügt es zum Beweis von Eigenschaft 1.28 (ii) zu zeigen, dass in jeder Γ_n-Bahn auch tatsächlich ein Punkt mit maximaler Höhe liegt. Das ergibt sich mit dem folgenden

Lemma 1.55. *Für feste $z = x + iy \in \mathbb{H}_n$ und $\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele Zahlen h_0 mit*

(i) $h_0 \geq \varepsilon$,

(ii) $h_0 = h(M\langle z\rangle)$ *für ein* $M \in \Gamma_n$.

Beweis. Sei $h_0 = h(M\langle z\rangle) \geq \varepsilon$ für ein $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_n$. Da die Höhe unter $M\langle z\rangle \mapsto M\langle z\rangle[u]$ mit $u \in U_n$ invariant bleibt, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\mathrm{Im}(M\langle z\rangle)^{-1}$ Minkowski-reduziert ist. Wenn wir nun die Diagonalelemente von $\mathrm{Im}(M\langle z\rangle)^{-1}$ mit $r_1, \ldots, r_n$ bezeichnen, dann gilt mit der Minkowski-Ungleichung 1.47 (d)

$$r_1 \cdot \ldots \cdot r_n \leq c_n \cdot \det\bigl(\mathrm{Im}(M\langle z\rangle)\bigr)^{-1} \leq c_n \cdot \varepsilon^{-1}. \tag{1.21}$$

Andererseits ist

$$\mathrm{Im}(M\langle z\rangle)^{-1} \overset{(1.11)}{=} (c(x-iy)+d) \cdot y^{-1} \cdot {}^t(c(x+iy)+d) = y^{-1}[{}^t(cx+d)] + y[{}^tc],$$

so dass für einen Diagonaleintrag r_j mit $1 \leq j \leq n$

$$r_j = y^{-1}[{}^tx^t(s_j(c)) + {}^t(s_j(d))] + y[{}^t(s_j(c))] \tag{1.22}$$

gilt, wobei $s_j(c)$ bzw. $s_j(d)$ die j-te Zeile der Matrix c bzw. d bezeichne. Es gibt dann für die Diagonaleinträge r_j eine positive untere Schranke, die nicht von c und d abhängt,

denn: Mit y ist auch y^{-1} symmetrisch und positiv definit. Nach (1.22) ist also r_j die Summe der zwei nichtnegativen reellen Zahlen $y^{-1}[{}^tx^t(s_j(c)) + {}^t(s_j(d))]$ und $y[{}^t(s_j(c))]$. Da $(s_j(c)\ s_j(d))$ eine Zeile einer invertierbaren Matrix ist, können $s_j(c)$ und $s_j(d)$ nicht beide verschwinden, so dass mindestens eine der beiden Zahlen echt positiv sein muss. Die Behauptung folgt mit der Ganzzahligkeit der Einträge von $(s_j(c)\ s_j(d))$. #

Deshalb und wegen der Beschränktheit des Produkts der Diagonaleinträge nach oben, die wir schon in (1.21) eingesehen hatten, ist jedes einzelne r_j sowohl nach unten als auch nach oben durch eine von c und d unabhängige Konstante beschränkt. Damit gibt es für jedes feste j nach Abgleich mit (1.22) nur endlich viele mögliche Wahlen für die Vektoren $s_j(c)$ und $s_j(d)$, so dass insgesamt c und d je eine endliche Menge durchlaufen. Nach Definition der Höhe ist somit das Lemma bewiesen. □

Wir müssen nun Eigenschaft 1.28 (iii) beweisen, also

Lemma 1.56. $\#\{M \in \Gamma_n \mid M\langle \mathcal{F}_n\rangle \cap \mathcal{F}_n \neq \emptyset\} < \infty$.

Beweis. Die Idee des Beweises ist, die Behauptung in die entsprechende Aussage im Raum $\mathbb{P}_{2n}$ zu übersetzen und die Ergebnisse der Minkowski'schen Reduktionstheorie anzuwenden. Sei dafür $z = x + iy$ eine Matrix aus $\mathbb{H}_n$. Dann ist durch

$$\varphi : z = x + iy \mapsto Z := \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

eine Bijektion von $\mathbb{H}_n$ in den Raum $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})_{>0}$ der symmetrischen, positiv definiten Elemente von $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ gegeben,

denn: Zunächst einmal liegt für jedes $z \in \mathbb{H}_n$ ihr Bild tatsächlich in $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})_{>0}$, denn die Symplektizität ist klar und die Symmetrie und die positive Definitheit von Z folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von y.

Die Injektivität von φ ist offensichtlich. Wir müssen also noch die Surjektivität zeigen. Sei dafür $Z \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})_{>0}$ beliebig. Dann sind a_Z und d_Z symmetrisch und positiv definit, und es gilt $c_Z = {}^t b_Z$. Daher können wir Z umformen zu

$$Z = \begin{pmatrix} a_Z & 0 \\ 0 & d_Z - a_Z^{-1}[b_Z] \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & a_Z^{-1} b_Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right];$$

das rechnet man von rechts nach links leicht nach. Da Z symplektisch ist, ist $a_Z^{-1} b_Z$ symmetrisch, und es gilt

$$d_Z - a_Z^{-1}[b_Z] = d_Z - {}^t b_Z {}^t(a_Z^{-1} b_Z) = d_Z {}^t a_Z {}^t a_Z^{-1} - c_Z {}^t b_Z {}^t a_Z^{-1} = {}^t(a_Z {}^t d_Z - b_Z {}^t c_Z) {}^t a_Z^{-1} = {}^t a_Z^{-1} = a_Z^{-1}.$$

Mit

$$-a_Z^{-1} b_Z + i a_Z^{-1}$$

ist also ein Urbild von Z gefunden, und die Zuordnung ist surjektiv. #

Die Gruppenoperation von $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}_n$ übersetzt sich unter φ wie folgt:

$$\varphi(M\langle z \rangle) = \varphi(z)[M^{-1}] \quad \text{für alle } M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}), \tag{1.23}$$

denn: Es genügt, die Aussage für M aus einem Erzeugendensystem von $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ zu überprüfen, denn wenn zwei Matrizen $M, \tilde{M} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ sie erfüllen, so gilt sie auch für ihr Produkt:

$$\varphi((M\tilde{M})\langle z \rangle) = \varphi(M\langle \tilde{M}\langle z \rangle \rangle) = \varphi(\tilde{M}\langle z \rangle)[M^{-1}] = \big(\varphi(z)[\tilde{M}^{-1}]\big)[M^{-1}] = \varphi(z)[(M\tilde{M})^{-1}].$$

Als Erzeugendensystem wählen wir wie in Satz 1.7 die Menge $\{S\} \cup \{T_b \mid b \in \mathrm{Symm}_n(\mathbb{R})\}$. Leicht nachzurechnen ist

$$\begin{aligned} \varphi(T_b\langle z \rangle) &= \varphi(z+b) = \varphi((x+b)+iy) \\ &= \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -(x+b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right] \\ &= \varphi(z)[T_b^{-1}]. \end{aligned}$$

Das Überprüfen der Behauptung für S ist schwerer. Nach (1.11) und wegen der Symmetrie von z gilt

$$\mathrm{Im}(S\langle z \rangle) = z^{-1} y \bar{z}^{-1} \quad \text{und} \quad \mathrm{Re}(S\langle z \rangle) = S\langle z \rangle - i\,\mathrm{Im}(S\langle z \rangle) = -z^{-1} - i z^{-1} y \bar{z}^{-1}.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \varphi(S\langle z \rangle) &= \begin{pmatrix} \bar{z} y^{-1} z & 0 \\ 0 & z^{-1} y \bar{z}^{-1} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & z^{-1} + i z^{-1} y \bar{z}^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} \bar{z} y^{-1} z & \bar{z} y^{-1} + i\,1_n \\ z^{-1} \bar{z} y^{-1} z + i \bar{z}^{-1} y z^{-1} \bar{z} y^{-1} z & z^{-1} \bar{z} y^{-1} + i \bar{z}^{-1} y z^{-1} \bar{z} y^{-1} + i z^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies können wir vereinfachen, wenn wir mit der Symmetrie von $\varphi(S\langle z\rangle)$ argumentieren, dass $\bar{z}y^{-1} + i\,1_n$ und $z^{-1}\bar{z}y^{-1}z + i\bar{z}^{-1}yz^{-1}\bar{z}y^{-1}z$ zueinander transponiert sind, und dies an zwei Stellen einsetzen. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
\varphi(S\langle z\rangle) &= \begin{pmatrix} \bar{z}y^{-1}z & \bar{z}y^{-1} + i\,1_n \\ {}^t(\bar{z}y^{-1} + i\,1_n) & {}^t(\bar{z}y^{-1} + i\,1_n)z^{-1} + iz^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} xy^{-1}x + y & xy^{-1} \\ y^{-1}x & y^{-1}xz^{-1} + iz^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} xy^{-1}x + y & xy^{-1} \\ y^{-1}x & y^{-1}(x+iy)z^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \left[S^{-1} \right] \\
&= \varphi(z)[S^{-1}].
\end{aligned}$$

#

Bezeichne w die Matrix

$$w = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn y die Jacobizerlegung $y = d[b]$ mit einer Diagonalmatrix d und einer unipotenten oberen Dreiecksmatrix b hat, so ist auch

$$\begin{aligned}
\varphi(z) \left[\begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} d^{-1}[{}^tb^{-1}] & 0 \\ 0 & d[b] \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} w & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} {}^tb^{-1} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} {}^tb^{-1}w & -{}^tb^{-1}x \\ 0 & b \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} d^{-1}[w] & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} w{}^tb^{-1}w & -w{}^tb^{-1}x \\ 0 & b \end{pmatrix} \right]
\end{aligned} \tag{1.24}$$

wieder eine Jacobizerlegung.

Sei nun z eine Siegel-reduzierte Matrix. Dann gibt es ein $t > 0$, das nur von n abhängt, mit

$$\varphi(z) \left[\begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \in \mathcal{R}_{2n}(t) \tag{1.25}$$

mit

$$\mathcal{R}_n(t) := \{ y = d[b] \in \mathbb{P}_n \mid d_{jj} < t d_{j+1,j+1},\ |b_{jk}| < t \text{ für alle } 1 \le j \le k \le n \}, \tag{1.26}$$

denn: Die Einträge von w sind trivialerweise durch 1 beschränkt, die von x nach Definition durch $\frac{1}{2}$ und die von b nach Korollar 1.48 durch eine Konstante, die nur von n abhängt. Damit ist die Bedingung an die Einträge von b aus (1.26) für die obere Dreiecksmatrix rechts in (1.24) erfüllt.

Die Diagonalmatrix rechts in (1.24) hat als Einträge die Zahlen $d_{nn}^{-1}, \ldots, d_{11}^{-1}, d_{11}, \ldots, d_{nn}$. Da wir $z \in \mathcal{F}_n$ angenommen haben, wissen wir, dass dies mit der möglichen Ausnahme der n-ten Stelle eine monoton wachsende Folge ist. Aber nach (1.19) gilt $d_{11} = y_{11} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ und deshalb $d_{11}^{-1} \leq \frac{4}{3} d_{11}$, so dass für diese Diagonalmatrix die Bedingung an die Einträge von d aus (1.26) erfüllt ist. #

Wir haben das Lemma mit (1.23) und (1.25) auf Lemma 1.50 aus der Minkowski-Reduktionstheorie für $\mathcal{R}_n(t)$ statt für $\mathcal{R}_n$ zurückgeführt. In Übungsaufgabe 1.5 sehen wir ein, dass die im Beweis dort benötigten Eigenschaften von $\mathcal{R}_n$ problemlos durch diejenigen von $\mathcal{R}_n(t)$ ersetzt werden können. □

Zuletzt wollen wir Eigenschaft 1.28 (iv) zeigen, dass also für je zwei Punkte $z, w \in \mathring{\mathcal{F}}_n$ nur dann über $w = M\langle z \rangle$ miteinander verbunden sein können, wenn schon $M \in \{\pm 1_{2n}\}$ gilt. Wir zeigen etwas mehr, nämlich

Lemma 1.57. *Seien $z, w \in \mathcal{F}_n$ mit $w = M\langle z \rangle$ für ein $M \neq \pm 1_{2n} \in \Gamma_n$. Dann liegen z und w in $\partial \mathcal{F}_n$.*

Beweis. Es genügt offenbar $z \in \partial \mathcal{F}_n$ zu zeigen. Die Argumentation für w ist die allerselbe.

Da z und w in derselben Γ_n-Bahn liegen und beide maximale Höhe haben, gilt

$$|\det(c_M z + d_M)| = 1.$$

Daraus folgt, dass $z \in \partial \mathcal{F}_n$ oder $c_M = 0$ gilt,

denn: Im Fall $z \in \mathring{\mathcal{F}}_n$ gäbe es für alle $j \leq k \in \{1, \ldots, n\}$ ein $r > 0$ mit $z + a_{jk} e_{jk} \in \mathcal{F}_n$ für alle $a_{jk} \in U_r(0)$, wobei e_{jk} die Elementarmatrizen wie in Proposition 1.9 bezeichne. Auf diese Weise könnten wir $\det(c_M z + d_M)$ als holomorphe Abbildung in der Variablen $a_{jk} \in U_r(0)$ betrachten. Wäre zusätzlich $c_M \neq 0$, so gäbe es dabei offensichtlich eine Wahl von $j \leq k \in \{1, \ldots, n\}$, für die die zugehörige holomorphe Abbildung nicht konstant wäre und somit dem Minimumprinzip auf dem Gebiet $U_r(0)$ genügte, das besagt, dass $|\det(c_M z + d_M)|$ auf $U_r(0)$ nicht das Minimum 1 annehmen kann. Es gäbe also ein $\tilde{z} = z + \tilde{a}_{jk} e_{jk} \in \mathcal{F}_n$ mit $|\det(c_M \tilde{z} + d_M)| < 1$, was Bedingung 1.51 (i) widerspricht. #

Wir können also ohne Einschränkung $c_M = 0$ annehmen. Dann erfüllen nach (1.11) die Imaginärteile $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(z)[d_M]$ mit $d_M \in U_n$.

Fall 1: $d_M \notin \{\pm 1_n\}$. Nach Lemma 1.46 gilt dann $\mathrm{Im}(z) \in \partial \mathcal{R}_n$ und somit $z \in \partial \mathcal{F}_n$.

Fall 2: $d_M \in \{\pm 1_n\}$. Dann ist zunächst $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(z)$. Andererseits gilt $a_M = d_M$ nach (1.2) und wegen $M \notin \{\pm 1_{2n}\}$ ist M somit eine nichttriviale Translation mit ganzzahligen Einträgen. Wegen Bedingung (1.51) (iii) folgt auch hier $z \in \partial \mathcal{F}_n$. □

Bemerkung 1.58. (a) *Man kann zeigen, dass die vertikalen Streifen $V_n(d)$ aus Proposition 1.54, und somit auch $\mathcal{F}_n$, bezüglich des in (2.17) eingeführten Maßes endliches Volumen haben. Da der Fundamentalbereich $\mathcal{F}_n$ nach Proposition 1.56 durch nur endlich viele algebraische Flächen berandet wird, ist er sogar* RIEMANN*-messbar.*[20] *Sein Volumen wurde 1943 von Carl Ludwig Siegel bestimmt und ist*

$$\operatorname{vol}(\mathcal{F}_n) = 2\pi^{-\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n} (k-1)!\,\zeta(2k), \tag{1.27}$$

wobei ζ die Riemann'sche Zetafunktion bezeichne.

(b) *Eine sehr interessante Anwendung der Ergebnisse dieses Abschnitts ist die folgende.*[21] *Zu $\mathcal{F}_n$ konstruiert man zunächst eine geeignete Kompaktifizierung, die* SATAKE*-Kompaktifizierung,*[22] *und versieht diese anschließend mit einer Struktur als projektive algebraische Varietät. Auf diese Weise kann man starke Sätze aus der algebraischen Geometrie verwenden, um Aussagen über den Vektorraum der Siegel'schen Modulformen zu treffen. Wir werden dies jedoch in dieser Vorlesung nicht weiter verfolgen und den Vektorraum der Siegel'schen Modulformen ausschließlich mit analytischen Methoden studieren.*

Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1. *Eine reelle Matrix heißt* ***projektiv rational****, wenn es ein $r \in \mathbb{R}^\times$ gibt, für das die Einträge von ra alle rational sind. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.*

(a) *Zu jeder projektiv rationalen Matrix $a \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt es eine Matrix $u \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, für die ua eine obere Dreiecksmatrix ist.*

Hinweis: *Benutzen Sie (1.5).*

(b) *Zu jeder projektiv rationalen Matrix $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ gibt es eine Matrix $N \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$, für die $c_{NM} = 0$ gilt und a_{NM} eine obere Dreiecksmatrix ist.*

Hinweis: *Benutzen Sie (1.7).*

Aufgabe 1.2. *Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ heißt zu Γ_n* ***kommensurabel****, wenn der Durchschnitt $\Gamma \cap \Gamma_n$ sowohl in Γ als auch in Γ_n endlichen Index hat. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.*

(a) *Jede zu Γ_n kommensurable Gruppe ist diskret in $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, operiert nach Satz 1.26 also eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{H}_n$.*

(b) *Für ein beliebiges $N \in \mathbb{N}$ ist der Kern der kanonischen Projektion*

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$$

eine zu Γ_n kommensurable Gruppe. Sie heißt die ***Hauptkongruenzuntergruppe*** *$\Gamma_n(N)$ von* ***Stufe*** *N.*

[20] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)
[21] Nachzulesen beispielsweise in Kapitel II von [Fre2]
[22] Ichirō Satake (1927-2014)

(c) *Für $N \geq 3$ hat jedes $M \in \Gamma_n(N) \smallsetminus \{\pm 1_{2n}\}$ unendliche Ordnung.*

Aufgabe 1.3. *Zeigen Sie für $n \geq 1$*

$$\{a \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid ay = ya \text{ für alle symmetrischen positiv definiten } y \in \mathbb{R}^{n \times n}\} = \{r1_n \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 1.4. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Zwei Matrizen $y, \tilde{y} \in \mathbb{P}_n$ heißen **unimodular äquivalent**, wenn es ein $u \in U_n$ gibt mit*

$$\tilde{y} = y[u].$$

Die Äquivalenzklasse von $y \in \mathbb{P}_n$ unter dieser Relation bezeichnen wir mit $y[U_n]$. Zeigen Sie, dass die Anzahl

$$h_{n,d} := \#\{y[U_n] \mid y \in \mathbb{P}_n \cap \mathbb{Z}^{n \times n} \text{ und } \det(y) = d\}$$

für alle $d \in \mathbb{N}$ endlich ist.

Aufgabe 1.5. *Für $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $\mathcal{R}_n(t)$ wie in (1.26) gegeben und $\mathcal{R}_n[t]$ als die Menge aller $y \in \mathbb{P}_n$ mit*

(i) $y_{jj} < t y_{j+1,j+1}$ *für alle* $1 \leq j < n$,

(ii) $|y_{jk}| < t y_{kk}$ *für alle* $1 \leq j < k \leq n$,

(iii) $\prod_{j=1}^{n} y_{jj} < t \det y$

definiert. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) *Es gibt eine nur von n und t abhängige Konstante $d_{n,t} > 0$, so dass für alle $\mathcal{R}_n(t)$ die folgenden Ungleichungen gelten.*

(α) $d_{n,t} y_{jj} < d_j < d_{n,t}^{-1} y_{jj}$ *für alle* $1 \leq j \leq n$,

(β) $d_{n,t} d < y < d_{n,t}^{-1} d$.

Hinweis: *Vergleichen Sie mit dem Beweis von Korollar 1.48.*

(b) *Es gibt eine von n und t abhängige Konstante $\tilde{t} \in \mathbb{R}_{>0}$ mit*

$$\mathcal{R}_n(t) \subseteq \mathcal{R}_n[\tilde{t}].$$

(c) *Für beliebige $y \in \mathcal{R}_n[t]$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $y_1^{(j)} \in \mathcal{R}_j[t]$ und $y_4^{(j)} \in \mathcal{R}_{n-j}[t]$.*

Hinweis: *Führen Sie eine Zerlegung wie in (1.13) durch und benutzen Sie, wie im Beweis der Hadamard-Ungleichung 1.31 gezeigt, $y_{jj} > d_j$ für alle $y = d[b] \in \mathbb{P}_n$.*

(d) *Es gibt eine nur von n und t abhängige Konstante $\tilde{t} \in \mathbb{R}_{>0}$ mit*

$$\mathcal{R}_n[t] \subseteq \mathcal{R}_n(\tilde{t}).$$

(e) *Sei $g \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ eine Matrix mit $0 < |\det(g)| \leq t \in \mathbb{R}_{>0}$, für die es zwei Matrizen $y, \tilde{y} \in \mathcal{R}_n(t)$ gebe mit $\tilde{y} = y[g]$. Vervollständigen Sie den Beweis von Lemma 1.56, indem Sie zeigen, dass dann die Einträge von g durch eine Konstante beschränkt sind, die nur von n und t abhängt.*

KAPITEL 2

Siegel'sche Modulformen

Wir wollen in diesem Kapitel Modulformen zur Modulgruppe Γ_n für beliebiges und für den Rest des Kapitels festes $n \in \mathbb{N}$ einführen. Wie schon für $n = 1$ sollen Modulformen insbesondere holomorphe Funktionen auf $\mathbb{H}_n$ sein. Wir werden daher zunächst in Abschnitt 2.1 einen Holomorphiebegriff auf offenen Teilmengen $D \subseteq \mathbb{C}^n$ einführen und studieren.

2.1 Holomorphe Funktionen mehrerer Variabler

Analog zum Begriff der (totalen) reellen Differenzierbarkeit auf offenen Teilmengen in $\mathbb{R}^n$ definieren wir

Definition 2.1. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}^n$ offen. Dann heißt eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ **holomorph**, wenn es zu jedem $z_0 \in D$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $L^{(z_0)}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ gibt mit*

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - L^{(z_0)}(h)}{\|h\|} \right) = 0.$$

Dies ist im Allgemeinen schwer zu überprüfen; angenehmer ist das folgende Kriterium.

Lemma 2.2. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}^n$ offen. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn sie stetig und bezüglich jeder Variablen separat holomorph ist.*

Beweis. Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann folgt wie in der reellen Analysis, dass f auf D stetig ist und für jedes $1 \leq j \leq n$ die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial z_j}$ existiert, so dass f als Funktion in z_j holomorph ist.

Sei andersherum $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die in jeder der Variablen $z_1, \dots, z_n$ separat holomorph ist. Dann zeigen die Cauchy'schen Integralformeln für

$$z_j \mapsto \frac{\partial f}{\partial z_j}(\dots, z_j, \dots)$$

zusammen mit der Stetigkeit von f auf D, dass alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial z_j}$ auf D stetig sind. Mit dem selben Argument wie in der reellen Analysis folgt dann die Holomorphie von f. □

Bemerkung 2.3. *Nach dem Satz von* HARTOGS[23] *ist die Forderung der Stetigkeit in Lemma 2.2 unnötig.*

Im Rest dieses Abschnitts wollen wir noch einige leichten Eigenschaften auf $D \subseteq \mathbb{C}^n$ holomorpher Funktionen festhalten. Unmittelbar aus den bekannten Rechenregeln im Fall $n = 1$ folgt etwa, dass die Menge der holomorphen Funktionen $f\colon D \to \mathbb{C}$ die Struktur einer $\mathbb{C}$-Algebra trägt. Zudem gelten die folgenden, aus der Funktionentheorie einer Veränderlichen bekannten Resultate.

Satz 2.4 (Identitätssatz)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Stimmen zwei holomorphe Funktionen $f\colon D \to \mathbb{C}$ und $g\colon D \to \mathbb{C}$ auf einer nichtleeren offenen Teilmenge von D überein, so auch auf ganz D.*

Beweis. Es gibt eine größte offene Teilmenge $U \subseteq D$, auf der f mit g übereinstimmt. Nehmen wir nun an, U wäre von D verschieden. Da D zusammenhängt, gäbe es dann einen Randpunkt $a \in \partial U \cap D$. Zum Beweis des Identitätssatzes genügt es nun zu zeigen, dass dann die Funktionen f und g für jedes solche a auf einer geeigneten offenen Teilmenge $a \in (D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n) \subseteq D$ mit Gebieten $D_j \subseteq \mathbb{C}$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ übereinstimmten, da dann die Maximalität von U verletzt wäre. Das wäre aber tatsächlich der Fall,

denn: Gegeben sei eine offene Teilmenge $a \in (D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n) \subseteq D$ mit Gebieten $D_j \subseteq \mathbb{C}$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$. Nach Konstruktion gäbe es dann für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ eine offene Teilmenge $U_j \subseteq D_j$, für die f und g bereits auf $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ übereinstimmten. Betrachten wir nun f und g für ein beliebiges aber festes $(b_2, b_3, \ldots, b_n)$ in $U_2 \times U_3 \times \ldots \times U_n$ als Funktionen in $z_1 \in D_1$, so lieferte der Identitätssatz für $n = 1$ die Identität

$$f(z_1, b_2, \ldots, b_n) = g(z_1, b_2, \ldots, b_n) \quad \text{für alle } z_1 \in D_1$$

und somit

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = g(z_1, z_2, \ldots, z_n) \quad \text{für alle } (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in D_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n.$$

Die Behauptung folgt durch sukzessives Anwenden des Identitätssatzes für $n = 1$ in den Variablen z_j mit $j \in \{1, \ldots, n\}$. #

□

Satz 2.5 (Maximum- und Minimumprinzip)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die auf D nicht konstant ist. Dann gilt*

(a) *Die Funktion f hat auf D kein lokales Betragsmaximum.*

(b) *Besitzt f in $a \in D$ ein lokales Betragsminimum, so gilt $f(a) = 0$.*

[23]Friedrich Moritz Hartogs (1874-1943)

Beweis. Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph, und sei $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ ein Punkt, in dem f ein lokales Betragsmaximum annimmt. Betrachten wir nun den offenen ***Polyzylinder***

$$U := U_{r_1}(a_1) \times U_{r_2}(a_2) \times \ldots \times U_{r_n}(a_n) \quad \text{mit } r_j \in \mathbb{R}_{>0} \text{ für alle } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Dieser ist offen, enthält offensichtlich den Punkt a und liegt für hinreichend kleine r_j ganz in D. Ohne Einschränkung können wir zudem annehmen, die r_j seien so klein, dass f in keinem Punkt von U einen größeren Funktionswert annimmt als $f(a)$. Wir können nun das Maximumprinzip für $n = 1$ sukzessive in den einzelnen Komponenten von U anwenden und erhalten bei Variation nur einer Komponente die Konstanz der Funktionswerte von f. Es gilt daher für alle $b = (b_1, \ldots, b_n) \in U$

$$f(b) = f(a_1, b_2, b_3, \ldots, b_n) = f(a_1, a_2, b_3, \ldots, b_n) = \ldots = f(a).$$

Es nimmt daher die auf dem Gebiet D holomorphe Funktion f in der offenen Teilmenge $U \subseteq D$ den Funktionswert $f(a)$ an, stimmt dort also mit der konstanten Funktion $f(a)$ überein. Nach dem Identitätssatz 2.4 folgt die Konstanz von f auf D. Insgesamt haben wir so das Maximumprinzip (a) gezeigt.

Das Minimumprinzip (b) folgt analog aus dem Minimumprinzip für $n = 1$, wenn wir annehmen, f besitze in a ein lokales Betragsminimum ungleich 0. □

2.2 Der Vektorraum der Modulformen

Für ein beliebiges $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ schreiben wir kurz

$$j(M, z) := \det(c_M z + d_M).$$

Genau wie im Fall $n = 1$ zeigt man dann die ***Kozykelbedingung***

$$j(M_1 M_2, z) = j(M_1, M_2\langle z\rangle) \cdot j(M_2, z) \quad \text{für alle } M_1, M_2 \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}).$$

Definition 2.6. *Eine Funktion $f\colon \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ heißt* ***Siegel'sche Modulform von Grad*** *$n \in \mathbb{N}_0$* ***und Gewicht*** *$k \in \mathbb{Z}$, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt.*

(i) *f ist holomorph,*

(ii) *$f(z) = j(M, z)^{-k} f(M\langle z\rangle) =: (f|_k M)(z)$ für alle $M \in \Gamma_n$,*

(iii) *f ist im Siegel'schen Fundamentalbereich $\mathcal{F}_n$ beschränkt.*

Bemerkung 2.7. *Offensichtlich genügt es, Bedingung* (ii) *für ein Erzeugendensystem von Γ_n nachzuprüfen. Nach Satz 1.7 ist das*

(ii') $f(-{}^t z^{-1}) = \det(z)^k \cdot f(z)$ *und* $f(z + b) = f(z)$ *für $b \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ symmetrisch.*

Bemerkung 2.8. *Für eine Siegel'sche Modulform f von Grad $n \in \mathbb{N}_0$ und Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$f(z[u]) = j(\begin{pmatrix} {}^t u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}, z)^k \cdot f(z) = \det(u^{-1})^k \cdot f(z) = \det(u)^k \cdot f(z) \quad \textit{für alle } u \in U_n.$$

Offensichtlich bilden die Modulformen von Grad $n \in \mathbb{N}_0$ und Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ einen Vektorraum; diesen wollen wir mit M_k^n bezeichnen. Dabei setzen wir

$$M_k^0 := \begin{cases} \mathbb{C} & \text{für } k \geq 0 \\ \{0\} & \text{für } k < 0. \end{cases}$$

Bemerkung 2.9. (a) $f \in M_k^n,\ g \in M_\ell^n \implies f \cdot g \in M_{k+\ell}^n$.

(b) *Wegen* $-1_{2n} \in \Gamma_n$ *gilt für ein* $f \in M_k^n$ *insbesondere*

$$f(z) = f(-1_{2n}\langle z \rangle) = \det(-1_n)^k \cdot f(z) = (-1)^{nk} \cdot f(z).$$

Im Fall $nk \equiv 1 \bmod (2)$ *gilt also* $M_k^n = \{0\}$.

Wir wollen nun Siegel'sche Modulformen in FOURIERreihen[24] entwickeln. Dafür brauchen wir den folgenden Begriff.

Definition 2.10. *Eine symmetrische Matrix* $t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *heißt* ***halbganz****, wenn für ihre Einträge die folgenden Eigenschaften gelten.*

- $t_{jj} \in \mathbb{Z}$ *für* $1 \leq j \leq n$,
- $t_{jk} \in \frac{1}{2} \cdot \mathbb{Z}$ *für* $1 \leq j < k \leq n$.

Offensichtlich ist durch die Zuordnung

$$t \quad \mapsto \quad \mathrm{tr}(tz) = \sum_{j=1}^{n} t_{jj} z_{jj} + 2 \cdot \sum_{1 \leq j < k \leq n} t_{jk} z_{jk}$$

eine Bijektion zwischen der Menge der halbganzen Matrizen und der Menge der ganzzahligen Linearkombinationen der Variablen z_{jk} mit $1 \leq j \leq k \leq n$ gegeben.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die für alle symmetrischen Matrizen $b \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ die Bedingung $f(z+b) = f(z)$ erfüllt, also zum Beispiel eine Modulform von Grad n und beliebigem Gewicht k. Dann ist f 1-periodisch in Variablen z_{jk} mit $1 \leq j \leq k \leq n$ und lässt in all diesen Variablen eine Fourierentwicklung zu. Da die möglichen ganzzahligen Linearkombinationen der Variablen z_{jk} mit $1 \leq j \leq k \leq n$ gerade die Ausdrücke $\mathrm{tr}(tz)$ mit halbganzen Matrizen t sind, lässt also f eine Fourierentwicklung

$$f(z) = \sum_t a_t e^{2\pi i \, \mathrm{tr}(tz)} =: \sum_t a_t e_n(tz)$$

zu, wobei t über die halbganzen $(n \times n)$-Matrizen läuft. Diese ist absolut gleichmäßig konvergent auf Kompakta in $\mathbb{H}_n$, und es gilt die Formel

$$a_t = \int_{x \bmod (1)} f(z) e_n(-tz) \, \mathrm{d}x, \tag{2.1}$$

wobei $\mathrm{d}x := \prod_{j \leq k} \mathrm{d}x_{jk}$ das euklidische Volumenelement in $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ bezeichne.

[24] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Proposition 2.11. $M_k^n = \{0\}$ *für* $k < 0$.

Beweis. Nach Definition ist jedes $f \in M_k^n$ im Siegel'schen Fundamentalbereich $\mathcal{F}_n$ beschränkt. Im Fall $k < 0$ gilt dies dort aber auch für $\det(\operatorname{Im}(z))^{\frac{k}{2}}$,

denn: Nach Lemma 1.53 gibt es ein $\varepsilon_n > 0$ mit $y \geq \varepsilon_n 1_n$ für alle $z = x + iy \in \mathcal{F}_n$. Damit sind alle Eigenwerte von y größer oder gleich ε_n; es folgt

$$\det(y) = \prod_{\substack{\lambda \text{ Eigenwert} \\ \text{von } y}} \lambda \geq \varepsilon_n^n > 0$$

und wegen $k < 0$ auch

$$|\det(y)^{\frac{k}{2}}| = \det(y)^{\frac{k}{2}} \leq \varepsilon_n^{\frac{nk}{2}},$$

was die Behauptung zeigt. #

Weiter ist nach (1.20) und der Modularität von f der Term

$$\det(y)^{\frac{k}{2}} \cdot |f(z)|$$

invariant unter Γ_n und somit nach dem Obigen auf ganz $\mathbb{H}_n$ durch eine Konstante $c > 0$ beschränkt. Für die Fourierkoeffizienten von f gilt nach (2.1)

$$a_t = \int_{x \bmod (1)} f(z) e_n(-tz)\, \mathrm{d}x = e^{2\pi \operatorname{tr}(ty)} \int_{x \bmod (1)} f(z) e_n(-tx)\, \mathrm{d}x,$$

also

$$|a_t| \leq e^{2\pi \operatorname{tr}(ty)} \int_{x \bmod (1)} |f(z)|\, \mathrm{d}x \leq e^{2\pi \operatorname{tr}(ty)} \cdot \sup_{x \bmod (1)} |f(z)| \leq c \cdot e^{2\pi \operatorname{tr}(ty)} \det(y)^{-\frac{k}{2}}.$$

Dies gilt nicht nur für y sondern analog auch für alle εy mit $\varepsilon > 0$. Im Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ folgt $a_t = 0$. □

Lemma 2.12. *Sei* $f \colon \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ *eine holomorphe Funktion mit*

- $f(z + b) = f(z)$ *für* $b \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ *symmetrisch,*
- $f(z[u]) = \det(u)^k \cdot f(z)$ *für alle* $u \in U_n$ *und ein festes* $k \in \mathbb{Z}$.

Dann besitzen die Fourierkoeffizienten von $f(z) = \sum_t a_t e_n(tz)$ *das Transformationsverhalten*

$$a_{t[u]} = \det(u)^k \cdot a_t \quad \text{für alle } u \in U_n.$$

Beweis. Es gilt

$$\det(u)^k \cdot f(z) = f(z[u]) = \sum_t a_t e_n(tz[u]) = \sum_t a_t e_n(t[{}^t u] z),$$

wobei wir für die letzte Gleichheit die Konjugationsinvarianz der Spur ausgenutzt haben. Nun durchläuft mit t auch $t[{}^tu]$ alle halbganzen Matrizen. Nach der entsprechenden Substitution erhalten wir

$$\sum_t (\det(u)^k a_t) e_n(tz) = \det(u)^k \cdot f(z) = \sum_t a_{t[{}^tu^{-1}]} e_n(tz).$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Fourierentwicklung und wegen $\det(u) = \det({}^tu^{-1})$ folgt die Behauptung. □

Wir benutzen Lemma 2.12 nun, um zu zeigen, dass für $n \geq 2$ die Beschränktheit einer Modulform vom Grad n in $\mathcal{F}_n$ bereits aus den anderen Bedingungen der Definition folgt.

Satz 2.13 (KOECHER-Prinzip[25]). *Sei $n \geq 2$ und $f\colon \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit*

- *$f(z+b) = f(z)$ für $b \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ symmetrisch,*
- *$f(z[u]) = \det(u)^k \cdot f(z)$ für alle $u \in U_n$.*

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(a) *Die Fourierentwicklung von f hat die Gestalt*

$$f(z) = \sum_{t\in\Lambda_n} a_t e_n(tz),$$

wobei Λ_n die Menge der positiv semidefiniten halbganzen $(n \times n)$-Matrizen bezeichne.

(b) *f ist in Bereichen der Art $\mathrm{Im}(z) \geq c\,1_n > 0$ beschränkt.*

(c) *f ist im Siegel'schen Fundamentalbereich $\mathcal{F}_n$ beschränkt.*

Beweis. Die Fourierentwicklung $f(z) = \sum_t a_t e_n(tz)$ konvergiert in $z = i\,1_n$, so dass es ein $r > 0$ gibt mit

$$|a_t| \leq r \cdot e^{2\pi\,\mathrm{tr}(t)} \quad \text{für alle halbganzen } t. \tag{2.2}$$

Wir wollen nun zeigen, dass für $t \not\geq 0$ der zugehörige Fourierkoeffizient a_t immer verschwindet. Sei also t eine nicht positiv semidefinite halbganze Matrix. Ohne Einschränkung ist dann der erste Diagonaleintrag t_{11} von t negativ,

denn: Es gibt ein $v \in \mathbb{Z}^n$ mit teilerfremden Einträgen, so dass $t[v] < 0$ gilt. v kann zu einer unimodularen Matrix u vervollständigt werden, die v als erste Spalte enthält. Wegen Lemma 2.12 können wir ohne Einschränkung t durch $t[u]$ ersetzen, was die Behauptung zeigt. #

Betrachten wir nun die Matrix

$$u = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 1_{n-2} \end{pmatrix} \in U_n.$$

[25] Max Koecher (1924-1990)

Mit Lemma 2.12 und (2.2) gilt

$$|a_t| = |a_{t[u]}| \leq r \cdot e^{2\pi \operatorname{tr}(t[u])} = r \cdot e^{2\pi(\operatorname{tr}(t)+t_{11}b^2+2t_{12}b)}.$$

Wegen $t_{11} < 0$ geht das für $b \to \infty$ gegen Null, so dass a_t schon selbst Null sein muss, was Aussage (a) zeigt. Offensichtlich ist die soeben benutzte Wahl von u nur für $n \geq 2$ möglich; hier geht also die Voraussetzung ein.

Für den Beweis von Aussage (b) benutzen wir die Fourierentwicklung

$$f(z) = \sum_{t \in \Lambda_n} a_t e^{2\pi i \operatorname{tr}(tz)} = \sum_{t \in \Lambda_n} a_t e^{2\pi i \operatorname{tr}(t\mathrm{Re}(z))} e^{-2\pi \operatorname{tr}(t\mathrm{Im}(z))}$$

aus Aussage (a). Für jedes $t \in \Lambda_n$ und $\mathrm{Im}(z) \geq c\, 1_n$ gilt

$$\operatorname{tr}(t\mathrm{Im}(z)) = \operatorname{tr}(t(c1_n - (\mathrm{Im}(z) - c1_n))) \geq \operatorname{tr}(ct) = c\operatorname{tr}(t) + \operatorname{tr}(t(\mathrm{Im}(z) - c1_n)).$$

Als Produkt symmetrischer und positiv semidefiniter Matrizen hat $t(\mathrm{Im}(z) - c1_n)$ nichtnegative, reelle Eigenwerte und somit eine nichtnegative Spur. Es folgt

$$\operatorname{tr}(t\mathrm{Im}(z)) \geq c\operatorname{tr}(t).$$

Im Bereich $\mathrm{Im}(z) \geq c\, 1_n$ lässt sich daher der Betrag von f abschätzen zu

$$|f(z)| \leq \sum_{t \in \Lambda_n} |a_t|\, |e^{-2\pi \operatorname{tr}(t\mathrm{Im}(z))}| \leq \sum_{t \in \Lambda_n} |a_t|\, e^{-2\pi c \operatorname{tr}(t)}.$$

Die rechte Seite ist eine innerhalb des durch $\mathrm{Im}(z) \geq c\, 1_n$ gegebenen Bereichs von z unabhängige Majorante und konvergiert, da die ursprüngliche Fourierreihe im Punkt $ic\, 1_n$ absolut konvergiert.

Aussage (c) folgt schließlich aus Aussage (b) und Lemma 1.53. □

2.3 Thetareihen

Wir wollen nun erste Beispiele für Modulformen höheren Grades kennenlernen. Das kanonische Beispiel sind die Thetareihen, die wie folgt definiert sind.

Definition 2.14. *Für $a \in \mathbb{P}_m$ heißt die Reihe*

$$\vartheta_a(z) := \vartheta_a^{(n)}(z) := \sum_{g \in \mathbb{Z}^{m \times n}} e_n(\frac{1}{2}a[g]z) \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{H}_n$$

eine ***Thetareihe****.*

Satz 2.15. *Die Reihe $\vartheta_a(z)$ konvergiert gleichmäßig absolut in Bereichen der Form $\mathrm{Im}(z) \geq y_0 > 0$ und stellt daher in $\mathbb{H}_n$ eine holomorphe Funktion dar. Bezeichne Λ_m^+ die Menge der positiv definiten Matrizen in Λ_m. Für $a \in 2\Lambda_m^+$ und $t \in \Lambda_n$ heißt dann*

$$\nu_a(t) := \left| \{g \in \mathbb{Z}^{m \times n} \mid \frac{1}{2}a[g] = t\} \right|$$

*die **Darstellungsanzahl** von t durch a. Dann ist $\nu_a(t) < \infty$, und ϑ_a hat die Fourierentwicklung*

$$\vartheta_a(z) = \sum_{t \in \Lambda_n} \nu_a(t) e_n(tz) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}_n.$$

Beweis. Für jedes $z = x + iy \in \mathbb{H}_n$ gilt

$$|e_n(\frac{1}{2}a[g]z)| = e^{-\pi \operatorname{tr}(a[g]y)}.$$

Wegen $y_0 > 0$ gibt es ein reelles $\varepsilon > 0$ mit $y > y_0 \geq \varepsilon 1_n$. Daraus folgt wie im Beweis des Koecher-Prinzips 2.13

$$e^{-\pi \operatorname{tr}(a[g]y)} \leq e^{-\pi\varepsilon \operatorname{tr}(a[g])}.$$

Es gilt $\operatorname{tr}(a[g]) = \sum_{k=1}^{n} a[g^{(k)}]$, wobei $g^{(k)}$ die k-te Spalte von g bezeichne. Daher wird für $y > y_0$ die Thetareihe ϑ_a durch

$$\left(\sum_{v \in \mathbb{Z}^m} e^{-\pi\varepsilon \operatorname{tr}(a[v])} \right)^n$$

absolut majorisiert. Die Konvergenz von ϑ_a folgt nun mit Übungsaufgabe 2.3.

In der Notation von oben folgt aus $\frac{1}{2}a[g] = t$ sofort $\frac{1}{2}a[g^{(k)}] = t_{kk}$. Wegen der positiven Definitheit von a ist jede der Mengen

$$\{v \in \mathbb{Z}^m \mid \frac{1}{2}a[v] = t_{kk}\} \quad \text{mit } 1 \leq k \leq n$$

endlich, so dass auch $\nu_a(t)$ endlich sein muss. Die Fourierentwicklung von ϑ_a folgt dann aus der absoluten Konvergenz der Reihe. □

Satz 2.16 (Thetatransformationsformeln)**.**

(a) $\vartheta_a(z + b) = \vartheta_a(z)$ *für $a \in 2\Lambda_m^+$ und $b \in \operatorname{Symm}_n(\mathbb{Z})$,*
(b) $\vartheta_a(z[u]) = \vartheta_a(z)$ *für $a \in \mathbb{P}_m$ und $u \in U_n$,*
(c) $\vartheta_{a[u]}(z) = \vartheta_a(z)$ *für $a \in \mathbb{P}_m$ und $u \in U_m$,*
(d) $\vartheta_{a^{-1}}(-z^{-1}) = \det(a)^{\frac{n}{2}} \det(\frac{z}{i})^{\frac{m}{2}} \vartheta_a(z)$ *für $a \in \mathbb{P}_m$ mit m gerade.*

Beweis. Zum Beweis von (a) betrachten wir

$$\vartheta_a(z + b) = \sum e_n(\frac{1}{2}a[g](z + b)) = \sum e_n(\frac{1}{2}a[g]z) e_n(\frac{1}{2}a[g]b) = \sum e_n(\frac{1}{2}a[g]z) = \vartheta_a(z),$$

wobei das vorletzte Gleichheitszeichen gilt, weil mit $a \in 2\Lambda_m^+$ und $b \in \operatorname{Symm}_n(\mathbb{Z})$ die Spur $\operatorname{tr}(\frac{1}{2}a[g]b)$ in $\mathbb{Z}$ liegt.

Um (b) und (c) zu beweisen benutzen wir die Konjugationsinvarianz der Spur. Es gilt

$$\begin{aligned}
\vartheta_a(z[u]) &= \sum_{g \in \mathbb{Z}^{m \times n}} e_n(\frac{1}{2}a[g]z[u]) &&= \sum_{g \in \mathbb{Z}^{m \times n}} e_n(\frac{1}{2}a[g^t u]z) &&= \sum_{g \in \mathbb{Z}^{m \times n}} e_n(\frac{1}{2}a[g]z) &&= \vartheta_a(z), \\
\vartheta_{a[u]}(z) &= \sum_{g \in \mathbb{Z}^{m \times n}} e_n(\frac{1}{2}(a[u])[g]z) &&= \sum_{g \in \mathbb{Z}^{m \times n}} e_n(\frac{1}{2}a[ug]z) &&= \sum_{g \in \mathbb{Z}^{m \times n}} e_n(\frac{1}{2}a[g]z) &&= \vartheta_a(z),
\end{aligned}$$

wobei das jeweils vorletzte Gleichheitszeichen gilt, weil mit g auch $g^t u$ bzw. ug alle Matrizen in $\mathbb{Z}^{m\times n}$ durchläuft.

Aussage (d) ist mehr Arbeit. Für festes $z \in \mathbb{H}_n$ und $w = u + iv \in \mathbb{C}^{m\times n}$ definieren wir die Reihe

$$f(w) := \sum_{g\in\mathbb{Z}^{m\times n}} e_n(\frac{1}{2}a[g+w]z).$$

Diese konvergiert genau wie ϑ_a gleichmäßig absolut auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}^{m\times n}$. Wegen $f(w+h) = f(w)$ für alle $h \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ hat f eine Fourierentwicklung

$$f(w) = \sum_{h\in\mathbb{Z}^{m\times n}} a_h e_n({}^t hw)$$

mit Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_h &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(w) e_n(-{}^t hw)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{g\in\mathbb{Z}^{m\times n}} e_n(\frac{1}{2}a[g+w]z - {}^t hw)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Wegen der absolut gleichmäßigen Konvergenz dürfen wir Integration und Summation vertauschen. Ersetzen wir dann $w \mapsto w - g$ für jedes g, so erhalten wir[26]

$$\begin{aligned} a_h &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e_n(\frac{1}{2}a[w]z - {}^t hw)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m\times n}} e_n\big(\frac{1}{2}({}^t wawz - {}^t wh - {}^t z^{-1}\,{}^t hwz)\big)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m\times n}} e_n\big(\frac{1}{2}\big(({}^t w - {}^t z^{-1}\,{}^t h\,{}^t a^{-1})a(w - a^{-1}hz^{-1})z - z^{-1}\,{}^t ha^{-1}h\big)\big)\,\mathrm{d}u \\ &= e_n(-\frac{1}{2}a^{-1}[h]z^{-1}) \int_{\mathbb{R}^{m\times n}} e_n(\frac{1}{2}a[w - a^{-1}hz^{-1}]z)\,\mathrm{d}u \\ &= e_n(-\frac{1}{2}a^{-1}[h]z^{-1}) \int_{\mathbb{R}^{m\times n}} e_n(\frac{1}{2}a[u]z)\,\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $v = \mathrm{Im}(a^{-1}hz^{-1})$ gewählt und u durch $u - \mathrm{Re}(a^{-1}hz^{-1})$ ersetzt haben. Es gilt nun weiter

$$\int_{\mathbb{R}^{m\times n}} e_n(\frac{1}{2}a[u]z)\,\mathrm{d}u = \det(a)^{-\frac{n}{2}} \det(\frac{z}{i})^{-\frac{m}{2}},$$

denn: Sei zunächst $n = 1$. Dann gibt es eine Matrix $b \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ mit $a = {}^t bb$. Nach Substitution $u \mapsto b^{-1}u$ gilt also

$$\int_{\mathbb{R}^m} e_1(\frac{1}{2}a[u]z)\,\mathrm{d}u = \det(b)^{-1} \int_{\mathbb{R}^m} e_1(\frac{1}{2}{}^t uuz)\,\mathrm{d}u = \det(a)^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i t^2 z}\,\mathrm{d}t\right)^m$$

[26]Dieses Vorgehen heißt auch der **POISSON*'sche Summationstrick***.[27]

[27]Siméon Denis Poisson (1781-1840)

Betrachten wir nun $z = iy$ auf der positiven y-Achse und substituieren wir $t \mapsto (\pi y)^{-\frac{1}{2}} t$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i t^2 z}\, \mathrm{d}t &= \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(t_1^2+t_2^2)}\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \left(2\pi \big[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \big]_0^{\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= y^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Dies können wir offensichtlich durch $(\frac{z}{i})^{-\frac{1}{2}}$ auf ganz $\mathbb{H}_1$ analytisch fortsetzen, was mit dem Identitätssatz die Behauptung für $n = 1$ zeigt.

Sei nun $n \geq 1$ beliebig und zunächst z eine Diagonalmatrix. Wenn wir $u^{(j)}$ für die j-te Spalte von u schreiben, gilt dann mit dem Fall für $n = 1$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{m\times n}} e_n(\frac{1}{2} a[u] z)\, \mathrm{d}u &= \int_{\mathbb{R}^{m\times n}} e_1(\frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{n} a[u^{(j)}] z_{jj})\, \mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m\times n}} \prod_{j=1}^{n} e_1(\frac{1}{2} a[u^{(j)}] z_{jj})\, \mathrm{d}u \\ &= \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^m} e_1(\frac{1}{2} a[u^{(j)}] z_{jj})\, \mathrm{d}u^{(j)}\end{aligned}$$

und somit die Behauptung für Diagonalmatrizen z. Daraus wollen wir nun die Behauptung für beliebiges $z \in \mathbb{H}_n$ herleiten. Nehmen wir dafür an, es gebe eine Matrix $b \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, so dass $z[b] = x[b] + iy[b]$ eine Diagonalmatrix ist. Dann gilt nach dem soeben gezeigten

$$\begin{aligned}\det(b)^{-m} \det(a)^{-\frac{n}{2}} \det(\frac{z}{i})^{-\frac{m}{2}} = \det(a)^{-\frac{n}{2}} \det(\frac{z[b]}{i})^{-\frac{m}{2}} &= \int_{\mathbb{R}^{m\times n}} e_n(\frac{1}{2} a[u] z[b])\, \mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m\times n}} e_n(\frac{1}{2} a[u^t b] z)\, \mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m\times n}} e_n(\frac{1}{2} a[u] z) d(u^t b^{-1}) \\ &= \det(b)^{-m} \int_{\mathbb{R}^{m\times n}} e_n(\frac{1}{2} a[u] z)\, \mathrm{d}u\end{aligned}$$

und somit die allgemeine Behauptung. Es verbleibt zu zeigen, dass es immer ein $b \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gibt, so dass $z[b]$ diagonal ist. Als positiv definite symmetrische Matrix hat y eine Jacobizerlegung, so dass es eine obere Dreiecksmatrix $b_{(1)}$ gibt mit $y[b_{(1)}] = 1_n$. Wir können nun

$$z[b_{(1)}] = x[b_{(1)}] + i1_n$$

schreiben mit $x[b_{(1)}] \in \mathrm{Symm}_n(\mathbb{R})$. Es gibt also weiter eine orthogonale Matrix $b_{(2)}$, so dass $x[b_{(1)}][b_{(2)}] =: d$ diagonal ist. Mit der Orthogonalität von $b_{(2)}$ folgt

$$z[b_{(1)}b_{(2)}] = d + i1_n$$

und damit die Behauptung. #

Es folgt nun

$$a_h = e_n(-\frac{1}{2}a^{-1}[h]z^{-1}) \det(a)^{-\frac{n}{2}} \det(\frac{z}{i})^{-\frac{m}{2}}$$

und somit

$$\begin{aligned}\vartheta_a(z) = f(0) = \sum_{h \in \mathbb{Z}^{m \times n}} a_h &= \det(a)^{-\frac{n}{2}} \det(\frac{z}{i})^{-\frac{m}{2}} \sum_{h \in \mathbb{Z}^{m \times n}} e_n(-\frac{1}{2}a^{-1}[h]z^{-1}) \\ &= \det(a)^{-\frac{n}{2}} \det(\frac{z}{i})^{-\frac{m}{2}} \vartheta_{a^{-1}}(-z^{-1}).\end{aligned}$$

Damit ist der Satz vollständig gezeigt. □

Die Sätze 2.15 und 2.16 legen nahe, dass es für geschickte Wahlen von m und a Thetareihen gibt, die Modulformen bezüglich der vollen Modulgruppe Γ_n sind. Das zu zeigen ist unsere nächste Aufgabe. Dafür studieren wir zunächst, wann a und a^{-1} unimodular äquivalent sind, denn wenn dies erfüllt ist, wird nach Thetatransformationsformel 2.16 (c) aus der Transformationsformel 2.16 (d) schon so etwas ähnliches wie die Invarianz unter der Operation von $S \in \Gamma_n$ via dem Strichoperator. Wegen der Transformationsformel 2.16 (a) genügt es dabei natürlich, den Fall $a \in 2\Lambda_m^+$ zu betrachten.

Lemma 2.17. *Sei $a \in 2\Lambda_m^+$. Dann gilt*

$$a \text{ und } a^{-1} \textit{ sind unimodular äquivalent} \iff \det(a) = 1.$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, es gebe eine Matrix $u \in U_m$ mit $a = a^{-1}[u]$. Dann gilt $\det(a)^2 = \det(a^{-1})^2 = 1$. Da a als positiv definit vorausgesetzt war, folgt sofort $\det(a) = 1$.

Sei umgekehrt $\det(a) = 1$. Dann ist a in $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z}) \subseteq U_m$ enthalten, und mit der Symmetrie von a gilt

$$a = {}^t a a^{-1} a,$$

so dass das Lemma gezeigt ist. □

Lemma 2.18. *Wenn es ein $a \in 2\Lambda_m^+$ mit $\det(a) = 1$ gibt, so ist notwendig schon 8 ein Teiler von m.*

Beweis. Nehmen wir dafür an, 8 teile m nicht. Indem wir gegebenenfalls a durch $\mathrm{diag}(a, a)$ oder $\mathrm{diag}(a, a, a, a)$ ersetzen, können wir ohne Einschränkung $m \equiv 4 \bmod (8)$ annehmen. Nach Voraussetzung und Lemma 2.17 sind dann a und a^{-1} unimodular äquivalent. Nach Thetatransformationsformel 2.16 (c) gilt also

$$\vartheta_{a^{-1}}^{(n)} = \vartheta_a^{(n)} \quad \text{für alle } n.$$

Betrachten wir nun für $n = 1$ die Transformationsformel 2.16 (d). Diese lautet dann

$$\vartheta_a^{(1)}(-\frac{1}{z}) = (\frac{z}{i})^{\frac{m}{2}} \vartheta_a^{(1)}(z) = -z^{\frac{m}{2}} \vartheta_a^{(1)}(z), \tag{2.3}$$

wobei wir für die letzte Gleichung $m \equiv 4 \bmod (8)$ benutzt haben.

Wir nutzen nun aus, dass für $k \in \mathbb{Z}$ der Strichoperator $|_k$ tatsächlich ein Operator ist, dass also für jede Funktion $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ die Beziehungen

$$f|_k 1_2 = f \quad \text{und} \quad (f|_k M)|_k \tilde{M} = f|_k (M\tilde{M}) \text{ für alle } M, \tilde{M} \in \Gamma_1 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

gelten. Mit $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gilt dann nach Transformationsformel 2.16 (a)

$$\left(\vartheta_a^{(1)}|_{\frac{m}{2}}(TS)\right)(z) = \left(\vartheta_a^{(1)}|_{\frac{m}{2}} S\right)(z) = z^{-\frac{m}{2}} \vartheta_a^{(1)}(-\frac{1}{z}) \overset{(2.3)}{=} -\vartheta_a^{(1)}(z).$$

Wegen $(TS)^3 = -1_2$ folgt

$$\vartheta_a^{(1)} = \vartheta_a^{(1)}|_{\frac{m}{2}}(-1_2) = (-1)^3 \vartheta_a^{(1)} = -\vartheta_a^{(1)},$$

so dass $\vartheta_a^{(1)}$ schon konstant Null sein muss. Das ist aber ein Widerspruch, denn der konstante Fourierkoeffizient

$$\nu_a(0) = \left| \{ v \in \mathbb{Z}^m \mid \frac{1}{2} a[v] = 0 \} \right|$$

ist offensichtlich 1. Daher muss m durch 8 teilbar sein, und das Lemma ist bewiesen. □

Wir können das bisherige zusammenfassen zum folgenden

Satz 2.19. *Sei $a \in 2\Lambda_m^+$ mit $\det(a) = 1$ gegeben. Dann ist 8 ein Teiler von m, und es gilt*

$$\vartheta_a^{(n)} \in M^n_{\frac{m}{2}} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Nach Satz 2.15 müssen wir nur noch die Modularität von ϑ_a zeigen.

Nach Thetatransformationsformel 2.16 (a) gilt

$$\vartheta_a^{(n)}|_{\frac{m}{2}} T_b = \vartheta_a^{(n)} \quad \text{für alle } b \in \mathrm{Symm}_n(\mathbb{Z}).$$

Nach Lemma 2.18 gilt $8 \mid m$ und somit $i^{\frac{m}{2}} = 1$. Nach Thetatransformationsformel 2.16 (d) gilt dann

$$\left(\vartheta_a^{(n)}|_{\frac{m}{2}} S\right)(z) = \det(z)^{-\frac{m}{2}} \vartheta_a^{(n)}(-z^{-1}) = \det(a)^{-\frac{n}{2}} \det(\frac{z}{i})^{-\frac{m}{2}} \vartheta_a^{(n)}(-z^{-1}) = \vartheta_a^{(n)}(z).$$

Der Satz folgt nun, da nach Satz 1.7 die angegebenen Matrizen Γ_n erzeugen, und da

$$\vartheta_a^{(n)}|_{\frac{m}{2}}(M\tilde{M}) = \left(\vartheta_a^{(n)}|_{\frac{m}{2}} M\right)|_{\frac{m}{2}} \tilde{M}$$

gilt. □

Endlich haben wir also erste Beispiele für Modulformen vom Grad $n > 1$. Allerdings haben diese den Haken, dass die Matrizen a für unsere Thetareihen einer Reihe von Bedingungen genügen müssen und es nicht klar ist, ob es solche Matrizen überhaupt gibt. Um diesen Missstand zu beheben werden wir zum Abschluss dieses Abschnitts Beispiele für passende Matrizen a angeben.

Beispiel 2.20. *Sei $m = 8k$ mit $k \in \mathbb{N}$, und sei*

$$L_m := \{v = {}^t(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{Q}^m \mid v_j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z},\ v_j - v_k \in \mathbb{Z},\ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} v_j \in \mathbb{Z} \quad \text{für alle } 1 \leq j,k \leq m\}.$$

Man kann zeigen, dass L_m ein (vollständiges) Gitter in $\mathbb{Q}^m$ ist. Schränkt man die quadratische Form

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^m &\to \mathbb{Q}, \\ v &\mapsto \textstyle\sum_{j=1}^{m} v_j^2 \end{aligned}$$

auf L_m ein, so erhält man eine quadratische Form auf L_m, deren Darstellungsmatrix $a = (\omega_j\omega_k)$ bezüglich irgendeiner Basis $\omega_1, \dots, \omega_m$ von L_m Determinante 1 hat und gerade und positiv definit ist.

Im Fall $m = 8$ können wir als Basis die Elemente

$$\frac{1}{2}\big((e_1 + e_8) - (e_2 + \dots + e_7)\big),\ e_1 + e_2 \text{ und } e_j - e_{j-1} \text{ für alle } 2 \leq j \leq 7$$

nehmen, wobei e_j den j-ten Standardbasisvektor in $\mathbb{Q}^m$ bezeichne. Die Matrix a sieht dann wie folgt aus.

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich ist diese Matrix symmetrisch und das Doppelte einer halbganzen Matrix. Dass sie auch positiv definit ist und Determinante 1 hat, lässt sich leicht mit Mitteln der Linearen Algebra überprüfen.

2.4 Der Siegeloperator und Spitzenformen

In diesem Abschnitt wollen wir Spitzenformen einführen. Durch den Spezialfall $n = 1$ motiviert stellen wir uns darunter Modulformen mit einer besonders einfachen Fourierentwicklung vor, und wir werden bald sehen, dass diese Intuition auch im Allgemeinen richtig ist. Definieren werden wir Spitzenformen allerdings als Modulformen, die im Kern einer bestimmten Projektion Φ von M_k^n auf M_k^{n-1} liegen, denn das liefert mehr Informationen über den Raum der Modulformen.

Wir führen nun die Abbildung Φ ein. Sei dafür $f\colon \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ eine Funktion, für die der Grenzwert

$$\lim_{r\to\infty} f\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & ir \end{pmatrix} \quad \text{mit } z \in \mathbb{H}_{n-1}$$

existiert. Dann ist durch

$$(f|\Phi)(z) := \lim_{r\to\infty} f\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & ir \end{pmatrix}$$

eine Funktion $f|\Phi\colon \mathbb{H}_{n-1} \to \mathbb{C}$ gegeben. Der so definierte Operator Φ heißt der ***Siegel'sche Φ-Operator***. Offensichtlich definiert dann für jedes $1 \leq j \leq n$ die j-fache Anwendung

$$(f|\Phi^j)(z) = \lim_{r\to\infty} f\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & ir1_j \end{pmatrix}$$

eine Funktion $f|\Phi^j\colon \mathbb{H}_{n-j} \to \mathbb{C}$.

Man kann Φ auf in $\mathbb{H}_n$ absolut konvergente Fourierreihen $f(z) = \sum_{t\in\Lambda_n} a_t e_n(tz)$ gliedweise anwenden, da diese Reihen auf Bereichen der Art $\operatorname{Im}(z) \geq y_0 > 0$ gleichmäßig konvergieren. Offensichtlich gilt

$$\lim_{r\to\infty} e_n(t\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & ir \end{pmatrix}) = 0 \quad \text{für } t_{nn} > 0.$$

Lemma 2.21. *Sei $t \in \operatorname{Symm}_n(\mathbb{R})$ eine positiv semidefinite Matrix mit $t_{nn} = 0$. Dann gilt*

$$t = \begin{pmatrix} t_1^{(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{mit } t_1^{(n-1)} \geq 0.$$

Beweis. Alle Unterminoren von t sind nichtnegativ. Insbesondere gilt

$$t_{jj}t_{nn} - t_{jn}^2 \geq 0 \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n.$$

Mit $t_{nn} = 0$ folgt die Behauptung. □

Für den Φ-Operator erhalten wir daraus

$$(f|\Phi)(z) = \sum_{t\in\Lambda_{n-1}} a_{\left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)} e_{n-1}(tz) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}_{n-1}. \tag{2.4}$$

Da diese Reihe Teilreihe der Fourierreihe von f ist, konvergiert sie gleichmäßig absolut auf Bereichen der Art $\operatorname{Im}(z) \geq y_0 > 0$ und ist dort eine holomorphe Funktion.

Proposition 2.22. *Der Siegel'sche Φ-Operator definiert eine lineare Abbildung $\Phi\colon M_k^n \to M_k^{n-1}$.*

Beweis. Sei $f \in M_k^n$. Wie gerade eben argumentiert ist dann $f|\Phi$ holomorph in $\mathbb{H}_{n-1}$.

Die (absolute) Beschränktheit von $f|\Phi$ in $\mathcal{F}_{n-1}$ folgt aus der Fourierentwicklung, wenn man berücksichtigt, dass die Imaginärteile von Matrizen dort nach unten beschränkt sind; siehe Lemma 1.53.

Zeigen wir nun die Modularität von $f|\Phi$. Sei dafür

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in \Gamma_{n-1}.$$

Dann liegt die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

offensichtlich in Γ_n. Wegen der Modularität von f gilt daher für alle $z \in \mathbb{H}_n$

$$j(M,z)^{-k} \sum_{t\in\Lambda_n} a_t e_n(tM\langle z\rangle) = j(M,z)^{-k} f(M\langle z\rangle) = (f|_k M)(z) = f(z) = \sum_{t\in\Lambda_n} a_t e_n(tz).$$

Wählen wir nun $z = \left(\begin{smallmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & ir \end{smallmatrix}\right)$ mit einem beliebigen $r \in \mathbb{R}_{>0}$, so folgt

$$j(M_1,z_1)^{-k} \sum_{t\in\Lambda_n} a_t e_n\big(t \begin{pmatrix} M_1\langle z_1\rangle & 0 \\ 0 & ir \end{pmatrix}\big) = \sum_{t\in\Lambda_n} a_t e_n\big(t \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & ir \end{pmatrix}\big).$$

Nach Anwenden des Siegeloperators auf beide Seiten erhalten wir wie in (2.4) für alle $z_1 \in \mathbb{H}_{n-1}$

$$\big((f|\Phi)|_k M_1\big)(z_1) = j(M_1,z_1)^{-k} \sum_{t\in\Lambda_{n-1}} a_{\left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)} e_{n-1}(tM_1\langle z_1\rangle) = \sum_{t\in\Lambda_{n-1}} a_{\left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)} e_{n-1}(tz_1) = (f|\Phi)(z_1).$$

Da $M_1 \in \Gamma_{n-1}$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. □

Beispiel 2.23. *Sei $\vartheta_a^{(n)} \in M^n_{\frac{m}{2}}$. Dann gilt*

$$(\vartheta_a^{(n)}|\Phi)(z_1) = \vartheta_a^{(n-1)}(z_1) \quad \textit{für alle } z_1 \in \mathbb{H}_{n-1},$$

denn: Es ist

$$\vartheta_a^{(n)}(z) = \sum_{t\in\Lambda_n} \nu_a(t) e_n(tz) \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{H}_n$$

und somit

$$(\vartheta_a^{(n)}|\Phi)(z_1) = \sum_{t_1\in\Lambda_{n-1}} \nu_a \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e_{n-1}(t_1 z_1) \quad \textit{für alle } z_1 \in \mathbb{H}_{n-1}.$$

Die Behauptung ist bewiesen, wenn wir zeigen können, dass

$$\nu_a \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{def}{=} \#\{g \in \mathbb{Z}^{m\times n} \mid \frac{1}{2}a[g] = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\} = \#\{g \in \mathbb{Z}^{m\times (n-1)} \mid \frac{1}{2}a[g] = t_1\} \overset{def}{=} \nu_a(t_1)$$

gilt. Dem ist aber so, weil aus $\frac{1}{2}a[g] = \left(\begin{smallmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ für die n-te Spalte $g^{(n)}$ von g schon $\frac{1}{2}a[g^{(n)}] = t_{nn} = 0$ und somit mit der positiven Definitheit von a auch $g^{(n)} = 0$ folgt. #

Definition 2.24. *Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ schreiben wir $S_k^n := \mathrm{Kern}(\Phi)$ und nennen eine Modulform $f \in S_k^n$ eine **Spitzenform**. Für $n = 0$ setzen wir*

$$S_k^0 := \begin{cases} \mathbb{C} & \text{für } k \geq 0, \\ 0 & \text{für } k < 0. \end{cases}$$

Lemma 2.25. *Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$. Eine Modulform $f(z) = \sum_{t \in \Lambda_n} a_t e_n(tz) \in M_k^n$ liegt genau dann in S_k^n, wenn ihre Fourierentwicklung von der Gestalt*

$$f(z) = \sum_{t \in \Lambda_n^+} a_t e_n(tz)$$

ist.

Beweis. Wenn für alle $t \in \Lambda_n \setminus \Lambda_n^+$ der Fourierkoeffizient a_t verschwindet, folgt offensichtlich $f \in \mathrm{Kern}(\Phi)$.

Sei also umgekehrt $f \in \mathrm{Kern}(\Phi)$. Für $t \in \Lambda_n \setminus \Lambda_n^+$ ist 0 ein Eigenwert der Matrix $t \in \mathbb{Q}^{n \times n}$. Es gibt also einen Eigenvektor $0 \neq v \in \mathbb{Q}^n$ mit $tv = 0$. Nach eventueller Multiplikation mit einem Skalar können wir annehmen, dass die Einträge von v ganzzahlig und teilerfremd[28] sind. Nach den Überlegungen im Beweis der Hermite-Ungleichung 1.32 wissen wir, dass es ein $u \in U_n$ mit letzter Spalte v gibt. Dann ist die letzte Spalte von $t[u]$ Null, und $t[u]$ ist nach Lemma 2.21 von der Gestalt

$$t[u] = \begin{pmatrix} (t[u])_1^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $f|\Phi = 0$ gilt $a_{t[u]} = 0$, und mit Lemma 2.12 auch $a_t = 0$. □

Die Dimensionen von Räumen von Spitzenformen lassen sich vergleichsweise leicht bestimmen, woraus man auch Rückschlüsse auf die Dimensionen von Räumen von Modulformen ziehen kann. Dafür betrachten wir zunächst das folgende Lemma.

Lemma 2.26. *Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$. Für jedes $f(z) = \sum_{t \in \Lambda_n} a_t e_n(tz) \in M_k^n$ ist die Funktion*

$$g(z) := \det(\mathrm{Im}(z))^{\frac{k}{2}} \cdot |f(z)|$$

invariant unter Γ_n. Ist f eine Spitzenform, so besitzt g in $\mathbb{H}_n$ ein Maximum.

Beweis. Die Invarianz von g ist wegen des bekannten Transformationsverhaltens der Höhe (1.20) gleichbedeutend mit der Modularität von f.

Sei also f eine Spitzenform. Wegen der Invarianz genügt es zu zeigen, dass g im Fundamentalbereich $\mathcal{F}_n$ ein Maximum annimmt. Nun ist die Menge

$$\mathcal{F}_n(c) := \{z = x + iy \in \mathcal{F}_n \mid \det(y) \leq c\}$$

für jedes geeignete $c > 0$ kompakt,

[28] Nicht zwangsläufig paarweise teilerfremd!

denn: Da nach Proposition 1.54 der Siegel'sche Fundamentalbereich $\mathcal{F}_n$ in $\mathrm{Symm}_n(\mathbb{C})$ abgeschlossen ist, gilt dasselbe für $\mathcal{F}_n(c)$. Wir zeigen also die Beschränktheit von $\mathcal{F}_n(c)$. Zum einen sind nach Bedingung 1.51 (iii) die Einträge von x beschränkt, zum anderen ist nach Voraussetzung $\det(y) \leq c$, und nach Hadamard-Ungleichung 1.31 und Minkowski-Ungleichung 1.47 gilt

$$\det(y) \leq \prod_{j=1}^{n} y_{jj} \leq c_n \cdot \det(y)$$

mit einer Konstanten c_n, die nur von n abhängt. Wegen der Positivität der Diagonaleinträge von y sind somit diese, und damit auch alle anderen Einträge der Minkowski-reduzierten Matrix y, durch eine Konstante beschränkt, die nur von n abhängt. Insgesamt folgt die Behauptung. #

Es genügt also

$$\lim_{\det(y)\to\infty} g(z) = 0 \quad \text{mit } z \in \mathcal{F}_n \tag{2.5}$$

zu zeigen. Wir nutzen aus, dass für $z \in \mathcal{F}_n$ der Imaginärteil y Minkowski-reduziert ist. Nach Korollar 1.48 gibt es dann eine Konstante d_n, die nur von n abhängt, mit

$$y - d_n \operatorname{diag}(y_{11}, \ldots, y_{nn}) \geq 0.$$

Andererseits ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Spur des Produkts zweier positiv semidefiniter Matrizen aus $\mathrm{Symm}_n(\mathbb{R})$ nichtnegativ,

denn: Für eine positiv semidefinite Matrix $s \in \mathrm{Symm}_n(\mathbb{R})$ gibt es eine Matrix $u \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ mit $s[u] = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) \geq 0$. Für eine beliebige weitere positiv semidefinite Matrix $t \in \mathrm{Symm}_n(\mathbb{R})$ folgt dann mit der Konjugationsinvarianz der Spur

$$\operatorname{tr}(st) = \operatorname{tr}({}^t usu {}^t utu) = \operatorname{tr}(\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) {}^t utu) = \sum_{j=1}^{n} d_j (t[u])_{jj} = \sum_{j=1}^{n} d_j\, t[s_j(u)] \geq 0,$$

wobei $s_j(u)$ die j-te Spalte von u bezeichne. #

Für ein beliebiges $t \in \Lambda_n^+$ gilt daher

$$\operatorname{tr}\big(t(y - d_n \operatorname{diag}(y_{11}, \ldots, y_{nn}))\big) \geq 0.$$

Mit der Hadamard-Ungleichung 1.31 folgt

$$\det(y)^{\frac{k}{2}} e^{-2\pi \operatorname{tr}(ty)} \leq \left(\prod_{j=1}^{n} y_{jj} \right)^{\frac{k}{2}} \cdot e^{-2\pi d_n \operatorname{tr}(t \operatorname{diag}(y_{11}, \ldots, y_{nn}))}.$$

Da die Matrizen $t \in \Lambda_n^+$ positive ganze Diagonaleinträge haben, gilt für solche t

$$\operatorname{tr}(t \operatorname{diag}(y_{11}, \ldots, y_{nn})) = \sum_{j=1}^{n} t_{jj} y_{jj} \geq \sum_{j=1}^{n} y_{jj}$$

und somit

$$\det(y)^{\frac{k}{2}} e^{-2\pi \operatorname{tr}(ty)} \leq \left(\prod_{j=1}^{n} y_{jj}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot e^{-2\pi d_n \sum_{j=1}^{n} y_{jj}} = \prod_{j=1}^{n} \left(y_{jj}^{\frac{k}{2}} \cdot e^{-2\pi d_n y_{jj}}\right).$$

Bekanntlich lässt sich die reelle Funktion $x^{\frac{k}{2}}$ für positive x durch $c_n \cdot e^{\pi d_n x}$ abschätzen, wobei $c_n > 0$ nur von n abhängt. Wir schließen daraus

$$\det(y)^{\frac{k}{2}} e^{-2\pi \operatorname{tr}(ty)} \leq c_n \cdot \prod_{j=1}^{n} e^{-\pi d_n y_{jj}} = c_n \cdot e^{-\pi d_n \operatorname{tr}(y)}$$

und somit

$$|g(z)| \leq c_n \cdot e^{-\pi d_n \operatorname{tr}(y)} \cdot \sum_{t \in \Lambda_n^+} |a_t|.$$

Andererseits war ja y als Minkowski-reduziert angenommen, so dass mit $\det(y)$ auch y_{nn} und somit $\operatorname{tr}(y)$ gegen unendlich geht. Da g in $\mathcal{F}_n$ gleichmäßig konvergiert, erhalten wir wie erwünscht (2.5) und also das Lemma. □

Korollar 2.27. *Für $n \in \mathbb{N}$ gelten $S_0^n = \{0\}$ und $M_0^n = \mathbb{C}$.*

Beweis. Sei $f \in S_0^n$ beliebig. Nach Lemma 2.26 gibt es dann ein $w \in \mathbb{H}_n$ mit $|f(w)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in \mathbb{H}_n$. Nach dem Maximumprinzip 2.5 gilt somit[29]

$$f(z) = c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{C} \text{ und alle } z \in \mathbb{H}_n.$$

Da f Spitzenform ist, gilt

$$\lim_{r \to \infty} f(ir1_n) = 0$$

und folglich $c = 0$.

Die Aussage über M_0^n zeigen wir über Induktion nach dem Grad. Die Modulformen in M_0^0 sind nach Definition alle konstant; das ist unser Induktionsanfang. Sei nun f in M_0^n für irgendein $n \in \mathbb{N}$. Dann liegt nach Proposition 2.22 die Funktion $f|\Phi$ in M_0^{n-1}, ist nach Induktionsvoraussetzung also gleich einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$. Es folgt $(f - c) \in S_0^n = \{0\}$ und somit $f \equiv c \in \mathbb{C}$. □

Der letzte Satz in diesem Abschnitt beschreibt das Wachstum der Dimensionen von S_k^n und M_k^n für festes $n \in \mathbb{N}$ und $k \to \infty$.

Satz 2.28 (Endlichkeitssatz). *Seien $n, k \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben.*

[29] Wie schon in Abschnitt 1.2 eingesehen ist $\mathbb{H}_n$ als offene und konvexe Teilmenge ein Gebiet in

$$\operatorname{Symm}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{\frac{1}{2} \cdot n(n+1)},$$

so dass wir das Maximumprinzip anwenden können.

(a) *Es gibt eine Konstante $\mu_n > 0$, die nur von n abhängt, mit*
$$\left\{ f(z) = \sum_{t \in \Lambda_n^+} a_t e_n(tz) \in S_k^n \mid a_t = 0 \text{ für alle } t \text{ mit } \operatorname{tr}(t) \le \frac{k}{\mu_n} \right\} = \{0\},$$

(b) $\dim(S_k^n) \le c_{\mu_n} := \#\{t \in \Lambda_n^+ \mid \operatorname{tr}(t) \le \frac{k}{\mu_n}\} \le (4\frac{k}{\mu_n} + 1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$,

(c) *Es gibt eine nur von n abhängige Konstante c_n mit* $\dim(S_k^n), \dim(M_k^n) \le c_n k^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Beweis. Nach Lemma 1.53 gibt es ein nur von n abhängiges ε_n mit $y > \varepsilon_n 1_n > 0$ für alle $z = x + iy \in \mathcal{F}_n$. Insbesondere gilt $\lambda_j \ge \varepsilon_n$ für alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von y. Wir setzen nun $\mu_n := \frac{4\pi}{n}\varepsilon_n$ und erhalten
$$\operatorname{tr}(y^{-1}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{-1} \le \frac{n}{\varepsilon_n} = \frac{4\pi}{\mu_n} \quad \text{für alle } z \in \mathcal{F}_n. \tag{2.6}$$

Angenommen, es gäbe ein nichttriviales $f \in S_k^n$ mit Fourierkoeffizienten $a_t = 0$ für alle $t \in \Lambda_n^+$ mit $\operatorname{tr}(t) \le \frac{k}{\mu_n}$. Sei $w \in \mathcal{F}_n$ wie in Lemma 2.26 gewählt, so dass die Funktion
$$g(z) = \det(\operatorname{Im}(z))^{\frac{k}{2}} \cdot |f(z)|$$
ihr Maximum in $z = w$ annimmt. Für $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(\zeta) > -\varepsilon_n$ gilt dann $w + \zeta 1_n \in \mathbb{H}_n$ wegen $\operatorname{Im}(w) \ge \varepsilon_n 1_n$. Mit der Fourierentwicklung von f könnten wir
$$F(\zeta) := f(w + \zeta 1_n) = \sum_{t \in \Lambda_n^+} a_t e_n(tw + t\zeta) = \sum_{\ell=1}^\infty a_\ell e^{2\pi i \ell \zeta} \quad \text{mit} \quad a_\ell = \sum_{\substack{t \in \Lambda_n^+ \\ \operatorname{tr}(t) = \ell}} a_t e_n(tw)$$
schreiben. Die Anzahl der $t \in \Lambda_n^+$ mit $\operatorname{tr}(t) = \ell$ wäre dabei endlich,

denn: Zum einen gilt offensichtlich $t_{jj} \le \operatorname{tr}(t) = \ell$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, zum anderen sind alle Unterminoren von $t \in \Lambda_n^+$ positiv, es gilt also $t_{kj}^2 < t_{kk} t_{jj}$ für alle $1 \le k \ne j \le n$. Insgesamt sind daher alle Einträge von t betragsmäßig durch ℓ beschränkt, was mit der Halbganzheit die Behauptung zeigt. #

Nach Annahme wäre ja $a_t = 0$ für alle $t \in \Lambda_n^+$ mit $\operatorname{tr}(t) < N := \lceil \frac{k}{\mu_n} \rceil$ und somit auch
$$a_\ell = 0 \quad \text{für alle } \ell < N.$$

Unter diesen Bedingungen gäbe es zu jedem $0 < \varepsilon < \varepsilon_n$ ein $\zeta_\varepsilon \in \mathbb{C}$ mit
$$|f(w)| = |F(0)| \le e^{-2\pi N \varepsilon} |F(\zeta_\varepsilon)| = e^{-2\pi N \varepsilon} |f(w + \zeta_\varepsilon 1_n)| \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(\zeta_\varepsilon) = -\varepsilon,$$

denn: Wir schreiben kurz $q := e^{2\pi i \zeta}$. Nach Konstruktion ist die Funktion $G(q) := q^{-N} F(\zeta)$ für $|q| < e^{2\pi \varepsilon_n}$ holomorph und nimmt daher nach dem Maximumprinzip 2.5 ihr Maximum im Bereich $|q| \le e^{2\pi\varepsilon}$ auf dem Rand an.[30] Es gibt also ein $q_\varepsilon = e^{2\pi i \zeta_\varepsilon}$ mit
$$|q_\varepsilon| = e^{2\pi\varepsilon} \quad \text{und} \quad |F(0)| = |G(1)| \le |G(q_\varepsilon)| = (e^{2\pi\varepsilon})^{-N} |F(\zeta_\varepsilon)|.$$

[30] Das gilt so natürlich erst einmal für nicht-konstantes G. Aber natürlich nimmt auch eine konstante Funktion ihr Maximum auf dem Rand an.

#

Andererseits gilt ja aber auch $\mathrm{Im}(w) \geq \varepsilon_n 1_n > \varepsilon 1_n$ und somit $\det(\mathrm{Im}(w) - \varepsilon 1_n)^{\frac{k}{2}} > 0$. Es folgte

$$\begin{aligned} |f(w)| \cdot \det(\mathrm{Im}(w) - \varepsilon 1_n)^{\frac{k}{2}} &\leq e^{-2\pi N\varepsilon} |f(w + \zeta_\varepsilon 1_n)| \cdot \det(\mathrm{Im}(w) - \varepsilon 1_n)^{\frac{k}{2}} \\ &= e^{-2\pi N\varepsilon} |f(w + \zeta_\varepsilon 1_n)| \cdot \det(\mathrm{Im}(w + \zeta_\varepsilon 1_n))^{\frac{k}{2}} \\ &\leq e^{-2\pi N\varepsilon} |f(w)| \cdot \det(\mathrm{Im}(w))^{\frac{k}{2}}, \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Abschätzung hierbei aus der Wahl von w als lokalem Maximum von $g(z)$ ergibt. Wegen $f \not\equiv 0$ und dem Identitätssatz 2.4 gälte $f(w) \neq 0$, so dass wir durch $|f(w)|$ teilen dürften und

$$\det(\mathrm{Im}(w) - \varepsilon 1_n)^{\frac{k}{2}} \leq e^{-2\pi N\varepsilon} \cdot \det(\mathrm{Im}(w))^{\frac{k}{2}}$$

erhielten. Da auch $\det(\mathrm{Im}(w))$ und $e^{-2\pi N\varepsilon}$ positiv sind, ist das äquivalent zu

$$e^{2\pi N\varepsilon} \det(1_n - \varepsilon \,\mathrm{Im}(w)^{-1})^{\frac{k}{2}} \leq 1$$

und somit zu

$$e^{4\pi N\varepsilon} \det(1_n - \varepsilon \,\mathrm{Im}(w)^{-1})^{k} \leq 1. \tag{2.7}$$

Dies gälte für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_n$. Entwickeln wir die linke Seite von (2.7) nach ε, erhalten wir

$$e^{4\pi N\varepsilon} \det(1_n - \varepsilon \,\mathrm{Im}(w)^{-1})^{k} = 1 + (4\pi N - k\,\mathrm{tr}(\mathrm{Im}(w)^{-1}))\varepsilon + O_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^2),$$

denn: Für das charakteristische Polynom einer beliebigen Matrix $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ gilt

$$\det(a - 1_n X) = (-1)^n \left(X^n - \mathrm{tr}(a) X^{n-1} \pm \ldots + (-1)^n \det(a)\right)$$

Setzen wir $X = \varepsilon^{-1}$ ein und multiplizieren mit $(-\varepsilon)^n$, so erhalten wir

$$\det(1_n - \varepsilon a) = 1 - \mathrm{tr}(a)\varepsilon \pm O_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^2).$$

Speziell für $a = \mathrm{Im}(w)^{-1}$ folgt

$$e^{4\pi N\varepsilon} \det(1_n - \varepsilon \,\mathrm{Im}(w)^{-1})^{k} = \left(1 + 4\pi N\varepsilon + O_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^2)\right) \cdot \left(1 - k\,\mathrm{tr}(\mathrm{Im}(w)^{-1})\varepsilon \pm O_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^2)\right)$$

und damit die Behauptung. #

Lassen wir ε gegen Null gehen, folgte demnach aus (2.7)

$$4\pi N - k\,\mathrm{tr}(\mathrm{Im}(w)^{-1}) \leq 0$$

und also der Widerspruch

$$N \leq \frac{k}{4\pi} \cdot \mathrm{tr}(\mathrm{Im}(w)^{-1}) \overset{(2.6)}{\leq} \frac{k}{4\pi} \cdot \frac{4\pi}{\mu_n} = \frac{k}{\mu_n} < N.$$

Es folgt, dass es mit den gegebenen Voraussetzungen nur die triviale Modulform $f \equiv 0$ geben kann, und damit Aussage (a).

Die erste Abschätzung in Aussage (b) folgt direkt aus Aussage (a), denn die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} S_k^n & \to & \mathbb{C}^{c_{\mu_n}} \\ f & \mapsto & (a_t)_{t \in \Lambda_n^+ \text{ mit } \operatorname{tr}(t) \leq \frac{k}{\mu_n}} \end{array}$$

ist $\mathbb{C}$-linear und hat trivialen Kern. Im Beweis der Endlichkeit von $\{t \in \Lambda_n^+ \mid \operatorname{tr}(t) = \ell\}$ haben wir desweiteren eingesehen, dass sämtliche Einträge einer Matrix $t \in \Lambda_n^+$ betragsmäßig durch die Spur $\operatorname{tr}(t)$ beschränkt sind. Mit dem bereits Bewiesenen folgt daher

$$\#\{t \in \Lambda_n^+ \mid \operatorname{tr}(t) \leq \frac{k}{\mu_n}\} \leq (4\frac{k}{\mu_n} + 1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

und somit auch die zweite Abschätzung in Aussage (b).

Es verbleibt Aussage (c) zu zeigen. Die Aussage für $\dim(S_k^n)$ ist mit (b) trivial, die für $\dim(M_k^n)$ folgt induktiv, denn es gilt

$$\begin{aligned} \dim(M_k^n) &= \dim(\operatorname{Kern}(\Phi)) + \dim(\operatorname{Bild}(\Phi)) \\ &\leq \dim(S_k^n) + \dim(M_k^{n-1}) \\ &\overset{\text{I.V.}}{\leq} (2\frac{k}{\mu_n} + 1)^{\frac{n(n+1)}{2}} + c_{n-1}k^{\frac{(n-1)n}{2}}, \end{aligned}$$

was sich für ein geeignetes c_n nach oben durch $c_n k^{\frac{n(n+1)}{2}}$ abschätzen lässt. Als Induktionsanfang nehmen wir hierbei $\dim(M_k^0) = 1 = k^{\frac{0 \cdot 1}{2}}$. $\square$

2.5 Die Surjektivität des Siegeloperators und Eisensteinreihen

Das Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 2.29. *Der Siegel'sche Operator $\Phi\colon M_k^n \to M_k^{n-1}$ ist für gerades $k > 2n$ surjektiv.*

Bemerkung 2.30. *Satz 2.29 gilt nur für Modulformen mit (relativ zum Grad) großem Gewicht.*

- *Im Jahr 1986 konnte WEISSAUER[31] in [Wei] mit der so genannten Hecke'schen Summation die Voraussetzung von Satz 2.29 auf $k > n + 1$ abschwächen.*
- *Man kann die entsprechende Aussage auch für Modulformen mit (relativ zum Grad) kleinem Gewicht zeigen: FREITAG[32] (1977) und RAGHAVAN[33] (1978) fanden unabhängig voneinander Beweise für $k < \frac{n-1}{2}$, siehe zum Beispiel in [Fre1].*

Diese Unterscheidung in Modulformen „großen" und „kleinen" Gewichts ist für die Theorie der Siegel'schen Modulformen typisch. Wir werden diesen Aspekt jedoch nicht explizit studieren.

[31] Rainer Weissauer (*1954)
[32] Eberhard Freitag (* 1942)
[33] Raghavan Narasimhan (1937-2015)

Eine erste Erkenntnis ist, dass dieser aus

$$S_k^j \subseteq M_k^n|\Phi^{n-j} \quad \text{für gerades } k > 2n \text{ und } 0 \leq j < n, \tag{2.8}$$

folgt. Das stimmt,

denn: Wir zeigen per Induktion nach j, dass

$$\Phi^{n-j}\colon M_k^n \to M_k^j \quad \text{für gerades } k > 2n \text{ und } 0 \leq j < n$$

surjektiv ist. Der Induktionsanfang für $j = 0$ ist trivial, da jede Modulform aus $M_k^0 = \mathbb{C}$ definitionsgemäß eine Spitzenform aus $S_k^0 = \mathbb{C}$ ist und somit nach (2.8) in $M_k^n|\Phi^n$ liegt.

Sei nun $0 \leq j < n-1$. Für jedes $f \in M_k^{j+1}$ liegt $f|\Phi$ in M_k^j. Gilt die Behauptung für j, ist also

$$\Phi^{n-j}\colon M_k^n \to M_k^j$$

surjektiv, dann liegt $f|\Phi$ schon in $M_k^n|\Phi^{n-j}$. Es gibt folglich ein $F \in M_k^n$ mit $f|\Phi = F|\Phi^{n-j}$, also

$$(f - F|\Phi^{n-j-1})|\Phi = 0.$$

Damit ist $f - F|\Phi^{n-j-1}$ eine Spitzenform in S_k^{j+1} und liegt nach (2.8) in $M_k^n|\Phi^{n-j-1}$. Es folgt $f \in M_k^n|\Phi^{n-j-1}$, also die Behauptung für $j+1$. #

Unser nächstes Ziel ist es, für gerades $k > 2n$ und $0 \leq j < n$ eine Spitzenform $f \in S_k^j$ zu einer Modulform in M_k^n zu liften, um in (2.8) ein geeignetes Urbild angeben zu können. Setzen wir

$$[f]_j^n\colon \begin{cases} \mathbb{H}_n & \to \mathbb{C}, \\ z & \mapsto f(z_1^{(j)}), \end{cases}$$

so gilt zwar $f = [f]_j^n|\Phi^{n-j}$, aber der Lift $[f]_j^n$ ist nur in den wenigsten Fällen eine Modulform bezüglich Γ_n. In Lemma 2.32 werden wir zeigen, dass er die Modularitätsbedingung 2.6 (ii) immerhin für die in Lemma 2.31 eingeführte Untergruppe $\Gamma_{n,j} \subseteq \Gamma_n$ erfüllt.

Lemma 2.31. *Sei R ein beliebiger Ring, $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq j < n$.*

(a) *Die Menge $\mathrm{Sp}_{n,j}(R)$ aller Matrizen der Form*

$$M = \begin{pmatrix} a_1^{(j)} & 0 & b_1^{(j)} & b_2^{(j)} \\ a_3^{(j)} & a_4^{(j)} & b_3^{(j)} & b_4^{(j)} \\ c_1^{(j)} & 0 & d_1^{(j)} & d_2^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & d_4^{(j)} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(R)$$

ist eine Untergruppe in $\mathrm{Sp}_n(R)$. Ist speziell $R = \mathbb{Z}$, so schreiben wir kurz $\Gamma_{n,j} := \mathrm{Sp}_{n,j}(\mathbb{Z})$.

(b) *Die Zuordnung*

$$M \mapsto M_1 := \begin{pmatrix} (a_M)_1^{(j)} & (b_M)_1^{(j)} \\ (c_M)_1^{(j)} & (d_M)_1^{(j)} \end{pmatrix}$$

definiert einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von $\mathrm{Sp}_{n,j}(R)$ nach $\mathrm{Sp}_j(R)$.

Beweis. Für $M, \tilde{M} \in \mathrm{Sp}_{n,j}(R)$ gilt

$$\begin{aligned} M\tilde{M}^{-1} &= \begin{pmatrix} (a_M)_1 & 0 & (b_M)_1 & (b_M)_2 \\ (a_M)_3 & (a_M)_4 & (b_M)_3 & (b_M)_4 \\ (c_M)_1 & 0 & (d_M)_1 & (d_M)_2 \\ 0 & 0 & 0 & (d_M)_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t(d_{\tilde{M}})_1 & 0 & -{}^t(b_{\tilde{M}})_1 & -{}^t(b_{\tilde{M}})_3 \\ {}^t(d_{\tilde{M}})_2 & {}^t(d_{\tilde{M}})_4 & -{}^t(b_{\tilde{M}})_2 & -{}^t(b_{\tilde{M}})_4 \\ -{}^t(c_{\tilde{M}})_1 & 0 & {}^t(a_{\tilde{M}})_1 & {}^t(a_{\tilde{M}})_3 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t(a_{\tilde{M}})_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_M)_1{}^t(d_{\tilde{M}})_1 - (b_M)_1{}^t(c_{\tilde{M}})_1 & 0 & -(a_M)_1{}^t(b_{\tilde{M}})_1 + (b_M)_1{}^t(a_{\tilde{M}})_1 & * \\ * & * & * & * \\ (c_M)_1{}^t(d_{\tilde{M}})_1 - (d_M)_1{}^t(c_{\tilde{M}})_1 & 0 & -(c_M)_1{}^t(b_{\tilde{M}})_1 + (d_M)_1{}^t(a_{\tilde{M}})_1 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.9}$$

und somit Aussage (a).

Für den Beweis von Aussage (b) betrachten wir zunächst ein beliebiges $M \in \mathrm{Sp}_{n,j}(R)$. Mit dem Symplektizitätskriterium (1.3) gilt

$$\begin{aligned} c^td &= \begin{pmatrix} c_1{}^td_1 & * \\ * & * \end{pmatrix} \quad \text{symmetrisch,} \\ a^tb &= \begin{pmatrix} a_1{}^tb_1 & * \\ * & * \end{pmatrix} \quad \text{symmetrisch,} \\ 1_{2n} = a^td - b^tc &= \begin{pmatrix} a_1{}^td_1 - b_1{}^tc_1 & * \\ * & a_4{}^td_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Wenden wir (1.3) auf M_1 an, erhalten wir $M_1 \in \mathrm{Sp}_j(R)$ und somit die Wohldefiniertheit unserer Abbildung. Die Homomorphie entnehmen wir (2.9), wenn wir nur das zweite Gleichheitszeichen betrachten. Die Surjektivität gilt, weil offensichtlich zu jeder Matrix $M_1 \in \mathrm{Sp}_j(R)$ die Matrix

$$M_1\, {}_j\!\times_{n-j}\, 1_{2(n-j)} := \begin{pmatrix} a_{M_1} & 0 & b_{M_1} & 0 \\ 0 & 1_{n-j} & 0 & 0_{n-j} \\ c_{M_1} & 0 & d_{M_1} & 0 \\ 0 & 0_{n-j} & 0 & 1_{n-j} \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{Sp}_{n,j}(R)$ liegt.[34] □

Lemma 2.32. *Seien $n \in \mathbb{N}$, $0 \le j < n$ und $k \in \mathbb{Z}$ gerade. Für ein beliebiges $f \in S_k^j$ gilt dann*

$$[f]_j^n|_k M = [f]_j^n \quad \textit{für alle } M \in \Gamma_{n,j}.$$

Beweis. Sei $M \in \mathrm{Sp}_{n,j}(\mathbb{R})$. Dann gelten für alle $z \in \mathbb{H}_n$

$$j(M,z) = \det(cz+d) = \det\begin{pmatrix} c_1z_1 + d_1 & c_1z_2 + d_2 \\ 0 & d_4 \end{pmatrix} = j(M_1, z_1) \cdot \det(d_4)$$

[34] Für $j = n-1$ hatten wir dies schon im Beweis von Proposition 2.22 eingesehen.

und

$$
\begin{aligned}
(M\langle z\rangle)_1 &= \left(\begin{pmatrix} a_1z_1+b_1 & a_1z_2+b_2 \\ a_3z_1+a_4z_3 & a_3z_2+a_4z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1z_1+d_1 & c_1z_2+d_2 \\ 0 & d_4 \end{pmatrix}^{-1} \right)_1 \\
&= \left(\begin{pmatrix} a_1z_1+b_1 & a_1z_2+b_2 \\ a_3z_1+a_4z_3 & a_3z_2+a_4z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (c_1z_1+d_1)^{-1} & -(c_1z_1+d_1)^{-1}(c_1z_2+d_2)d_4^{-1} \\ 0 & d_4^{-1} \end{pmatrix} \right)_1 \\
&= (a_1z_1+b_1)(c_1z_1+d_1)^{-1} = M_1\langle z_1\rangle.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt nach Definition von $|_k$ und $[\cdot]_j^n$ für ein beliebiges $f \in S_k^j$

$$([f]_j^n|_kM)(z) = j(M,z)^{-k}[f]_j^n(M\langle z\rangle) = \det(d_4)^{-k}j(M_1,z_1)^{-k}f(M_1\langle z_1\rangle).$$

Sei nun speziell $M \in \Gamma_{n,j}$. Nach (2.10) gilt dann $\det(d_4) \in \{\pm 1\}$, und nach Voraussetzung ist k gerade. Daher gilt mit der Modularität von f

$$([f]_j^n|_kM)(z) = f(z_1) = [f]_j^n(z),$$

was zu zeigen war. □

Als Folge dieses Lemmas können wir $[f]_j^n$ als Funktion auf den Linksnebenklassen $\Gamma_{n,j}M$ mit $M \in \Gamma_n$ auffassen. Das inspiriert zu folgender Definition.

Definition 2.33. *Seien $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq j < n$ und $k \in \mathbb{Z}$ gerade. Dann heißt die Funktion*

$$E_k^{n,j}(f;z) := \sum_{M \in \Gamma_{n,j}\backslash\Gamma_n} ([f]_j^n|_kM)(z) = \sum_{M \in \Gamma_{n,j}\backslash\Gamma_n} [f]_j^n(M\langle z\rangle)\det(c_Mz+d_M)^{-k}$$

die **KLINGEN*'sche* EISENSTEIN*reihe***[35] *zur Spitzenform $f \in S_k^j$. Die Summe geht dabei jeweils über ein beliebiges Vertretersystem von $\Gamma_{n,j}$ in Γ_n. Diese Notation ist auch künftig so zu verstehen und wird nicht mehr erläutert werden.*

Bemerkung 2.34. *Diese Eisensteinreihen sind eine echte Verallgemeinerung der aus der Funktionentheorie bekannten Eisensteinreihen. Setzt man nämlich $j = 0$ und $f \equiv 1$, so erhält man als Spezialfall von $E_k^{n,j}(f;z)$ die so genannte* ***Siegel'sche Eisensteinreihe***

$$E_k^n(z) = \sum_{M \in \Gamma_{n,0}\backslash\Gamma_n} \det(c_Mz+d_M)^{-k},$$

wobei die Gruppe $\Gamma_{n,0}$ durch $\{M \in \Gamma_n \mid c_M = 0\}$ gegeben ist. Für $n = 1$ gilt nun in der Tat

$$E_k^1(z) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \det(c_Mz+d_M)^{-k} = E_k(z).$$

[35] Helmut Klingen (* 1927), Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823-1852)

Offensichtlich lässt sich nun der Beweis von (2.8) und damit Satz 2.29 darauf reduzieren zu zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq j < n$ und gerades $k > 2n$ die Klingen'schen Eisensteinreihen $E_k^{n,j}(f;z)$ Modulformen in M_k^n sind und

$$E_k^{n,j}(f;\cdot)|\Phi^{n-j} = f \tag{2.11}$$

erfüllen. Offensichtlich gilt

$$E_k^{n,j}(f;z)|_k M = \sum_{\tilde{M}\in\Gamma_{n,j}\backslash\Gamma_n} ([f]_j^n|_k \tilde{M}M)(z) = E_k^{n,j}(f;z) \quad \text{für alle } M \in \Gamma_n,$$

so dass es genügt Proposition 2.35 zu zeigen, um einzusehen, dass die Klingen'schen Eisensteinreihen Modulformen sind. Die Liftungseigenschaft (2.11) zeigen wir in Proposition 2.42.

Proposition 2.35. *Seien $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq j < n$ und $k \in \mathbb{Z}$ gerade. Dann konvergiert für $k > n+j+1$ die Eisensteinreihe $E_k^{n,j}(f;\cdot)$ zu einer beliebigen Spitzenform $f \in S_k^j$ absolut und in vertikalen Streifen*

$$V_n(d) = \{z = x + iy \in \mathbb{H}_n \mid \operatorname{tr}(x^2) \leq d^{-1},\ y \geq d\,1_n\} \quad \textit{mit } d \in \mathbb{R}_{>0}$$

gleichmäßig.

Wir zeigen Proposition 2.35, indem wir eine konvergente absolute Majorante konstruieren. Unser Kandidat für eine solche absolute Majorante ist

Lemma 2.36. *Seien $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq j < n$ und $k \in \mathbb{Z}$ gerade. Die Funktion $h_1(z) := \det(\operatorname{Im}(z_1^{(j)}))^{-\frac{k}{2}}$ besitzt das Transformationsverhalten*

$$|(h_1|_k M)(z)| = |\det((d_M)_4)|^{-k} \cdot |h_1(z)| \quad \textit{für alle } M \in \operatorname{Sp}_{n,j}(\mathbb{R}) \textit{ und } z \in \mathbb{H}_n.$$

Die Reihe

$$\sum_{M\in\Gamma_{n,j}\backslash\Gamma_n} |(h_1|_k M)(z)|$$

ist eine absolute Majorante der Eisensteinreihe $E_k^{n,j}(f;z)$.

Beweis. Mit den im Beweis von Lemma 2.32 gezeigten Rechenregeln und dem aus (1.20) bekannten Transformationsverhalten der Höhe gilt wie gewünscht

$$\begin{aligned} |(h_1|_k M)(z)| &= |j(M,z)^{-k} h_1(M\langle z\rangle)| \\ &= |\det((d_M)_4)|^{-k} \cdot |j(M_1,z_1)|^{-k} \cdot |\det(\operatorname{Im}(M_1\langle z_1\rangle))|^{-\frac{k}{2}} \\ &= |\det((d_M)_4)|^{-k} \cdot |\det(\operatorname{Im}(z_1))|^{-\frac{k}{2}} \\ &= |\det((d_M)_4)|^{-k} \cdot |h_1(z)|. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Der Rest des Lemmas folgt, da es nach Lemma 2.26 eine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit

$$\frac{1}{c} \geq |\det(\operatorname{Im}(z))|^{\frac{k}{2}} \cdot |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}_n$$

und also

$$\begin{aligned}\sum_{M\in\Gamma_{n,j}\backslash\Gamma_n} |(h_1|_k M)(z)| &= \sum_{M\in\Gamma_{n,j}\backslash\Gamma_n} |j(M,z)|^{-k}\cdot|h_1(M\langle z\rangle)| \\ &= \sum_{M\in\Gamma_{n,j}\backslash\Gamma_n} |\det(\operatorname{Im}(M\langle z\rangle)_1^{(j)})|^{-\frac{k}{2}}\cdot|\det(c_M z+d_M)|^{-k} \\ &\geq c\cdot \sum_{M\in\Gamma_{n,j}\backslash\Gamma_n} |f((M\langle z\rangle)_1^{(j)})|\cdot|\det(c_M z+d_M)|^{-k} \\ &= c\cdot \sum_{M\in\Gamma_{n,j}\backslash\Gamma_n} |([f]_j^n|_k M)(z)|.\end{aligned}$$

□

Nun reduzieren wir die Frage der gleichmäßigen Konvergenz in Vertikalstreifen auf die der Konvergenz in einem einzigen Punkt.

Lemma 2.37. *Seien $n\in\mathbb{N}$, $0\leq j<n$ und $k\in\mathbb{Z}$ gerade. Konvergiert die Reihe*

$$\sum_{M\in\Gamma_{n,j}\backslash\Gamma_n} |(h_1|_k M)(z)|$$

in einem einzigen Punkt $z_0\in\mathbb{H}_n$, so konvergiert sie für jedes $d\in\mathbb{R}_{>0}$ gleichmäßig im Bereich $V_n(d)$.

Beweis. Der Beweis von Lemma 2.37 zerfällt in drei Schritte.

Schritt 1: Wir zeigen die Existenz eines $\varepsilon>0$ mit

$$\varepsilon\cdot|\det(c_M z_0+d_M)|\leq|\det(c_M z+d_M)| \quad \text{für alle } z\in V_n(d) \text{ und alle } M\in\operatorname{Sp}_n(\mathbb{R}). \tag{2.13}$$

Es genügt, dies für Matrizen $M\in\operatorname{Sp}_n(\mathbb{R})$ mit invertierbarem c_M zu zeigen,

denn: Zu jedem $M\in\operatorname{Sp}_n(\mathbb{R})$ gibt es eine Diagonalmatrix $x=\operatorname{diag}(x_{11},\dots,x_{nn})$ mit betragsmäßig beliebig kleinen Einträgen, für die in der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_M & b_M \\ c_M & d_M\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ x & 1_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} * & * \\ c_M+d_Mx & *\end{pmatrix}$$

der Block c_M+d_Mx invertierbar ist. Das liegt daran, dass die Koeffizienten des Polynoms $\det(c_M+d_Mx)$ in den Variablen $x_{11},\dots,x_{nn}$ aus den n-spaltigen Unterdeterminanten von $(c_M\ d_M)$ gebildet werden und wegen $\operatorname{rk}(c_M\ d_M)=n$ also nicht alle verschwinden können. Die Menge der $M\in\operatorname{Sp}_n(\mathbb{R})$ mit invertierbarem c_M liegt also dicht in $\operatorname{Sp}_n(\mathbb{R})$, was die Behauptung zeigt. #

Für invertierbares c_M schreiben wir $s_M:=c_M^{-1}d_M={}^ts_M$[36] und reduzieren (2.13) zu

$$\varepsilon\cdot|\det(z_0+s_M)|\leq|\det(z+s_M)|. \tag{2.14}$$

[36]Die Symmetrie von s_M ergibt sich aus $c_M^{-1}d_M=c_M^{-1}d_M{}^tc_M{}^tc_M^{-1}=(d_M{}^tc_M)[{}^tc_M^{-1}]$ und (1.3).

Ohne Einschränkung dürfen wir nun weiter annehmen, es gelte $z_0 = i\,1_n$,

denn: Ein beliebiges $z_0 \in \mathbb{H}_n$ können wir schreiben als $z_0 = x_0 + iy_0 = x_0 + i^t u_0 u_0$ mit einem $u_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Auf diese Weise lässt sich (2.14) äquivalent umformen zu

$$\varepsilon \cdot \left|\det\left(i\,1_n + {}^t u_0^{-1}(s_M + x_0)u_0^{-1}\right)\right| \leq \left|\det\left({}^t u_0^{-1}(z - x_0)u_0^{-1} + {}^t u_0^{-1}(s_M + x_0)u_0^{-1}\right)\right|.$$

Die Matrix ${}^t u_0^{-1}(s_M + x_0)u_0^{-1}$ ist offensichtlich symmetrisch. Die Behauptung folgt also, wenn wir zeigen können, dass es ein $d' \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit

$$(z - x_0)[u_0^{-1}] \in V_n(d') \quad \text{für alle } z \in V_n(d).$$

Das ist aber klar, wenn man einsieht, dass ein $z = x + iy$ genau dann in $V_n(d)$ liegt, wenn für alle $v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ die Bedingung $y[v] \geq d^t vv$ gilt und die Einträge von x geeignet beschränkt sind. #

Schreiben wir nun $z = x + iy$. Die Matrix

$$\begin{aligned}(z + s_M)y^{-1}(\bar{z} + s_M) &= ((x + s_M) + iy)y^{-1}((x + s_M) - iy)\\ &= (x + s_M)y^{-1}(x + s_M) + (x + s_M)y^{-1}(-iy) + (iy)y^{-1}(x + s_M)\\ &\quad + (iy)y^{-1}(-iy)\\ &= y^{-1}[x + s_M] + y\end{aligned}$$

ist offensichtlich reell und positiv definit, da mit y auch y^{-1} positiv definit ist, wie man leicht der Diagonalisierung von y abliest. Für beliebige $f, g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit

$$y^{-1} = {}^t f f \quad \text{und} \quad (z + s_M)y^{-1}(\bar{z} + s_M) = g^{-1}{}^t g^{-1}$$

gilt daher

$$\begin{aligned}\left|\frac{\det(i\,1_n + s_M)}{\det(z + s_M)}\right| &= \left|\frac{\det(i\,1_n + s_M)}{\det(g^{-1}{}^t g^{-1}(\bar{z} + s_M)^{-1} f^{-1}{}^t f^{-1})}\right|\\ &= \left|\det(g(i\,1_n + s_M)^t f)\right| \cdot \left|\det(f(\bar{z} + s_M)^t g)\right|\\ &= \left|\det(g(i\,1_n + s_M)^t f)\right|,\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichheit $g(z + s_M)^t f f(\bar{z} + s_M)^t g = 1_n$ benutzt haben.

Offensichtlich langt es also zum Beweis von Schritt 1 zu zeigen, dass die Einträge der Matrix $g(i\,1_n + s_M)^t f$ für alle $z \in V_n(d)$ durch eine Konstante beschränkt sind. Dafür betrachten wir

$$p := g(x + s_M)^t f \quad \text{und} \quad q := gf^{-1}.$$

Diese sind beschränkt,

denn:

$$\begin{aligned}p^t p + q^t q &= g(x + s_M)^t f f(x + s_M)^t g + gf^{-1}{}^t f^{-1}{}^t g\\ &= g(x + s_M)y^{-1}(x + s_M)^t g + gy^t g\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g\big((x+iy+s_M)y^{-1}(x+s_M) - i(x+s_M) + y\big)^t g \\
&= g\big((x+iy+s_M)y^{-1}(x-iy+s_M) + i(x+iy+s_M) - i(x+s_M) + y\big)^t g \\
&= g\big((z+s_M)y^{-1}(\bar{z}+s_M)\big)^t g \\
&= 1,
\end{aligned}$$

#

Mit $z = x+iy \in V_n(d)$ sind außerdem ${}^tff = y^{-1}$ und x beschränkt. Es folgt die Beschränktheit von

$$g(s_M + i\,1_n)^t f = p + qf(i\,1_n - x)^t f \quad \text{für alle } z = x+iy \in V_n(d)$$

und somit die Behauptung von Schritt 1.

Schritt 2: Wir zeigen, dass es zu je zwei Punkten $z, w \in \mathbb{H}_n$ ein $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ gibt mit

$$M\langle z\rangle = i\,\mathrm{diag}(d_1,\ldots,d_n) \text{ mit } d_j \geq 1 \text{ für alle } 1 \leq j \leq n \quad \text{und} \quad M\langle w\rangle = i\,1_n. \tag{2.15}$$

Ohne Einschränkung können wir $w = i\,1_n$ annehmen, so dass M im Stabilisator von $i\,1_n$ liegt, nach Abschnitt 1.2 also in $\mathcal{K}_n = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R})$. Die Abbildungsvorschrift

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + bi =: u_M$$

definiert einen Gruppenisomorphismus von $\mathcal{K}_n$ auf die unitäre Gruppe $\mathcal{U}_n$,[37]

denn: Die Injektivität ist klar, die Surjektivität folgt sofort aus

$${}^t\bar{u}_M u_M = ({}^ta - {}^tbi)(a+bi) = {}^taa + {}^tabi - {}^tbia + {}^tbb = 1_n \quad \Longleftrightarrow \quad {}^tab = {}^tba \text{ und } {}^taa + {}^tbb = 1_n.$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{a} & -\tilde{b} \\ \tilde{b} & \tilde{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\tilde{a} - b\tilde{b} & -a\tilde{b} - b\tilde{a} \\ b\tilde{a} + a\tilde{b} & -b\tilde{b} + a\tilde{a} \end{pmatrix} \mapsto (a\tilde{a} - b\tilde{b}) + (a\tilde{b} + b\tilde{a})i = (a+bi)(\tilde{a} + \tilde{b}i)$$

ist die Abbildung auch ein Gruppenhomomorphismus. #

Wir nutzen diese Identifikation, um statt der Aktion von $\mathcal{K}_n$ auf $\mathbb{H}_n$ diejenige von $\mathcal{U}_n$ auf dem ***verallgemeinerten Einheitskreis***

$$\mathbb{E}_n := \{w \in \mathrm{Symm}_n(\mathbb{C}) \mid 1_n - w\bar{w} > 0\}$$

zu betrachten. Dafür ist Folgendes wichtig. Die Möbius-Transformation[38]

$$z \mapsto M_0\langle z\rangle := (z - i\,1_n)(z + i\,1_n)^{-1} \quad \text{mit } M_0 = \frac{1}{\sqrt{2}i}\begin{pmatrix} 1_n & -i\,1_n \\ 1_n & i\,1_n \end{pmatrix}$$

[37] Nicht zu verwechseln mit der unimodularen Gruppe U_n.

[38] Definiert wie in Abschnitt 1.2, mit der offensichtlichen Einschränkung, dass M_0 nicht in $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ liegt und die Transformation $\mathbb{H}_n$ nicht auf sich selbst abbildet.

definiert eine biholomorphe[39] Abbildung des Siegel'schen Halbraums $\mathbb{H}_n$ auf den verallgemeinerten Einheitskreis $\mathbb{E}_n$,

denn: Zunächst einmal ist die Abbildung auf ganz $\mathbb{H}_n$ definiert und dort holomorph, da mit z auch $z + i\,1_n$ in $\mathbb{H}_n$ liegt und somit invertierbar ist. Außerdem gilt für $w = M_0\langle z\rangle$ mit $z \in \mathbb{H}_n$

$$\begin{aligned}
1_n - w\bar{w} &= 1_n - (z - i\,1_n)(z + i\,1_n)^{-1}\big((z + i\,1_n) - 2iy\big)(\bar{z} - i\,1_n)^{-1} \\
&= 1_n - \big((\bar{z} - i\,1_n) + 2iy\big)(\bar{z} - i\,1_n)^{-1} + (z - i\,1_n)(z + i\,1_n)^{-1}2iy(\bar{z} - i\,1_n)^{-1} \\
&= -2iy(\bar{z} - i\,1_n)^{-1} + \big((z + i\,1_n) - 2i\,1_n\big)(z + i\,1_n)^{-1}2iy(\bar{z} - i\,1_n)^{-1} \\
&= (z + i\,1_n)^{-1}4y\overline{(z + i\,1_n)}^{-1} > 0,
\end{aligned}$$

das Bild liegt also in $\mathbb{E}_n$. Ganz ähnlich überprüft man, dass die durch die Inverse von M_0 gegebene Möbius-Transformation den verallgemeinerten Einheitskreis holomorph nach $\mathbb{H}_n$ abbildet, so dass $z \mapsto M_0\langle z\rangle$ eine Bijektion ist. #

Die symplektische Substitution $z \mapsto M\langle z\rangle$ übersetzt sich via dieser biholomorphen Identifikation in die Substitution

$$w \mapsto w[{}^t\bar{u}_M] = \bar{u}_M w\,{}^t\bar{u}_M \quad \text{für alle } w \in \mathbb{E}_n,$$

denn: Für alle $M \in \mathcal{K}_n$ und alle $z \in \mathbb{H}_n$ gilt

$$\begin{aligned}
M_0\langle M\langle z\rangle\rangle &= \Big((a_M z - b_M)(b_M z + a_M)^{-1} - i\,1_n\Big)\cdot\Big((a_M z - b_M)(b_M z + a_M)^{-1} + i\,1_n\Big)^{-1} \\
&= ((a_M z - b_M) - i(b_M z + a_M))\cdot((a_M z - b_M) + i(b_M z + a_M))^{-1} \\
&= ((a_M - b_M i)z - (b_M + a_M i))\cdot((a_M + b_M i)z - (b_M - a_M i))^{-1} \\
&= (a_M - b_M i)(z - i\,1_n)(z + i\,1_n)^{-1}(a_M + b_M i)^{-1} \\
&= (a_M - b_M i)(z - i\,1_n)(z + i\,1_n)^{-1}({}^t a_M - {}^t b_M i) \\
&= \Big((z - i\,1_n)(z + i\,1_n)^{-1}\Big)\,[{}^t\bar{u}_M] \\
&= (M_0\langle z\rangle)[{}^t\bar{u}_M].
\end{aligned}$$

#

Nach Übungsaufgabe 2.4 ist $M_0\langle M\langle z\rangle\rangle$ genau dann eine Diagonalmatrix mit nicht-negativen Einträgen, wenn $M\langle z\rangle$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen id_j mit $d_j \geq 1$ ist. Schritt 2 folgt demnach, weil es zu jeder Matrix $w \in \mathrm{Symm}_n(\mathbb{C})$ eine unitäre Matrix u gibt, so dass $w[u]$ eine Diagonalmatrix mit nicht-negativen reellen Diagonaleinträgen ist. Letzteres gilt,

denn: Da $\bar{w}w$ hermitesch ist, existiert eine unitäre Matrix u, so dass $d := {}^t\bar{u}\bar{w}wu$ eine reelle Diagonalmatrix ist. Wegen $d = {}^t\bar{u}\bar{w}wu = \overline{{}^t uwu}\,{}^t uwu$ können wir ohne Einschränkung annehmen, dass bereits $\bar{w}w$ eine reelle Matrix ist. In diesem Fall sind die beiden Matrizen $\mathrm{Re}(w)$ und $\mathrm{Im}(w)$ vertauschbar und lassen sich daher durch eine reelle orthogonale Matrix u simultan

[39]Wie für $n = 1$ heißt eine Abbildung ***biholomorph***, wenn sie bijektiv ist und sie selbst sowie ihre Umkehrabbildung holomorph sind.

diagonalisieren. Insbesondere ist ${}^t uwu$ diagonal. Mithilfe einer geeigneten unitären Diagonalmatrix erzwingen wir die Bedingung an die Vorzeichen. #

Schritt 3: Wir zeigen die Existenz einer Konstanten $c > 0$ mit

$$|(h_1|_k M)(z)| \leq c \cdot |(h_1|_k M)(z_0)| \quad \text{für alle } z \in V_n(d) \text{ und alle } M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}). \tag{2.16}$$

Wegen des Transformationsverhaltens aus Lemma 2.36 genügt es, dies für ein Vertretersystem der Nebenklassen von $\mathrm{Sp}_{n,j}(\mathbb{R})$ in $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ zu zeigen. Für ein beliebiges $z \in \mathbb{H}_n$ gibt es ein $\tilde{M} \in \mathrm{Sp}_{n,j}(\mathbb{R})$ mit

$$h_1(\tilde{M}\langle z\rangle) \leq h_1(\tilde{M}\langle z_0\rangle),$$

denn: Mit (2.15) für j statt für n erhalten wir die Existenz einer Matrix $\tilde{M}_1 \in \mathrm{Sp}_j(\mathbb{R})$ mit

$$\det(\mathrm{Im}(\tilde{M}_1\langle z_1\rangle))^{-\frac{k}{2}} \leq \det(\mathrm{Im}(\tilde{M}_1\langle (z_0)_1\rangle))^{-\frac{k}{2}}.$$

Nach Teil (b) von Lemma 2.31 gibt es dann ein $\tilde{M} \in \mathrm{Sp}_{n,j}(\mathbb{R})$ mit $(\tilde{M})_1 = \tilde{M}_1$. Wie im Beweis von Lemma 2.32 gilt für dieses $\tilde{M}_1\langle z_1\rangle = (\tilde{M}\langle z\rangle)_1$ für alle $z \in \mathbb{H}_n$. Die Behauptung folgt mit der Definition von $h_1(z)$. #

Es besitzt also bei gegebenen z jede Nebenklasse von $\mathrm{Sp}_{n,j}(\mathbb{R})$ in $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ einen Vertreter M mit dieser Eigenschaft. Es folgt

$$|(h_1|_k M)(z)| = h_1(M\langle z\rangle) \cdot |\det(c_M z + d_M)|^{-k} \leq h_1(M\langle z_0\rangle) \cdot |\det(c_M z + d_M)|^{-k}$$

für dieses Vertretersystem. Ist nun speziell $z \in V_n(d)$, so dürfen wir (2.13) anwenden und erhalten so die Behauptung. $\square$

Für den Beweis von Proposition 2.35 verbleibt die Konvergenz der absoluten Majorante in einem einzelnen Punkt $z_0 \in \mathbb{H}_n$ zu zeigen. Dafür wählen wir eine nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{H}_n$ mit den Eigenschaften[40]

(a) der Abschluss $\overline{U}$ von U in $\mathbb{H}_n$ ist kompakt,

(b) für alle $M \in \Gamma_n \setminus \{\pm 1_{2n}\}$ gilt $M\langle U\rangle \cap U = \varnothing$,

und betrachten ein beliebiges $z_0 \in U$. Für $z \in \overline{U}$ beliebig ist der Quotient

$$\frac{\det(\mathrm{Im}(M\langle z_0\rangle))}{\det(\mathrm{Im}(M\langle z\rangle))}$$

beschränkt,

denn: In Lemma 1.55 wurde gezeigt, dass die Funktion

$$\max_{M\in\Gamma_n} \det(\mathrm{Im}(M\langle z\rangle)) \quad \text{für } z \in \mathbb{H}_n$$

[40] Ein Beispiel für eine solche Menge U ist etwa $\{z \in \mathring{\mathcal{F}}_n \mid \det(\mathrm{Im}(z)) < c\}$ mit einer Konstanten $c > 0$.

existiert. Es ist leicht zu sehen, dass sie stetig ist und somit auf dem Kompaktum $\overline{U}$ ein Maximum und ein (positives) Minimum annimmt. #

Für ein beliebiges $z \in \overline{U}$ und ein beliebiges $M \in \Gamma_n$ gibt es daher und wegen der Kompaktheit von $\overline{U}$ Konstanten $c_1, c_2, c_3 > 0$ mit

$$\begin{aligned}
|(h_1|_k M)(z_0)| &= |h_1(M\langle z_0\rangle) j(M,z_0)^{-k}| \\
&= |\det(\mathrm{Im}((M\langle z_0\rangle)_1))| \cdot \left|\frac{\det(\mathrm{Im}(M\langle z_0\rangle))}{\det(\mathrm{Im}(z_0))}\right|^{\frac{k}{2}} \\
&\leq \det(y_0)^{-\frac{k}{2}} \cdot c_1 \cdot |\det(\mathrm{Im}((M\langle z\rangle)_1))|^{-\frac{k}{2}} \cdot c_2 \cdot |\det(\mathrm{Im}(M\langle z\rangle))|^{\frac{k}{2}} \\
&\leq c_3 \cdot \left|\frac{\det(\mathrm{Im}(M\langle z\rangle))}{\det(\mathrm{Im}((M\langle z\rangle)_1))}\right|^{\frac{k}{2}}.
\end{aligned}$$

Wir führen nun ein Volumenelement $\mathrm{d}w := \det(y)^{-(n+1)} \cdot \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ mit

$$\mathrm{d}x = \prod_{k\leq \ell} \mathrm{d}x_{k\ell} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}y = \prod_{k\leq \ell} \mathrm{d}y_{k\ell} \tag{2.17}$$

auf $\mathbb{H}_n$ ein. Dieses erfüllt

$$\mathrm{vol}(U) := \int_U \mathrm{d}w = \int_{\overline{U}} \det(y)^{-(n+1)} \cdot \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq c \cdot \int_{\overline{U}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y > 0 \quad \text{mit } c > 0 \text{ geeignet},$$

da die stetige Funktion $\det(y)^{-(n+1)}$ auf dem Kompaktum $\overline{U}$ beschränkt und das Lebesguemaß $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ regulär ist. Mit dem Obigen folgt daher

$$|(h_1|_k M)(z_0)| = \frac{1}{\mathrm{vol}(U)} \cdot \int_{\overline{U}} |(h_1|_k M)(z_0)|\,\mathrm{d}w \leq \frac{c_3}{\mathrm{vol}(U)} \cdot \int_U \left(\frac{\det(\mathrm{Im}(M\langle z\rangle))}{\det(\mathrm{Im}((M\langle z\rangle)_1))}\right)^{\frac{k}{2}} \mathrm{d}w.$$

Für die Konvergenz der absoluten Majorante in z_0 genügt es also, die Konvergenz der Reihe

$$r := \sum_{M\in\Gamma_{n,j}\backslash\Gamma_n} \int_U \left(\frac{\det(\mathrm{Im}(M\langle z\rangle))}{\det(\mathrm{Im}((M\langle z\rangle)_1))}\right)^{\frac{k}{2}} \mathrm{d}w$$

zu zeigen. Letztere lässt sich mit dem folgenden Lemma noch etwas vereinfachen.

Lemma 2.38. *Das Volumenelement* $\mathrm{d}w$ *ist invariant unter Substitutionen mit* $M \in \Gamma_n$.

Beweis. Um dies beweisen zu können, müssen wir die Funktionaldeterminante des durch $z \mapsto M\langle z\rangle$ induzierten Koordinatenwechsels und damit auch die Ableitung dieser Abbildung bestimmen.

Sei dafür allgemein $D \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $f\colon D \to \mathbb{C}^m$ eine holomorphe Funktion.[41] Unter der ***Ableitung*** von f in einem Punkt $z_0 \in D$ verstehen wir dann analog zur reellen Analysis die durch die ***Jacobimatrix***

$$J(f, z_0) := \left(\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\right)_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq k\leq m}}$$

[41] Also eine Funktion, deren m Koordinatenfunktionen allesamt holomorph im Sinne von Definition 2.1 sind.

induzierte lineare Abbildung

$$df(z_0)\colon \begin{cases} \mathbb{C}^n & \to \mathbb{C}^m, \\ z & \mapsto J(f,z_0)z. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist dadurch gekennzeichnet, dass in der Potenzreihenentwicklung von

$$f(z) - f(z_0) - df(z_0)(z - z_0)$$

keine linearen Terme auftreten.

Speziell ist die Ableitung der zur Matrix $M \in \Gamma_n$ gehörigen Möbius-Transformation im Punkt $z_0 \in \mathbb{H}_n$ durch die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}} & \to & \mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}, \\ z & \mapsto & {}^t(c_M z_0 + d_M)^{-1} z (c_M z_0 + d_M)^{-1} \end{array}$$

gegeben, die Determinante $\det(c_M z_0 + d_M)^{-(n+1)}$ hat,

denn: Dies müssen wir nur für die Erzeugenden der symplektischen Gruppe zeigen, also nur für die Matrizen S und T_b mit symmetrischem b. Da die Aussage für die Matrizen T_b trivial ist, bleibt uns, die Aussage für S zu zeigen. Dann lautet die behauptete Ableitung

$$z \mapsto {}^t(c_M z_0 + d_M)^{-1} z (c_M z_0 + d_M)^{-1} = z_0^{-1} z z_0^{-1}.$$

Wir müssen also zeigen, dass die partiellen Ableitungen der Funktion

$$\begin{aligned} S\langle z\rangle - S\langle z_0\rangle - z_0^{-1}(z - z_0)z_0^{-1} &= -z^{-1} + 2z_0^{-1} - z_0^{-1} z z_0^{-1} \\ &= -(z^{-1} - z_0^{-1}) z (z^{-1} - z_0^{-1}) \end{aligned}$$

im Punkt z_0 verschwinden. Das ist mit der Produktformel für Ableitungen offensichtlich. Die Aussage über die Determinante der Ableitung folgt direkt aus Übungsaufgabe 2.5. #

Sei nun $f\colon \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ irgendeine holomorphe Funktion, so dass das Integral $\int_{\mathbb{H}_n} f(z)\, dw$ konvergiert. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}_n} f(M\langle z\rangle)\, dw &= \int_{\mathbb{H}_n} f(M\langle z\rangle) \det(y)^{-(n+1)}\, dx\, dy \\ &= \int_{\mathbb{H}_n} f(M\langle z\rangle)\ |j(M,z)|^{2(n+1)} \det(y)^{-(n+1)} |j(M,z)|^{-2(n+1)}\, dx\, dy \\ &\overset{(1.20)}{=} \int_{\mathbb{H}_n} f(M\langle z\rangle) \det(\mathrm{Im}(M\langle z\rangle))^{-(n+1)} |j(M,z)|^{-2(n+1)}\, dx\, dy \\ &= \int_{\mathbb{H}_n} f(M\langle z\rangle) \det(\mathrm{Im}(M\langle z\rangle))^{-(n+1)}\, d\mathrm{Re}(M\langle z\rangle)\, d\mathrm{Im}(M\langle z\rangle) \\ &= \int_{\mathbb{H}_n} f(z) \det(y)^{-(n+1)}\, dx\, dy \\ &= \int_{\mathbb{H}_n} f(z)\, dw, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt ausgenutzt haben, dass die durch M gegebene Möbius-Transformation eine biholomorphe Selbstabbildung des Siegel'schen Halbraums ist. Dies zeigt das Lemma. □

Nach Lemma 2.38 gilt unter der Variablensubstitution $z \mapsto M^{-1}\langle z\rangle$ mit $M \in \Gamma_n$ beliebig

$$\int_U \left(\frac{\det(\mathrm{Im}(M\langle z\rangle))}{\det(\mathrm{Im}((M\langle z\rangle)_1))}\right)^{\frac{k}{2}} \mathrm{d}w = \int_{M\langle U\rangle} \left(\frac{\det(y)}{\det(y_1)}\right)^{\frac{k}{2}} \mathrm{d}w$$

und damit

$$r = \int_{\tilde{U}} \left(\frac{\det(y)}{\det(y_1)}\right)^{\frac{k}{2}} \mathrm{d}w \quad \text{mit } \tilde{U} = \bigsqcup_{M\in\Gamma_{n,j}\backslash\Gamma_n} M\langle U\rangle. \tag{2.18}$$

Offensichtlich sind je zwei Punkte aus $\tilde{U}$ inäquivalent unter der Aktion von $\Gamma_{n,j}$.

Lemma 2.39. *Sei $V \subseteq \mathbb{H}_n$ eine beliebige offene Menge mit $\bigcup_{M\in\Gamma_{n,j}} M\langle V\rangle = \mathbb{H}_n$, und sei*

$$V(c) = \{z = x + iy \in V \mid \det(y) < c\}$$

mit einer Konstanten $c > 0$, die

$$\det(\mathrm{Im}(M\langle z\rangle)) < c \quad \textit{für alle } z \in \tilde{U} \textit{ und alle } M \in \Gamma_n$$

erfüllt.[42] *Dann gilt für jede $\Gamma_{n,j}$-invariante integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{H}_n \to \mathbb{R}_{>0}$*

$$\int_{\tilde{U}} f(z)\,\mathrm{d}w \le \int_{V(c)} f(z)\,\mathrm{d}w.$$

Beweis. Zu jedem Punkt $z_0 \in \tilde{U}$ gibt es ein $M \in \Gamma_{n,j}$ mit $M\langle z_0\rangle \in V$. Da V offen ist, gibt es auch eine kleine offene Umgebung U_0 von z_0 mit $M\langle U_0\rangle \subseteq V$. Die Aussage ist klar, wenn der Träger von f in U_0 enthalten ist. Der allgemeine Fall folgt, da sich jede stetige Funktion beliebig gut durch endliche Summen von Funktionen mit beliebig kleinem Träger approximieren lässt. □

Wir betrachten nun für alle $1 \le j \le n$ den Bereich $\mathcal{F}_{n,j}$ als den Abschluss in $\mathbb{H}_n$ der Menge aller Punkte $z = x + iy$ in $\mathbb{H}_n$ mit

$$y = \begin{pmatrix} y_1^{(j)} & 0 \\ 0 & y'' \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1_j & b \\ 0 & 1_{n-j} \end{pmatrix}\right],$$

die folgende Bedingungen erfüllen.

(i) $z_1^{(j)} \in \mathcal{F}_j$,

(ii) $y'' \in \mathcal{R}_{n-j}$,

(iii) b ist reduziert modulo 1,

(iv) x ist reduziert modulo 1.

[42] Die Existenz einer solchen Konstante ergibt sich analog zu den Überlegungen bei der Konstruktion von r, weil die nach Lemma 1.55 existente Funktion $\max_{M\in\Gamma_n} \det(\mathrm{Im}(M\langle z\rangle))$ im kompakten Abschluss von $\tilde{U}$ in $\mathbb{H}_n$ ein Maximum annimmt.

Lemma 2.40. *$\mathcal{F}_{n,j}$ ist ein Fundamentalbereich für die Aktion von $\Gamma_{n,j}$ auf $\mathbb{H}_n$.*

Beweis. $\mathcal{F}_{n,j}$ ist nach Konstruktion abgeschlossen, und Bedingung (i) von Definition 1.28 somit erfüllt. Wir zeigen nun nur noch Bedingung (ii) von Definition 1.28, dass es nämlich für alle $z \in \mathbb{H}_n$ ein $M \in \Gamma_{n,j}$ mit $M\langle z\rangle \in \mathcal{F}_{n,j}$ gibt. Der Rest ist Übungsaufgabe 2.6.

Wie in Lemma 2.31 sei $M_1 = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{smallmatrix}\right)$ aus Γ_j. Aus dem dortigen Beweis wissen wir, dass

$$M := M_1 \,{}_j{\times}_{n-j}\, 1_{2(n-j)} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 1_{n-j} & 0 & 0_{n-j} \\ c_1 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0_{n-j} & 0 & 1_{n-j} \end{pmatrix}$$

in $\Gamma_{n,j}$ liegt. Offensichtlich gilt hierbei $(M\langle z\rangle)_1 = M_1\langle z_1\rangle$. Wegen $z_1 \in \mathbb{H}_j$ können wir M_1 so wählen, dass $M_1\langle z_1\rangle$ in $\mathcal{F}_j$ liegt, dass also Bedingung (i) erfüllt ist.

Sei $u = \left(\begin{smallmatrix} 1_j & 0 \\ 0 & u'' \end{smallmatrix}\right)$ mit $u'' \in U_{n-j}$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & {}^t u^{-1} \end{pmatrix} \langle z\rangle = z[{}^t u],$$

so dass offensichtlich Bedingung (i) erhalten bleibt. Diese Aktion lässt sich auf den Imaginärteil einschränken, wobei wir

$$\begin{aligned} y[{}^t u] &= \begin{pmatrix} y_1^{(j)} & 0 \\ 0 & y'' \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1_j & b \\ 0 & 1_{n-j} \end{pmatrix}\right] \left[\begin{pmatrix} 1_j & 0 \\ 0 & {}^t u'' \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} y_1^{(j)} & 0 \\ 0 & y'' \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1_j & 0 \\ 0 & {}^t u'' \end{pmatrix}\right] \left[\begin{pmatrix} 1_j & b\,{}^t u'' \\ 0 & 1_{n-j} \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} y_1^{(j)} & 0 \\ 0 & y''[{}^t u''] \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1_j & b\,{}^t u'' \\ 0 & 1_{n-j} \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

erhalten. Auf diese Weise können wir auch Bedingung (ii) erzwingen.

Aus der gerade durchgeführten Rechnung ist klar, dass bei Anwendung der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & {}^t u^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ für $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit passendem b die Bedingungen (i) und (ii) erhalten bleiben und Bedingung (iii) erreicht werden kann.

Schließlich sind Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} 1_n & s \\ 0 & 1_n \end{smallmatrix}\right)$ mit $s \in \mathrm{Symm}_n(\mathbb{R})$ in $\Gamma_{n,j}$, und die Substitutionen $z \mapsto z + s$ zerstören offensichtlich die Bedingungen (i)-(iii) nicht. So erreichen wir Bedingung (iv) und insgesamt die Behauptung. □

Nach den Lemmata 2.39 und 2.40 und (2.18) reduziert sich nun der Beweis von Proposition 2.35 darauf, die Konvergenz des Integrals

$$\int_{\substack{\mathcal{F}_{n,j} \\ \det(y)<c}} \det(y'')^{\frac{k}{2}}\, dw \quad \text{mit } c > 0$$

für $k > 2n$ zu zeigen.[43] Dieses schreiben wir dafür um. Zum einen ist mit $z \in \mathcal{F}_{n,j}$ auch $y_1^{(j)} \in \mathcal{R}_j$, so dass in diesem Fall $\det(y_1^{(j)})$ nach Lemma 1.53 durch eine positive Konstante nach unten beschränkt ist. Es ist daher $\det(y) = \det(y_1^{(j)}) \cdot \det(y'')$ genau dann nach oben beschränkt, wenn das auch auf $\det(y'')$ zutrifft. Die Proposition folgt also, wenn wir die Konvergenz des Integrals

$$\int_{\substack{\mathcal{F}_{n,j} \\ \det(y'')<c}} \det(y'')^{\frac{k}{2}} \, \mathrm{d}w \quad \text{mit } c > 0$$

für $k > 2n$ zeigen können.

Dafür betrachten wir das Differential genauer. Es gilt

$$\mathrm{d}w = \det(y)^{-(n+1)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \det(y)^{-(n+1)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y_1^{(j)} \, \mathrm{d}y_2^{(j)} \, \mathrm{d}y_4^{(j)}.$$

Andererseits gilt ja $y_2^{(j)} = y_1^{(j)} b$ und $y_4^{(j)} = y_1^{(j)}[b] + y''$, so dass wir die Funktionaldeterminante zu

$$\det \frac{\partial(y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, y_4^{(j)})}{\partial(y_1^{(j)}, b, y'')} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & \frac{\partial y_2^{(j)}}{\partial b} & 0 \\ * & * & \frac{\partial y_4^{(j)}}{\partial y''} \end{pmatrix} = \det \frac{\partial y_2^{(j)}}{\partial b} \cdot \det \frac{\partial y_4^{(j)}}{\partial y''} = \det(y_1^{(j)})^{n-j}$$

berechnen. Es folgt, dass wir zum Beweis der Konvergenz der Eisensteinreihen für $c > 0$ und $k > 2n$ die Konvergenz des Integrals

$$\begin{aligned} &\int_{\substack{\mathcal{F}_{n,j} \\ \det(y'')<c}} \det(y_1^{(j)})^{n-j-(n+1)} \det(y'')^{\frac{k}{2}-(n+1)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y_1^{(j)} \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}y'' \\ &= \int_{\mathcal{F}_j} \det(y_1^{(j)})^{-(j+1)} \, \mathrm{d}x_1^{(j)} \, \mathrm{d}y_1^{(j)} \cdot \int_{\substack{\mathcal{R}_{n-j} \\ \det(y'')<c}} \det(y'')^{\frac{k}{2}-(n+1)} \, \mathrm{d}y'' \\ &= \mathrm{vol}(\mathcal{F}_j) \cdot \int_{\substack{\mathcal{R}_{n-j} \\ \det(y'')<c}} \det(y'')^{\frac{k}{2}-(n+1)} \, \mathrm{d}y'' \end{aligned}$$

zeigen müssen. Nach (1.27) ist $\mathrm{vol}(\mathcal{F}_j)$ endlich, so dass wir nur noch den zweiten Faktor zu untersuchen brauchen. Für den Exponenten dort kommen alle ganzen Zahlen größer als -1 infrage. Die Konvergenz folgt also aus dem folgenden

Lemma 2.41. *Sei $c > 0$ beliebig. Dann konvergiert für $k > -\frac{n+1}{2}$ das Integral*

$$\int_{\substack{y \in \mathcal{R}_n \\ \det(y)<c}} \det(y)^k \, \mathrm{d}y.$$

Beweis. Nach der Hadamard- und der Minkowski-Ungleichung 1.31 bzw. 1.47 (d) lässt sich $\det(y)$ ja in beide Richtungen durch eine positive Konstante mit dem Produkt der Diagonaleinträge $y_{11} \cdot \ldots \cdot y_{nn}$ abschätzen. Zum Beweis des Lemmas genügt es also, für alle $k > -\frac{n+1}{2}$ und

[43] Wir nutzen hier aus, dass wir nach Lemma 2.40 in Lemma 2.39 für V eine beliebige offene Obermenge von $\mathcal{F}_{n,j}$ wählen dürfen und dass der Rand von $V(c)$ eine Nullmenge ist.

$c > 0$ die Konvergenz des Integrals

$$I := \int_{\substack{y \in \mathcal{R}_n \\ \prod y_{jj} < c}} (y_{11} \cdot \ldots \cdot y_{nn})^k \, \mathrm{d}y$$

zu zeigen. Wie wir wissen, ist I eine positive reelle Zahl, die wir wie folgt nach oben abschätzen können. Da y Minkowski-reduziert ist, gelten

$$|y_{j\ell}| \leq \frac{1}{2} \cdot y_{jj} \text{ für alle } j \neq \ell \quad \text{und} \quad y_{11} \leq \ldots \leq y_{nn}.$$

Integrieren wir in I über die Nichtdiagonalvariablen, so erhalten wir daher

$$I \leq \int_{\substack{\prod y_{jj} < c \\ y_{11} \leq \ldots \leq y_{nn}}} \prod_{j=0}^{n-1} y_{n-j,n-j}^{k+j} \, \mathrm{d}y_{11} \ldots \mathrm{d}y_{nn}.$$

Wir substituieren nun

$$t_1 := y_{11} \cdot \ldots \cdot y_{nn}, \; t_2 := \frac{y_{22}}{y_{11}}, \; \ldots, \; t_n := \frac{y_{nn}}{y_{11}}.$$

Die entsprechende Funktionaldeterminante lautet

$$\det \frac{\partial(t_1, \ldots, t_n)}{\partial(y_{11}, \ldots, y_{nn})} = \det \begin{pmatrix} \prod_{j \neq 1} y_{jj} & \cdots & \cdots & \cdots & \prod_{j \neq n} y_{jj} \\ -\frac{y_{22}}{y_{11}^2} & \frac{1}{y_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\frac{y_{nn}}{y_{11}^2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{y_{11}} \end{pmatrix} = n y_{11}^{-n} \prod_{j=1}^{n} y_{jj},$$

was man leicht durch eine Laplaceentwicklung nach der ersten Zeile errechnet, und die Integrationsgrenzen ändern sich ab auf

$$0 < t_1 < c, \; 1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n.$$

Für die Abschätzung von I folgt dann

$$\begin{aligned} I &\leq n^{-1} \cdot \int \Big(\prod_{j=0}^{n-1} y_{n-j,n-j}^{k}\Big) \Big(\prod_{j=0}^{n-1} y_{n-j,n-j}^{j}\Big) \big(y_{11}^{n} t_1^{-1}\big) \, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n \\ &= n^{-1} \cdot \int t_1^{k-1} y_{11}^{n} \Big(\prod_{j=0}^{n-1} y_{n-j,n-j}^{j}\Big) \, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n \\ &= n^{-1} \cdot \int t_1^{k+\frac{n-1}{2}} y_{11}^{n} \Big(\prod_{j=0}^{n-1} y_{n-j,n-j}^{j-\frac{n+1}{2}}\Big) \, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n \\ &= n^{-1} \cdot \int t_1^{k+\frac{n-1}{2}} \prod_{j=0}^{n-1} \Big(\frac{y_{11}}{y_{n-j,n-j}}\Big)^{\frac{n+1}{2}-j} \, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n \end{aligned}$$

$$= n^{-1} \cdot \int_0^c t_1^{k+\frac{n-1}{2}} \,\mathrm{d}t_1 \cdot \int_{1 \le t_2 \le \ldots \le t_n} \prod_{j=2}^{n} t_j^{\frac{n-1}{2}-j} \,\mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_n,$$

wobei wir im vorletzten Schritt $n = \sum_{j=0}^{n-1} (\frac{n+1}{2} - j)$ und im letzten Schritt die Definition der neuen Variablen $t_2, \ldots, t_n$ benutzt haben. Das zweite Integral berechnet man leicht mit partieller Integration und stellt fest, dass es konvergiert. Das erste Integral konvergiert für $k + \frac{n-1}{2} > -1$, was das Lemma zeigt. □

Nachdem wir nun die Konvergenz der Klingen'schen Eisensteinreihen vollständig bewiesen haben, müssen wir zum Beweis von Satz 2.29 nur noch (2.11), also die folgende Proposition, zeigen.

Proposition 2.42. *Für jede Spitzenform $f \in S_k^j$ gilt*

$$E_k^{n,j}(f;\cdot)|\Phi^{n-j} = f.$$

Beweis. Der zur Nebenklasse $\Gamma_{n,j}$ gehörige Term in $E_k^{n,j}(f;z)$ ist gerade $[f]_j^n(z) = f(z_1)$. Da wir aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz den Siegel-Operator gliedweise anwenden dürfen, genügt es uns also zu zeigen, dass alle anderen Terme der Eisensteinreihe annulliert werden. Andererseits haben wir im Beweis von Lemma 2.36 insbesondere gezeigt, dass für jede Linksnebenklasse $\Gamma_{n,j}M$ die Funktion $|(h_1|_kM)(z)|$ eine absolute Majorante des entsprechenden Summanden $([f]_j^n|_kM)(z)$ von $E_k^{n,j}(f;z)$ ist. Die Proposition folgt also, wenn wir

$$\lim_{r \to \infty} (h_1|_kM) \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & ir1_{n-j} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{für alle } M \notin \Gamma_{n,j}$$

zeigen können. Es gilt

$$\left| (h_1|_kM) \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & ir1_{n-j} \end{pmatrix} \right|^2 = \det(\mathrm{Im}(z_1))^{-k} P(r)^{-k}$$

mit $P(r) := \det(p'(r) + p''(r))$ und

$$\begin{aligned} p'(r) &:= r\big((c_M)_3 z_1 + (d_M)_3\big) \,\mathrm{Im}(z_1)^{-1}\, {}^t\big(\overline{(c_M)_3 z_1 + (d_M)_3}\big), \\ p''(r) &:= \big(ir(c_M)_4 + (d_M)_4\big)\, {}^t\big(\overline{ir(c_M)_4 + (d_M)_4}\big), \end{aligned}$$

denn: Sei zunächst y ein beliebiges Element von $\mathbb{P}_n$. Genau wie im Beweis der Jacobizerlegung gibt es dann ein $y'' \in \mathbb{P}_{n-j}$ und eine symmetrische Matrix b mit

$$y = \begin{pmatrix} y_1^{(j)} & 0 \\ 0 & y'' \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

und mit

$$\det(y_1) \cdot \det(y)^{-1} = \det(y'')^{-1} = \det(y_4 - y_1^{-1}[y_2])^{-1}.$$

Setzen wir nun
$$y = \mathrm{Im}\left(M\langle \begin{pmatrix} z_1^{(j)} & 0 \\ 0 & ir1_{n-j} \end{pmatrix} \rangle \right),$$
so folgt die Behauptung mit dem Transformationsverhalten von $\mathrm{Im}(z)$ und h_1 unter $\Gamma_{n,j}$, siehe (1.11) und (2.12). #

Offenbar ist P ein Polynom in r. Unsere Behauptung lautet $\lim_{r\to\infty} P(r)^{-1} = 0$. Mit dem Wachstumslemma für Polynome ist das äquivalent dazu, dass P für $M \notin \Gamma_{n,j}$ nicht konstant ist. Nehmen wir also an, $P(r) = P(0)$ sei konstant. Für $r > 0$ sind $p'(r)$ und $p''(r)$ positiv semidefinite Hermite'sche Matrizen. Da die Determinante von $p'(r) + p''(r)$ nicht verschwindet, ist $p'(r) + p''(r)$ als Summe positiv semidefiniter Matrizen sogar positiv definit. Es folgt
$$0 < \det(p'(r) + p''(r)) = \det(p'(0) + p''(0)) = \det(p''(0)).$$
Da für positive r die Ungleichung $p''(r) \leq p'(r) + p''(r)$ gilt, erhalten wir für solche r
$$\det(p''(r)) \leq \det(p'(r) + p''(r)) = \det(p''(0)).$$
Das Polynom $\det(p''(r))$ ist somit für positive r beschränkt, nach dem Wachstumslemma für Polynome also konstant für alle r. Aus der Gleichung
$$0 < \det(p'(r) + p''(r)) = \det(p''(0)) = \det(p''(r)) \tag{2.19}$$
folgt $p'(r) \equiv 0$ und damit $c_3 = d_3 = 0$,

denn: Da $p'(r)$ als Polynom in r nur aus einem linearen Term besteht, genügt es zum Beweis der ersten Behauptung offenbar $p'(1) = 0$ zu zeigen; die zweite Behauptung folgt dann aus der genauen Form des Koeffizienten.

Da $p'(1)$ positiv semidefinit ist, gibt es eine unitäre Matrix u, so dass ${}^t\bar{u}p'(1)u$ gleich einer Diagonalmatrix d ist. Aus (2.19) folgt dann
$$\det(d + w) = \det(w) \quad \text{mit } w := {}^t\bar{u}p''(1)u.$$
Seien $s_1(d), \ldots, s_n(d)$ die Spalten von d und $s_1(w), \ldots, s_n(w)$ die Spalten von w. Dann gilt natürlich
$$d + w = \big(s_1(d) + s_1(w), \ldots, s_n(d) + s_n(w)\big).$$
Da die Determinante linear in den Spalten ist, folgt
$$\det(d + w) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_j\leq n} d_{i_1,i_1} \cdot \ldots \cdot d_{i_j,i_j} \cdot \det(w_{i_1,\ldots,i_j}),$$
wobei $w_{i_1,\ldots,i_j}$ diejenige Matrix ist, die man erhält, wenn man in w die Spalten mit den Indizes $i_1, \ldots, i_j$ durch die jeweiligen Standardbasisvektoren $e_{i_1}, \ldots, e_{i_j}$ ersetzt. Aus $\det(d + w) = \det(w)$ folgt dann
$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_j\leq n} d_{i_1,i_1} \cdot \ldots \cdot d_{i_j,i_j} \cdot \det(w_{i_1,\ldots,i_j}) = 0.$$

Da wegen (2.19) die Matrix $p''(1)$ und damit auch w positiv definit ist, sind die Zahlen $\det(w_{i_1,\dots,i_j})$ alle positiv. Da andererseits die Diagonaleinträge $d_{i_1,i_1}, \dots, d_{i_n,i_n}$ alle nicht-negativ sind, folgt

$$d_{i_1,i_1} = \dots = d_{i_n,i_n} = 0,$$

und somit $d = 0$, also $p'(1) \equiv 0$ wie verlangt. #

Mit $c^t d = d^t c$ folgt daraus $c_4{}^t d_4 = d_4{}^t c_4$ und daher

$$p''(r) = d_4{}^t d_4 + r^2 c_4{}^t c_4.$$

Insbesondere gilt dann

$$\det\left(d_4{}^t d_4 + r^2 c_4{}^t c_4\right) = \det(p''(r)) = \det(p''(0)) = \det\left(d_4{}^t d_4\right),$$

also

$$\det\left(1_{n-j} + r^2 c_4{}^t c_4[{}^t d_4^{-1}]\right) = 1$$

beziehungsweise

$$\det\left(r^{-2} 1_{n-j} + c_4{}^t c_4[{}^t d_4^{-1}]\right) = (r^{-2})^{n-j}.$$

Daraus können wir das charakteristische Polynom

$$\operatorname{charpoly}(-c_4{}^t c_4[{}^t d_4^{-1}], X) = X^{n-j}$$

ablesen. Offensichtlich sind alle Eigenwerte dieser Matrix Null. Da symmetrische reelle Matrizen immer eine Basis aus Eigenvektoren besitzen, muss sogar die Matrix selbst Null sein. Nun ist wegen $\det(p''(0)) > 0$ die Matrix d_4 invertierbar, so dass wir $c_4{}^t c_4 = 0$ und somit $c_4 = 0$ folgern können.

Mit den Symplektizitätskriterien (1.2) und (1.3) zeigt man leicht, dass dann auch $a_2 = c_2 = 0$ gilt. Insgesamt haben wir also bewiesen, dass M in $\mathrm{Sp}_{n,j}(\mathbb{R})$ liegen muss, wenn $P(r)$ als Polynom in r konstant ist. Die Proposition folgt. □

Zum Abschluss dieses Abschnitts zeigen wir noch ein Korollar von Satz 2.29.

Korollar 2.43. *Für gerades $k > 2n$ spannen die Eisensteinreihen*

$$\{E_k^{n,j}(f;\cdot) \mid f \in S_k^j,\ 0 \le j \le n\}$$

den Vektorraum M_k^n auf.

Beweis. Sei $f \in M_k^n$ beliebig. Dann liegt $f|\Phi^n$ in $S_k^0 = M_k^0$, so dass es eine Eisensteinreihe $E_k^{n,0}$ gibt mit $E_k^{n,0}|\Phi^n = f|\Phi^n$.

Es folgt, dass $(f - E_k^{n,0})|\Phi^{n-1}$ eine Spitzenform vom Grad 1 ist, so dass es eine Eisensteinreihe $E_k^{n,1}$ gibt mit $E_k^{n,1}|\Phi^{n-1} = (f - E_k^{n,0})|\Phi^{n-1}$.

Nun folgt, dass $(f - E_k^{n,0} - E_k^{n,1})|\Phi^{n-2}$ eine Spitzenform vom Grad 2 ist, so dass wir eine Eisensteinreihe $E_k^{n,2}$ finden, usw. Iterativ erhalten wir

$$f - \sum_{j=0}^{n-1} E_k^{n,j} \in S_k^n.$$

Die Behauptung folgt, da jede Spitzenform in S_k^n als Eisensteinreihe vom Typ $E_k^{n,n}$ angesehen werden kann. □

2.6 Das Petersson-Skalarprodukt und die Zerlegung von M_k^n

Im letzten Abschnitt haben wir eingesehen, dass der Raum der Modulformen von Eisensteinreihen aufgespannt wird. Das Ziel dieses Abschnitts ist nun, die Eisensteinreihen besser kennenzulernen, um eine etwas feinere Aussage zeigen zu können, wie etwa die aus dem Fall $n = 1$ bekannte Zerlegung

$$M_k^1 = S_k^1 \oplus \mathbb{C} \cdot E_k^1$$

für $k \geq 4$. Hierzu führen wir auf M_k^n ein Skalarprodukt ein.

Definition 2.44. *Seien f und g Modulformen aus M_k^n, von denen mindestens eine eine Spitzenform ist. Dann heißt der Wert des Integrals*

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathcal{F}_n} f(z)\overline{g(z)} \det(y)^k \, \mathrm{d}w$$

das ***Petersson'sche Skalarprodukt*** *von f und g.*

Diese Definition ist in folgendem Sinne sinnvoll.

Satz 2.45. (a) *Das Integral $\langle f, g \rangle$ konvergiert absolut, und es gilt*

$$\int_{\mathcal{F}_n} f(z)\overline{g(z)} \det(y)^k \, \mathrm{d}w = \int_{\mathcal{F}'_n} f(z)\overline{g(z)} \det(y)^k \, \mathrm{d}w$$

für jeden beliebigen Fundamentalbereich $\mathcal{F}'_n$ für die Aktion von Γ_n auf $\mathbb{H}_n$.

(b) *Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist sesquilinear und definiert auf den $\mathbb{C}$-Vektorraum S_k^n eingeschränkt ein Skalarprodukt, was den Namen rechtfertigt.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist fg in S_{2k}^n. Nach Lemma 2.26 ist daher

$$|f(z)g(z)| \det(y)^k = |f(z)\overline{g(z)} \det(y)^k|$$

invariant unter Γ_n und auf $\mathbb{H}_n$ beschränkt. Weiter ist nach Lemma 2.38 das Differential $\mathrm{d}w$ invariant unter Γ_n. Die Konvergenz des Integrals folgt mit der Endlichkeit des Volumens von $\mathcal{F}_n$.

Wir müssen noch zeigen, dass das Integral unabhängig vom Fundamentalbereich ist, über den integriert wird. Wir zeigen dafür allgemeiner die folgende

Behauptung *Seien f eine Lebesgue-messbare, Γ_n-invariante Funktion und $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ zwei Fundamentalbereiche, deren Ränder messbar und Nullmengen sind. Falls $\int_{\mathcal{G}_1} f \,\mathrm{d}w$ absolut konvergiert, konvergiert auch $\int_{\mathcal{G}_2} f \,\mathrm{d}w$, und es gilt*

$$\int_{\mathcal{G}_1} f \,\mathrm{d}w = \int_{\mathcal{G}_2} f \,\mathrm{d}w,$$

denn: Sei $\overline{\Gamma}_n := \Gamma_n / \{\pm 1_{2n}\}$. Da $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ Fundamentalmengen sind, gilt

$$\mathbb{H}_n = \bigcup_{M \in \overline{\Gamma}_n} M^{-1}\langle \mathcal{G}_1 \rangle = \bigcup_{M \in \overline{\Gamma}_n} M\langle \mathcal{G}_2 \rangle.$$

Da $\mathcal{G}_1$ ein Fundamentalbereich ist, gilt $M\langle \mathring{\mathcal{G}}_1 \rangle \cap \tilde{M}\langle \mathring{\mathcal{G}}_1 \rangle = \varnothing$ für alle $M \neq \tilde{M}$ in $\overline{\Gamma}_n$. Betrachten wir nun für ein festes $M \in \overline{\Gamma}_n$ die Durchschnitte $M\langle \mathcal{G}_1 \rangle \cap \tilde{M}\langle \mathcal{G}_1 \rangle$ mit irgendwelchen $\tilde{M} \in \overline{\Gamma}_n$. Da $\mathcal{G}_1$ ein Fundamentalbereich ist, gibt es nur endlich viele $\tilde{M}$, für die diese Durchschnitte nicht leer sind, und wegen dem gerade Erläuterten liegen die Schnittpunkte alle auf dem Rand von $\mathcal{G}_1$, also in einer Nullmenge. Die selbe Argumentation gilt natürlich für $\mathcal{G}_2$ statt $\mathcal{G}_1$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{G}_1} f \,\mathrm{d}w &= \int_{\bigcup_{M \in \overline{\Gamma}_n} (\mathcal{G}_1 \cap M\langle \mathcal{G}_2 \rangle)} f(z) \,\mathrm{d}w \\ &= \sum_{M \in \overline{\Gamma}_n} \int_{\mathcal{G}_1 \cap M\langle \mathcal{G}_2 \rangle} f(z) \,\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

Wir substituieren nun in jedem (der endlich vielen) Summanden z durch $M^{-1}\langle z \rangle$. Da sowohl f als auch $\mathrm{d}w$ invariant unter $\overline{\Gamma}_n$ sind, ändert sich dabei am Integranden nichts, und wir erhalten

$$\int_{\mathcal{G}_1} f \,\mathrm{d}w = \sum_{M \in \overline{\Gamma}_n} \int_{M^{-1}\langle \mathcal{G}_1 \rangle \cap \mathcal{G}_2} f(z) \,\mathrm{d}w = \int_{\mathcal{G}_2} f \,\mathrm{d}w.$$

#

Wir haben nun Behauptung (a) gezeigt.

Behauptung (b) ist leicht nachzurechnen (Übung!). □

Wir können nun das Petersson-Skalarprodukt dazu verwenden, das Orthokomplement

$$(S_k^n)^\perp := \{g \in M_k^n \mid \langle f, g \rangle = 0 \text{ für alle } f \in S_k^n\}$$

von S_k^n in M_k^n zu definieren. Da M_k^n endlichdimensional ist, gilt wie in der Linearen Algebra

$$M_k^n = S_k^n \oplus (S_k^n)^\perp.$$

Die beiden Summanden unterscheiden sich darin, wie der Siegel'sche Φ-Operator auf ihnen operiert: Einerseits annulliert Φ nach Definition S_k^n. Andererseits ist Φ auf $(S_k^n)^\perp$ injektiv, *denn:* Falls Φ ein $f \in (S_k^n)^\perp$ auf Null schickt, so ist $f \in S_k^n$ senkrecht auf sich selbst. Da $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eingeschränkt auf S_k^n positiv definit ist, muss dann f die Nullabbildung sein. #

Im Jahr 1951 entdeckte MAASS[44] eine Verfeinerung dieses Resultats (siehe [Maa]). Diese wollen wir nun herleiten und führen dafür eine Reihe von Untervektorräumen von M_k^n ein.

Definition 2.46.

$$M_k^{n,j} := \begin{cases} S_k^n & \textit{für } 0 \leq j = n, \\ \{f \in (S_k^n)^\perp \mid f|\Phi \in M_k^{n-1,j}\} & \textit{für } 0 \leq j < n. \end{cases}$$

Mit der Surjektivität 2.29 von Φ für gerade $k > 2n$ können wir die folgende Zerlegung des Raums der Modulformen zeigen.

Proposition 2.47. *Für $n \geq 0$ und gerades $k > 2n$ gilt*

$$M_k^n = \bigoplus_{j=0}^{n} M_k^{n,j}.$$

Beweis. Wir zeigen die Proposition per Induktion nach n. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $n \geq 1$. Da Φ nach Voraussetzung und Satz 2.29 surjektiv ist, gilt

$$\Phi((S_k^n)^\perp) = M_k^{n-1} \overset{\text{I.V.}}{=} \bigoplus_{j=0}^{n-1} M_k^{n-1,j} \overset{\text{def.}}{=} \bigoplus_{j=0}^{n-1} \Phi(M_k^{n,j}).$$

Da Φ auf $(S_k^n)^\perp$ eingeschränkt injektiv ist, folgt daraus

$$(S_k^n)^\perp = \bigoplus_{j=0}^{n-1} M_k^{n,j}$$

und zusammen mit $S_k^n = M_k^{n,n}$ also die Proposition. □

Wir können diese Teilräume von M_k^n durch die im letzten Abschnitt eingeführten Klingen'schen Eisensteinreihen beschreiben. Wir folgen dabei dem Beweis von Klingen aus dem Jahr 1968, siehe [Kli1] und [Kli2].

Proposition 2.48. *Sei $n \geq 1$, $0 \leq j \leq n$ und $k > n + j + 1$ gerade. Dann gilt*

$$M_k^{n,j} = \{E_k^{n,j}(f;\cdot) \mid f \in S_k^j\}.$$

Beweis. Unter den Voraussetzungen der Proposition gilt für eine beliebige Spitzenform $f \in S_k^j$

$$E_k^{n,j}(f;\cdot)|\Phi = \begin{cases} E_k^{n-1,j}(f;\cdot) & \text{für } 0 \leq j < n, \\ 0 & \text{für } j = n, \end{cases} \tag{2.20}$$

[44] Hans Maaß (1911-1992)

wobei wir $E_k^{0,0}(f;\cdot)$ als f definieren,

denn: Im Fall $j = n$ gilt nach Definition $E_k^{n,n}(f;\cdot) = f \in S_k^n$, so dass hier die Behauptung trivialerweise stimmt. Für $n = 1$ müssen wir dann nur noch $j = 0$ betrachten. Nach Definition ist $E_k^{0,0}(f;\cdot) = f$, so dass wir die Behauptung in diesem Fall schon in Proposition 2.42 gezeigt haben.

Sei von nun an also $1 < n$ und $j < n$. Wir schreiben wieder

$$E_k^{n,j}(f;z) = \sum_{M \in \Gamma_{n,j} \backslash \Gamma_n} f\big((M\langle z \rangle)_1^{(j)}\big) j(M,z)^{-k}$$

und betrachten

$$z = \begin{pmatrix} z_1^{(n-1)} & 0 \\ 0 & ir \end{pmatrix},$$

um den Siegeloperator anzuwenden. Wegen der unbedingten Konvergenz der Reihe können wir das wieder gliedweise tun. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1. $\Gamma_{n,j} M \cap \Gamma_{n,n-1} \neq \varnothing$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, M liege in $\Gamma_{n,n-1}$. Nach Übungsaufgabe 2.8 ist der Summand

$$f\Big(\big(M\langle \begin{pmatrix} z_1^{(n-1)} & 0 \\ 0 & ir \end{pmatrix} \rangle\big)_1^{(j)}\Big) j\big(M, \begin{pmatrix} z_1^{(n-1)} & 0 \\ 0 & ir \end{pmatrix}\big)^{-k}$$

unabhängig von r und bleibt so unter Anwendung von Φ unverändert erhalten.

Fall 2. $\Gamma_{n,j} M \cap \Gamma_{n,n-1} = \varnothing$. Wir wollen zeigen, dass Φ diese Reihenglieder annulliert. In Lemma 2.36 haben wir eine Majorante der Klingen-Eisensteinreihe gefunden, so dass es für diese Behauptung genügt, für alle infrage kommenden M zu zeigen, dass

$$\left| \det\big(\mathrm{Im} M\langle \begin{pmatrix} z_1^{(n-1)} & 0 \\ 0 & ir \end{pmatrix} \rangle_1^{(j)}\big) \cdot j\big(M, \begin{pmatrix} z_1^{(n-1)} & 0 \\ 0 & ir \end{pmatrix}\big)^2 \right| \tag{2.21}$$

für r gegen unendlich beliebig groß wird. Man kann (2.21) berechnen zu

$$r \cdot \det\Big(y_1^{(n-1)}\Big) \cdot \det\Big(h + r\tilde{c}_4{}^t\tilde{c}_4 + r^{-1}\tilde{d}_4{}^t\tilde{d}_4\Big), \tag{2.22}$$

wobei hier mit den Zerlegungen

$$c_M = \begin{pmatrix} * & * \\ \tilde{c}_3 & \tilde{c}_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d_M = \begin{pmatrix} * & * \\ \tilde{d}_3 & \tilde{d}_4 \end{pmatrix}$$

mit $\tilde{c}_3, \tilde{d}_3$ in $\mathbb{Z}^{(n-j)\times(n-1)}$ gearbeitet wird und

$$h := y_1^{(n-1)}[{}^t\tilde{c}_3] + (y_1^{(n-1)})^{-1}[x_1^{(n-1)}{}^t\tilde{c}_3 + {}^t\tilde{d}_3]$$

gilt. Da der Rang von $\tilde{d}_4{}^t\tilde{d}_4$ höchstens 1 ist, der Determinantenterm also schlimmstenfalls einen Faktor r^{-1} beiträgt, muss (2.22) schon ein Polynom in r sein. Wenn der Grad dieses Polynoms positiv ist, so ist mit dem Wachstumslemma für Polynome die Behauptung gezeigt. Wir wollen nun also zeigen, dass sein Grad nie Null werden kann, und nehmen dafür letzteres an.

Hätte die Matrix $(\tilde{c}_3\ \tilde{d}_3)$ Maximalrang, so wäre h positiv definit (Übung!) und ließe sich via Jacobizerlegung als ein Produkt $h = t_h{}^t t_h$ mit einer oberen Dreiecksmatrix t_h schreiben. Es folgte

$$\det(h+\tilde{h}) = \det(1_{n-j}+\tilde{h}[t_h^{-1}])\cdot\det(t_h)^2 = \det(1_{n-j}+d_{\tilde{h}})\cdot\det(h) \geq \det(h),$$

wobei wir für das letzte Gleichheitszeichen ausgenutzt haben, dass für positives r der Ausdruck $\tilde{h} := r\tilde{c}_4{}^t\tilde{c}_4 + r^{-1}\tilde{d}_4{}^t\tilde{d}_4$ positiv semidefinit ist und sich daher die symmetrische Matrix $\tilde{h}[t_h^{-1}]$ mit orthogonalen Matrizen zu einer positiv semidefiniten Diagonalmatrix $d_{\tilde{h}}$ umformen lässt.

Nach Voraussetzung ist (2.22) eine positive reelle Zahl. Diese kann nach der obigen Überlegung durch

$$r\cdot\det\big(y_1^{(n-1)}\big)\cdot\det(h)$$

nach unten abgeschätzt werden. Daraus folgt $\det(h) = 0$, da ansonsten die untere Schranke mit großem r beliebig groß werden könnte. Es folgt, dass $(\tilde{c}_3\ \tilde{d}_3)$ keinen Maximalrang haben kann, wenn das Polynom Grad Null hat.

Durch Linksmultiplikation von M mit Matrizen aus $\Gamma_{n,j}$ können wir $(\tilde{c}_3\ \tilde{d}_3)$ von links um eine beliebige unimodulare Matrix abändern. Ohne Einschränkung können wir also annehmen, dass die letzte Zeile von $(\tilde{c}_3\ \tilde{d}_3)$ Null ist. Es folgt

$$\tilde{c}_4\cdot(\tilde{d}_4)_{n-j} = \tilde{d}_4\cdot(\tilde{c}_4)_{n-j},$$

denn: Nach dem Symplektizitätskriterium (1.3) ist die Matrix $c_M{}^t d_M$ symmetrisch und somit auch der untere rechte Teil $\tilde{c}_3{}^t\tilde{d}_3 + \tilde{c}_4{}^t\tilde{d}_4$ in ihrer Zerlegung. Ist die letzte Zeile von $(\tilde{c}_3\ \tilde{d}_3)$ Null, so gehen die $(n-j)$-te Zeile und die $(n-j)$-te Spalte von $\tilde{c}_4{}^t\tilde{d}_4$ durch Transponieren ineinander über, was die Behauptung zeigt. #

Wäre hierbei $(\tilde{c}_4)_{n-j}$ ungleich Null, ließe sich (2.22) also

$$r\cdot\det\left(y_1^{(n-1)}\right)\cdot\det\left(h+\left(r+r^{-1}\left(\frac{(\tilde{d}_4)_{n-j}}{(\tilde{c}_4)_{n-j}}\right)^2\right)\tilde{c}_4{}^t\tilde{c}_4\right)$$

darstellen. Wegen $\det(h) = 0$ hätte dieses Polynom in r die Nullstelle

$$i\frac{(\tilde{d}_4)_{n-j}}{(\tilde{c}_4)_{n-j}}$$

im Widerspruch zur Annahme, dass es Grad 0 hat. Es muss also $(\tilde{c}_4)_{n-j} = 0$ gelten. Mit dem Symplektizitätskriterien (1.2) und (1.3) zeigt man leicht, dass M dann in $\Gamma_{n,n-1}$ liegen muss, so dass $\Gamma_{n,j}M\cap\Gamma_{n,n-1}$ nicht leer ist und wir also nicht in Fall 2 sind.

Die Fälle 1 und 2 zusammengenommen folgt wie im Beweis von Proposition 2.22

$$\begin{aligned} E_k^{n,j}(f;\begin{pmatrix} z_1^{(n-1)} & 0 \\ 0 & ir \end{pmatrix})|\Phi &= \sum_{(\Gamma_{n,j}\cap\Gamma_{n,n-1})\backslash\Gamma_{n,n-1}} f\big((M\langle\begin{pmatrix} z_1^{(n-1)} & 0 \\ 0 & ir \end{pmatrix}\rangle)_1^{(j)}\big)j(M,\begin{pmatrix} z_1^{(n-1)} & 0 \\ 0 & ir \end{pmatrix})^{-k} \\ &= \sum_{\Gamma_{n-1,j}\backslash\Gamma_{n-1}} f\big((M_1\langle z_1\rangle)_1^{(j)}\big)j(M_1,z_1)^{-k} \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. #

Andererseits gilt für $n \geq 1, 0 \leq j < n$ und $k > n+j+1$

$$E_k^{n,j}(f;\cdot) \in (S_k^n)^{\perp}, \tag{2.23}$$

denn: Für eine beliebige Spitzenform $g \in S_k^n$ gilt

$$\begin{aligned} \langle E_k^{n,j}(f;\cdot),g\rangle &= \int_{\mathcal{F}_n} E_k^{n,j}(f;z)\overline{g(z)}\det(y)^k\,\mathrm{d}w \\ &= \sum_{M\in\Gamma_{n,j}\backslash\Gamma_n}\int_{\mathcal{F}_n} f\big((M\langle z\rangle)_1^{(j)}\big)j(M,z)^{-k}\overline{g(z)}\det(y)^k\,\mathrm{d}w \\ &= \sum_{M\in\Gamma_{n,j}\backslash\Gamma_n}\int_{M\langle\mathcal{F}_n\rangle} f(z_1^{(j)})\overline{g(z)}\det(y)^k\,\mathrm{d}w \\ &\overset{2.40}{=} \int_{\mathcal{F}_{n,j}} f(z_1^{(j)})\overline{g(z)}\det(y)^k\,\mathrm{d}w. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Die Vertauschung von Summation und Integration ist legitim, da die Eisensteinreihe gleichmäßig auf $\mathcal{F}_n$ konvergiert und $g(z)\det(y)^k$ beschränkt ist. Des weiteren sind die Integrale über die einzelnen Summanden defininiert, da nach (2.16) neben $g(z)\det(y)^k$ auch die Terme $f\big((M\langle z\rangle)_1^{(j)}\big)j(M,z)^{-k}$ beschränkt sind.

Wir wollen nun zeigen, dass das Skalarprodukt (2.24) Null ist. Nach dem Satz von FUBINI[45] genügt es dafür zu zeigen, dass die Teilintegration über $x_4^{(j)}$ verschwindet. Da das Argument von f nicht von $x_4^{(j)}$ abhängt, können wir diesen Faktor aus dem Integral ziehen und müssen zeigen, dass

$$\int_{x_4 \bmod (1)} \overline{g(z)}\,\mathrm{d}x_4 = \sum_{t>0}\tilde{g}(x_1,x_2,y)\int_{x_4 \bmod (1)} e_{n-j}(-t_4x_4)\,\mathrm{d}x_4$$

Null wird. Aber das gilt, da ja nach Annahme g eine Spitzenform ist, so dass in seiner Fourierentwicklung nur Koeffizienten zu positiv definiten halbganzen Matrizen t vorkommen, und da für solche Matrizen immer auch $t_4^{(j)} > 0$ gilt. #

Per Induktion über n können wir nun für $n \in \mathbb{N}_0, 0 \leq j \leq n$ und $k > n+j+1$

$$E_k^{n,j}(f;\cdot) \in M_k^{n,j}$$

[45]Guido Fubini (1879-1943)

zeigen,

denn: Für den Induktionsanfang stellen wir fest, dass offensichtlich $E_k^{0,0}(f;\cdot) = f$ in $S_k^0 = M_k^{0,0}$ liegt. Nehmen wir nun also an, die Behauptung sei für $n-1$ gezeigt. Wir betrachten nun $E_k^{n,j}(f;\cdot)$. Für $j = n$ liegt dies nach (2.20) in $S_k^n = M_k^{n,n}$. Für $j < n$ liegt die Eisensteinreihe nach (2.23) im Komplement $(S_k^n)^\perp$, und nach (2.20) gilt

$$E_k^{n,j}(f;\cdot)|\Phi = E_k^{n-1,j}(f;\cdot),$$

was nach Induktionsvoraussetzung in $M_k^{n-1,j}$ liegt. Damit liegt $E_k^{n,j}(f;\cdot)$ definitionsgemäß in $M_k^{n,j}$. #

Mit Proposition 2.42 folgt, dass

$$\Phi^{n-j}\colon M_k^{n,j} \to S_k^j$$

surjektiv ist. Andererseits ist Φ^{n-j} für $j < n$ auf $M_k^{n,j} \subseteq (S_k^n)^\perp$ bekanntermaßen ja auch injektiv. Die Proposition folgt, da wir hiermit gezeigt haben, dass die Zuordnung

$$f \mapsto E_k^{n,j}(f;\cdot)$$

unter den gemachten Annahmen die Umkehrabbildung von $\Phi^{n-j}\colon M_k^{n,j} \to S_k^j$ ist. □

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnitts zusammen in folgendem

Satz 2.49. *Seien $n \geq 0$ und $k > 2n$ gerade. Dann gilt folgendes Diagramm von Räumen von Modulformen.*

$$\begin{array}{cccccccc}
M_k^n & = M_k^{n,0} & \oplus M_k^{n,1} & \oplus & \dots & \oplus M_k^{n,n-1} & \oplus M_k^{n,n} \\
 & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \\
M_k^{n-1} & = M_k^{n-1,0} & \oplus M_k^{n-1,1} & \oplus & \dots & \oplus M_k^{n-1,n-1} & \\
 & \downarrow & \downarrow & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
 & \downarrow & \downarrow & & & & \\
M_k^1 & = M_k^{1,0} & \oplus M_k^{1,1} & & & & \\
 & \downarrow & & & & & \\
M_k^0 & = M_k^{0,0} & & & & &
\end{array}$$

Hierbei bestehen die Räume $M_k^{i,j}$ aus den Klingen'schen Eisensteinreihen $E_k^{i,j}(f;\cdot)$ mit den selben Indizes und geeigneten Spitzenformen f. Jeder Pfeil ist ein Isomorphismus via Φ. Die Umkehrabbildung von

$$\Phi^{n-j}\colon M_k^{n,j} \to M_k^{j,j}$$

ordnet jedem $f \in M_k^{j,j} = S_k^j$ die Eisensteinreihe $E_k^{n,j}(f,\cdot)$ zu.

Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1 (Approximationssatz von Weierstraß). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_j \colon D \to \mathbb{C}^n$, die punktweise gegen eine Funktion $f \colon D \to \mathbb{C}^n$ konvergiert. Die Konvergenz sei gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von D, und alle f_j seien auf D holomorph. Zeigen Sie, dass dann f auf D holomorph ist.*

Aufgabe 2.2. *Sei $f \in M_k^n$ eine Modulform mit Fourierentwicklung $f(z) = \sum_{t\in\Lambda_n} a_t e_n(tz)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.*

(a) *Es gilt für alle $0 < r < n$ die* ***Fourier-Jacobi-Entwicklung***

$$f(z) = \sum_{t_4\in\Lambda_{n-r}} \phi_{n,r}(z_1, z_2; t_4) e_{n-r}(t_4 z_4) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}_n$$

mit

$$\phi_{n,r}(z_1, z_2; t_4) := \sum_{\substack{t_1,\, t_2 \\ t\in\Lambda_n}} a_t e_r(t_1 z_1 + 2t_2{}^t z_2).$$

(b) *Es gilt für alle $M \in \Gamma_r$ die Transformationsregel*

$$\begin{aligned} &\phi_{n,r}(M\langle z_1\rangle, {}^t(c_M z_1 + d_M)^{-1} z_2; t_4) \\ &= j(M, z_1)^k e_{n-r}(t_4{}^t z_2 (c_M z_1 + d_M)^{-1} c_M z_2) \cdot \phi_{n,r}(z_1, z_2; t_4). \end{aligned}$$

Hinweis: *Betten Sie M geeignet in Γ_n ein und nutzen Sie die Modularität von f aus.*

Aufgabe 2.3. *Zeigen Sie: Für $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{P}_m$ konvergiert die Reihe*

$$\sum_{v\in\mathbb{Z}^m} e^{-\pi\varepsilon a[v]}.$$

Aufgabe 2.4. *Wie im Beweis von Lemma 2.37 sei durch*

$$z \mapsto M_0\langle z\rangle := (z - i\,1_n)(z + i\,1_n)^{-1} \quad \text{mit } M_0 = \frac{1}{\sqrt{2i}} \begin{pmatrix} 1_n & -i\,1_n \\ 1_n & i\,1_n \end{pmatrix}$$

eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{H}_n$ auf die verallgemeinerte Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}_n$ gegeben. Zeigen Sie, dass $M_0\langle M\langle z\rangle\rangle$ für $z \in \mathbb{H}_n$ und $M \in \mathcal{K}_n$ genau dann eine Diagonalmatrix mit nicht-negativen Einträgen ist, wenn $M\langle z\rangle$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen id_j mit $d_j \geq 1$ ist.

Aufgabe 2.5. *Zeigen Sie, dass für ein beliebiges $a \in \mathbb{H}_n$ die Determinante der Abbildung*

$$z \mapsto z[a]$$

gleich $\det(a)^{n+1}$ ist.

Aufgabe 2.6. *Zeigen Sie den Rest von Lemma 2.40.*

Aufgabe 2.7. *Ein Paar (c,d) von Matrizen in $\mathbb{Z}^{n\times n}$ heißt* ***symmetrisch****, falls $c^t d = d^t c$ gilt, und* ***teilerfremd****, falls jede Matrix $u \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mit $\det(u) \neq 0$ und $u^{-1}c, u^{-1}d \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ oder $cu^{-1}, du^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ bereits unimodular ist.*

Je zwei symmetrische, teilerfremde Paare von Matrizen (c,d) und $(\tilde{c},\tilde{d})$ in $\mathbb{Z}^{n\times n}$ heißen ***äquivalent****, wenn es eine unimodulare Matrix $u \in U_n$ mit*

$$(\tilde{c},\tilde{d}) = (uc, ud)$$

gibt. Für die Äquivalenzklasse von (c,d) schreiben wir $\{c,d\}$ und für die Menge aller solcher Äquivalenzklassen Δ_n.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) *Die Zuordnung*

$$\begin{aligned} \Gamma_{n,0}\backslash\Gamma_n &\to \Delta_n, \\ \Gamma_{n,0}\cdot M &\mapsto \{c_M, d_M\} \end{aligned}$$

ist eine Bijektion. Für die Siegel'schen Eisensteinreihen gilt insbesondere

$$E_k^n(z) = \sum_{\{c,d\}\in\Delta_n} \det(cz+d)^{-k} \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{H}_n.$$

(b) *Die Aufspaltung*

$$\Delta_n = \bigsqcup_{j=0}^{n} \Delta_{n,j} \quad \textit{mit } \Delta_{n,j} := \{\{c,d\} \in \Delta_n \mid \mathrm{rk}(c) = j\}$$

ist wohldefiniert, und mit $U_{n,j} := \{u \in U_n \mid u_3^{(j)} = 0\}$ gilt

$$\Delta_{n,j} = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot {}^t w, \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & 1_{n-j} \end{pmatrix} \cdot w^{-1} \right\} \mid \{c_1, d_1\} \in \Delta_{j,j},\ w \in U_n/U_{n,j} \right\}.$$

(c) *Für die Teilreihe*

$$(E_k^n)_j(z) := \sum_{\{c,d\}\in\Delta_{n,j}} \det(cz+d)^{-k} \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{H}_n$$

der Siegel'schen Eisensteinreihe $E_k^n(z)$ gilt

$$(E_k^n)_j(z) = \sum_{w\in U_n/U_{n,j}} (E_k^j)_j((z[w])_1^{(j)}).$$

Für ein beliebiges $0 \le j \le n$ sei nun die Fourierentwicklung von $E_k^j(z)$ gegeben durch

$$E_k^j(z) = \sum_{t\in\Lambda_j} a_j(t) e_j(tz) \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{H}_j.$$

Zeigen Sie damit weiter

(d) $(E_k^1)_1(z) = \sum_{t\in\Lambda_1^+} a_1(t)e_1(tz) = -\sum_{n>0} \frac{2k}{B_k}\sigma_{k-1}(n)e^{2\pi i n z}$ *für alle* $z \in \mathbb{H}_1$.

Hinweis: *Nutzen Sie die bekannte Fourierentwicklung von* $E_k^1(z)$ *aus.*

(e) $a_j(t) = a_n(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix})$ *für alle* $t \in \Lambda_j$.

Hinweis: *Benutzen Sie* (2.20).

(f) $(E_k^n)_j(z) = \sum_{w\in U_n/U_{n,j}} \sum_{t\in\Lambda_j^+} a_n(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}[{}^tw])e_n(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}[{}^tw]z)$ *für alle* $z \in \mathbb{H}_n$.

Hinweis: *Führen Sie den Beweis iterativ und unter Verwendung von (e). Der Induktionsanfang ist dabei offensichtlich durch (d) gegeben.*

(g) *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \Lambda_j^+ \times U_n &\to \{t \in \Lambda_n \mid \mathrm{rk}(t) = j\}, \\ (t_1, w)\cdot M &\mapsto \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}[{}^tw] \end{aligned}$$

ist surjektiv, und für je zwei Paare (t_1, w) *und* $(\tilde{t}_1, \tilde{w})$ *aus* $\Lambda_j^+ \times U_n$ *gilt*

$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}[{}^tw] = \begin{pmatrix} \tilde{t}_1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}[{}^t\tilde{w}] \iff \tilde{w}^{-1}w \in U_{n,j} \text{ und } t_1[{}^t(\tilde{w}^{-1}w)_1^{(j)}] = \tilde{t}_1.$$

Hinweis: *Unterscheiden Sie im (iterativen) Beweis der Surjektivität die Fälle, ob t einen verschwindenden Diagonaleintrag hat oder nicht.*

Insgesamt haben wir nun

$$(E_k^n)_j(z) = \sum_{\substack{t\in\Lambda_n \\ \mathrm{rk}(t)=j}} a_n(t)e_n(tz) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}_n$$

gezeigt.

Aufgabe 2.8. *Sei* $n \geq 1$, $0 \leq j \leq n$ *und* $k > n + j + 1$ *gerade, und sei* $f \in S_k^j$ *eine beliebige Spitzenform. Zeigen Sie, dass für* $M \in \Gamma_{n,n-1}$ *der Ausdruck*

$$f\big((M\langle\begin{pmatrix} z_1^{(n-1)} & 0 \\ 0 & ir\end{pmatrix}\rangle)_1^{(j)}\big)j(M, \begin{pmatrix} z_1^{(n-1)} & 0 \\ 0 & ir\end{pmatrix})^{-k}$$

unabhängig von r ist.

KAPITEL 3

Hecketheorie

3.1 Die Heckealgebra

Nachdem wir im vergangenen Kapitel mit dem Φ-Operator eine Abbildung von M_k^n nach M_k^{n-1} kennengelernt haben, und dieser uns Informationen über den Raum der Modulformen geliefert hat, wollen wir in diesem Kapitel die so genannten Heckeoperatoren studieren. Diese sind Operatoren auf einem festen Raum M_k^n von Modulformen und ermöglichen unter anderem das bessere Studium der Fourierentwicklungen seiner Elemente.

Es wird in diesem Abschnitt nützlich sein, nicht nur symplektische Matrizen in $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ sondern etwas allgemeinere Matrizen zu betrachten.

Definition 3.1. *Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathbf{j}[M] = r\mathbf{j}$ für ein $r > 0$ heißt **symplektische Ähnlichkeitsmatrix**.*

Die Menge derselben ausgestattet mit der Matrizenmultiplikation trägt die Struktur einer Gruppe, die via Möbiustransformation auf dem Siegel'schen Halbraum operiert (Übung!); insbesondere gilt auch für symplektische Ähnlichkeitsmatrizen die Rechenregel

$$f|_k(M\tilde{M}) = (f|_kM)|_k\tilde{M}.$$

Es bleibt noch festzuhalten, dass sich jede als Möbiustransformation zu einer symplektischen Ähnlichkeitsmatrix M definierte Substitution schon als Möbiustransformation zu einer symplektischen Matrix schreiben lässt, da es ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit

$$r^{-\frac{1}{2}}M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad M\langle z\rangle = (r^{-\frac{1}{2}}M)\langle z\rangle.$$

Sei nun $\mathfrak{M}$ eine Menge symplektischer Ähnlichkeitsmatrizen, die unter Linksmultiplikation mit Γ_n invariant bleibt. Dann ist $\mathfrak{M}$ die disjunkte Vereinigung von Nebenklassen $\Gamma_n M$ mit $M \in \mathfrak{M}$. Uns interessieren im Folgenden nur solche Mengen, die nur endlich viele Nebenklassen enthalten.

Lemma 3.2. *Sei $\mathfrak{M}$ eine Menge symplektischer Ähnlichkeitsmatrizen, die sich als disjunkte Vereinigung*

$$\mathfrak{M} = \bigsqcup_{j=1}^{t} \Gamma_n M_j$$

endlich vieler Γ_n-Nebenklassen schreiben lässt. Ist $f \in M_k^n$ eine Modulform, so hängt

$$f|_k T_{\mathfrak{M}} := \sum_{j=1}^{t} f|_k M_j$$

nicht von der Wahl des Vertretersystems ab. Ist $\mathfrak{M}$ auch unter Rechtsmultiplikation mit Γ_n invariant, so gilt

$$(f|_k T_{\mathfrak{M}})|_k M = f|_k T_{\mathfrak{M}} \quad \textit{für alle } M \in \Gamma_n.$$

Für $n > 1$ wird $T_{\mathfrak{M}}$ so zu einem Operator auf M_k^n.

Beweis. Die Vertreterunabhängigkeit folgt sofort aus der Modularität von f. Die Modularität von $f|_k T_{\mathfrak{M}}$ folgt, da mit der Rechtsinvarianz von $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}M = \bigsqcup_{j=1}^{t} \Gamma_n M_j M \quad \text{für alle } M \in \Gamma_n$$

gilt und so die Zuordnung

$$\Gamma_n M_j \to \Gamma_n M_j M$$

nur eine Permutation der Linksnebenklassen ist. □

Proposition 3.3. *Sei M eine rationale symplektische Ähnlichkeitsmatrix. Dann gibt es eine Zerlegung*

$$\Gamma_n M \Gamma_n = \bigsqcup_{j=1}^{t} \Gamma_n M_j$$

der zugehörigen Doppelnebenklasse in endlich viele Linksnebenklassen. Hierbei können wir das Vertretersystem $\{M_j\}$ so wählen, dass a_{M_j} für alle j eine obere Dreiecksmatrix ist. Durch $T_M := T_{\Gamma_n M \Gamma_n}$ ist dann für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Operator auf dem Raum M_k^n gegeben.

Beweis. Offensichtlich genügt es, die Aussage für eine ganze Matrix M zu zeigen; da wir sonst mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren können. Für ein solches M kommt offensichtlich als Konstante r in der symplektischen Ähnlichkeitsgleichung nur eine natürliche Zahl infrage. Betrachten wir also für ein festes $r \in \mathbb{N}$ die Menge

$$\Gamma_n(r) := \{\tilde{M} \in \mathbb{Z}^{2n \times 2n} \mid \mathbf{j}[\tilde{M}] = r\mathbf{j}\}.$$

Diese zerfällt in endlich viele Γ_n-Linksnebenklassen, von denen jede einen Vertreter $\tilde{M}$ mit

$$c_{\tilde{M}} = 0, \quad a_{\tilde{M}} \text{ obere Dreiecksmatrix} \quad \text{und} \quad {}^t a_{\tilde{M}} d_{\tilde{M}} = r 1_n$$

hat,

denn: Wie im Beweis von Satz 1.7 kann man zeigen, dass es in jeder Γ_n-Linksnebenklasse einen Vertreter $\tilde{M}$ vom behaupteten Typ gibt. Hierbei kann man natürlich erreichen, dass die Diagonaleinträge von $a_{\tilde{M}}$, und damit auch die von $d_{\tilde{M}}$, positiv sind. Gehen zwei solche Matrizen $\tilde{M}$ und $\tilde{M}'$ durch Linksmultiplikation mit einer Matrix

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & {}^t u^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit unipotentem } u$$

ineinander über, so definieren sie offenbar die selbe Linksnebenklasse. Dadurch können wir für unseren Vertreter $\tilde{M}$ also immer

$$0 \leq (a_{\tilde{M}})_{jk} < (a_{\tilde{M}})_{kk} \quad \text{für alle } 1 \leq j < k \leq n$$

erzwingen. Wegen $\mathbf{j}[\tilde{M}] = r\mathbf{j}$ gibt es daher nur endlich viele Möglichkeiten für $a_{\tilde{M}}$. Über ${}^t a_{\tilde{M}} d_{\tilde{M}} = r 1_n$ ist dann auch $d_{\tilde{M}}$ festgelegt. Weiter können wir nun von links mit einer Translationsmatrix aus Γ_n multiplizieren. Auf diese Weise lassen sich je zwei Linksnebenklassenvertreter $\tilde{M}$ und $\tilde{M}'$ mit $d_{\tilde{M}} = d_{\tilde{M}'}$ identifizieren, wann immer

$$(b_{\tilde{M}} - b_{\tilde{M}'}) d_{\tilde{M}}^{-1}$$

eine ganzzahlige Matrix ist. Für festes $d_{\tilde{M}}$ gibt es also nur endlich viele Möglichkeiten für $b_{\tilde{M}}$ und damit insgesamt auch nur endlich viele Nebenklassen. #

Sei nun M eine beliebige ganze symplektische Ähnlichkeitsmatrix. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $M \in \Gamma_n(r)$. Wegen

$$\mathbf{j}[AMB] = \mathbf{j}[MB] = r\mathbf{j}[B] = r\mathbf{j} \quad \text{für alle } A, B \in \Gamma_n$$

gilt in diesem Fall sogar $\Gamma_n M \Gamma_n \subseteq \Gamma_n(r)$. Da offenbar mit jedem $\tilde{M} \in \Gamma_n M \Gamma_n$ auch die gesamte Linksnebenklasse $\Gamma_n \tilde{M}$ in $\Gamma_n M \Gamma_n$ liegt, folgt mit dem oben gezeigten die Proposition. □

Definition 3.4. *Die Operatoren T_M aus der Proposition und ihre Linearkombinationen heißen **(verallgemeinerte) Heckeoperatoren**.*

Um die Relationen zwischen den Heckeoperatoren studieren zu können, führen wir mit Shimura (siehe [Shi]) eine abstrakte Algebra, die ***Heckealgebra***, ein. Dies ist ein recht allgemeines Konzept, das wir zunächst in größerer Allgemeinheit behandeln wollen.

Seien dafür $R \subseteq S$ Gruppen, für die für alle $s \in S$ die Doppelnebenklasse RsR aus nur endlich vielen R-Linksnebenklassen besteht. Wir schreiben $\mathscr{L}(R, S)$ für den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller formalen endlichen $\mathbb{C}$-Linearkombinationen von R-Linksnebenklassen von S und $\mathscr{H}(R, S)$ für den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller formalen endlichen $\mathbb{C}$-Linearkombinationen von R-Doppelnebenklassen von S. Nach Voraussetzung ist jede Doppelnebenklasse $\mathfrak{M}$ die disjunkte Vereinigung von endlich vielen Linksnebenklassen

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathfrak{M}_\ell \quad \text{mit } \mathfrak{M}_j = Rs_j \text{ für ein geeignetes } s_j \in S.$$

Wir ordnen der Doppelnebenklasse $\mathfrak{M}$ das Element

$$j(\mathfrak{M}) := \sum_{j=1}^{\ell} \mathfrak{M}_j \quad \in \mathscr{L}(R,S)$$

zu und setzen j zu der eindeutig bestimmten $\mathbb{C}$-linearen Abbildung

$$j : \mathscr{H}(R,S) \to \mathscr{L}(R,S)$$

fort. Offensichtlich ist diese injektiv; wir wollen nun ihr Bild studieren. Die Gruppe S operiert per Rechtsmultiplikation auf der Menge ihrer R-Linksnebenklassen und in $\mathbb{C}$-linearer Fortsetzung auf $\mathscr{L}(R,S)$. Den Untervektorraum der R-Invarianten unter dieser Aktion bezeichnen wir mit $\mathscr{L}(R,S)^R$. Dann ist

$$j : \mathscr{H}(R,S) \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}(R,S)^R$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen,

denn: Offensichtlich ist ein Element

$$\sum_{s \in R\backslash S} a_s Rs \quad \in \mathscr{L}(R,S)$$

genau dann R-rechtsinvariant, wenn für alle s,t mit $RsR = RtR$ die Koeffizienten a_s und a_t übereinstimmen. Genau dann können wir

$$\sum_{s \in R\backslash S} a_s Rs = \sum_{s \in R\backslash S/R} \sum_{\substack{s_j \in S \\ Rs_j \subseteq RsR}} a_s Rs_j = \sum_{s \in R\backslash S/R} a_s j(RsR) = j\left(\sum_{s \in R\backslash S/R} a_s RsR \right) \tag{3.1}$$

schreiben. #

Wir werden von nun an $\mathscr{L}(R,S)^R$ mit $\mathscr{H}(R,S)$ identifizieren.

Wir definieren ein Produkt

$$(RsR)(Rt) := (\bigsqcup_{j=1}^{\ell} Rs_j)(Rt) := \sum_{j=1}^{\ell} Rs_j t \quad \in \mathscr{L}(R,S) \tag{3.2}$$

von Doppelnebenklassen mit Linksnebenklassen. Dieses hängt offensichtlich nicht von der Wahl der Vertreter s_j und t ab und lässt sich $\mathbb{C}$-bilinear zu einer Verknüpfung

$$\mathscr{H}(R,S) \times \mathscr{L}(R,S) \to \mathscr{L}(R,S)$$

fortsetzen.

Lemma 3.5. *Diese Verknüpfung ist in dem Sinne assoziativ, dass*

$$(\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{M}})L = \mathfrak{M}(\tilde{\mathfrak{M}}L) \quad \textit{für alle } \mathfrak{M}, \tilde{\mathfrak{M}} \in \mathscr{H}(R,S) \textit{ und } L \in \mathscr{L}(R,S)$$

gilt. Außerdem ist das Produkt zweier Elemente aus $\mathscr{H}(R,S)$ wieder in $\mathscr{H}(R,S)$ enthalten.

Beweis. Das Produkt zweier Doppelnebenklassen $RsR = \bigsqcup Rs_j$ und $RtR = \bigsqcup Rt_k$ wird durch die Formel

$$(RsR)(RtR) = \sum_{j,k} Rs_j t_k$$

gegeben. Die Assoziativität ist nun klar. Rechtsmultiplikation mit einem Element $r \in R$ permutiert nur die Linksnebenklassen Rt_k, das Produkt bleibt also invariant und liegt somit in $\mathscr{L}(R,S)^R \cong \mathscr{H}(R,S)$ wie behauptet. □

Es folgt sofort, dass $\mathscr{H}(R,S)$ mit der obigen Verknüpfung ausgestattet eine assoziative $\mathbb{C}$-Algebra mit Einselement $R = Re_S R$ ist, die so genannte ***Heckealgebra*** des ***Heckepaares*** (R,S). In dieser wollen wir nun das Produkt noch ein wenig besser kennenlernen.

Lemma 3.6. *Das Produkt zweier Doppelnebenklassen $RsR = \bigsqcup Rs_j$ und $RtR = \bigsqcup Rt_k$ wird durch die Formel*

$$(RsR)(RtR) = \sum_{j,k} a_u RuR$$

gegeben. Dabei durchläuft u ein Vertretersystem derjenigen Doppelnebenklassen, die in $RsRtR$ enthalten sind, und es gilt

$$a_u = \left|\{(j,k) \mid Ru = Rs_j t_k\}\right|.$$

a_u hängt nicht von der Wahl der Vertreter s_j, t_k und u ab und ist von 0 verschieden, wenn RuR in $RsRtR$ enthalten ist.

Beweis. Mit den Überlegungen von (3.1) ist das trivial. □

Bemerkung 3.7. *Man kann die Koeffizienten a_u des Produkts in Lemma 3.6 auch wie folgt beschreiben. Sei $\deg(u)$ die Anzahl aller in RuR enthaltenen Linksnebenklassen. Dann gilt*

$$\deg(u) a_u = \left|\{(j,k) \mid RuR = Rs_j t_k R\}\right|.$$

Definition 3.8. *Ein **Antiautomorphismus** des Paares (R,S) ist eine Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} S & \to & S, \\ s & \mapsto & s'. \end{array}$$

mit den Eigenschaften

- $(s')' = s,$ *(Involutoriszität)*
- $(st)' = t's',$ *(Antihomomorphie)*
- $s \in R \Longrightarrow s' \in R.$ *(R-Abgeschlossenheit)*

Sei $\mathfrak{M} = RsR = \bigsqcup Rs_j$ eine Doppelnebenklasse. Dann ist

$$\mathfrak{M}' := \{s \in S \mid s' \in \mathfrak{M}\} = Rs'R = \bigsqcup Rs'_j$$

offensichtlich wieder eine Doppelnebenklasse. So können wir die Abbildung $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ linear zu einer Abbildung auf $\mathscr{H}(R,S)$ fortsetzen. Diese Fortsetzung ist nicht zwangsläufig antilinear, aber es gilt

Lemma 3.9. *Für das Heckepaar (R, S) besitze jede Doppelnebenklasse RsR mit $s \in S$ ein simultanes Vertretersystem der Rechts- und Linksnebenklassen*

$$RsR = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} Rs_j = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} s_jR.$$

Dann definiert jeder Antiautomorphismus $s \mapsto s'$ des Heckepaares (R, S) einen Antiautomorphismus auf $\mathscr{H}(R, S)$.

Beweis. Seien

$$\mathfrak{M} = RsR = \bigsqcup Rs_j = \bigsqcup s_jR \quad \text{und} \quad \tilde{\mathfrak{M}} = RtR = \bigsqcup Rt_k = \bigsqcup t_kR.$$

Dann gilt nach Bemerkung 3.7

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{M}} &= \sum a_u RuR & &\text{mit } \deg(u)a_u = |\{(j,k) \mid RuR = Rs_jt_kR\}, \\ \tilde{\mathfrak{M}}'\mathfrak{M}' &= (\bigsqcup Rs_j')(\bigsqcup Rt_k') = \sum b_u RuR & &\text{mit } \deg(u)b_u = |\{(j,k) \mid RuR = Rt_k's_j'R\}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun mit $(Rs_jt_kR)' = Rt_k's_j'R$ und $\deg(u') = \deg(u)$. □

Bemerkung 3.10. *Die Voraussetzung von Lemma 3.9 ist schon erfüllt, wenn für alle $s \in S$ die Anzahl der Rechts- und Linksnebenklassen in RsR übereinstimmt,*

denn: Gelte $RsR = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} Rs_j = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} t_jR$. Die Behauptung ist offensichtlich gezeigt, wenn wir für jedes j ein u_j finden können mit

$$Rs_j = Ru_j \quad \textit{und} \quad t_jR = u_jR.$$

Nach Voraussetzung ist $s_j \in RsR = Rt_jR$, also

$$rs_j = t_j\tilde{r} \quad \textit{mit } r, \tilde{r} \in R.$$

Eine mögliche Wahl für u_j ist also $u_j := rs_j = t_j\tilde{r}$. #

Besitzt der Antiautomorphismus die Eigenschaft

$$RsR = Rs'R \quad \text{für alle } s \in S,$$

so ist er die Identität auf $\mathscr{H}(R, S)$. Insbesondere stimmt die Anzahl der Rechts- und Linksnebenklassen überein, so dass wir Lemma 3.9 anwenden können. Es gilt dann

$$\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{M}})' = \tilde{\mathfrak{M}}'\mathfrak{M}' = \tilde{\mathfrak{M}}\mathfrak{M},$$

also

Satz 3.11. *Besitzt das Heckepaar (R, S) einen Antiautomorphismus $s \mapsto s'$ mit der Eigenschaft $RsR = Rs'R$ für alle $s \in S$, so ist die Heckealgebra $\mathscr{H}(R, S)$ kommutativ.*

Beispiel 3.12. *Nach Übungsaufgabe 3.1 ist $(R, S) = (\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}))$ ein Heckepaar; es lässt sich also jede Doppelnebenklasse als disjunkte Vereinigung endlich vieler Linksnebenklassen schreiben. Die zugehörige Heckealgebra $\mathscr{H}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}))$ ist kommutativ,*

denn: Offensichtlich ist hier das Transponieren ein Antiautomorphismus. Zu einer beliebigen Matrix $a \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mit Determinante ungleich 0 gibt es unimodulare Matrizen $u, \tilde{u}$ mit

$$u a \tilde{u} = n(a),$$

wobei $n(a)$ die Elementarteilernormalform von a bezeichne. Durch Transponieren der Gleichung ergibt sich

$${}^t\tilde{u}\,{}^ta\,{}^tu = {}^tn(a) = n(a)$$

und somit $n(a) = n({}^ta)$ mit der Eindeutigkeit der Elementarteilernormalform. Es folgt, dass die Doppelnebenklassen

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})a\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})^ta\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$$

übereinstimmen. Das gilt dann offensichtlich auch für ein beliebiges $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$, so dass tatsächlich die Heckealgebra $\mathscr{H}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}))$ kommutativ ist. #

Wir wollen den Beweis des Beispielfalls auf den uns interessierenden Fall einer Heckealgebra zu Γ_n übertragen und benötigen dafür eine Entsprechung des Elementarteilersatzes in diesem Setting.

Satz 3.13 (Elementarteilersatz für die symplektische Gruppe)**.** *Sei $r \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann ist für jedes $M \in \Gamma_n(r)$ in der Doppelnebenklasse $\Gamma_n M \Gamma_n$ ein eindeutig bestimmter Vertreter der Form*

$$n(M) := \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & a_{nn} & & & \\ & & & d_{11} & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & d_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} a_{jj} > 0,\ a_{jj}d_{jj} = r & \text{für } 1 \le j \le n, \\ a_{nn} \mid d_{nn},\ a_{jj} \mid a_{j+1,j+1} & \text{für } 1 \le j < n \end{cases}$$

enthalten. Die Zahlen $a_{11}, \ldots, a_{nn}, d_{11}, \ldots, d_{nn}$ heißen die ***Elementarteiler*** der Matrix *M.*

Beweis. Für eine beliebige von Null verschiedene Matrix $m \in \mathbb{R}^{s\times t}$ setzen wir

$$\mu(m) := \min_{\substack{i\in\{1,\ldots,s\} \\ j\in\{1,\ldots,t\}}} \{|m_{ij}| \mid m_{i,j} \neq 0\},$$

Sei nun $r \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, und sei $M \in \Gamma_n(r)$. In der Doppelnebenklasse $\Gamma_n M \Gamma_n$ wählen wir einen Vertreter $\tilde{M}$ mit minimalem $\mu(\tilde{M})$. Ohne Einschränkung können wir dabei eine Reihe von Annahmen zur Gestalt von $\tilde{M}$ treffen.

(i) Indem wir gegebenenfalls $\tilde{M}$ durch $\mathbf{j}\tilde{M}$, $\tilde{M}\mathbf{j}$ oder $\mathbf{j}\tilde{M}\mathbf{j}$ ersetzen, erreichen wir, dass ein Eintrag minimalen Betrags von $\tilde{M}$ bereits in $a_{\tilde{M}}$ enthalten ist, also

$$\mu(\tilde{M}) = \mu(a_{\tilde{M}}).$$

(ii) Indem wir $\tilde{M}$ gegebenenfalls durch

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & {}^t u^{-1} \end{pmatrix} \tilde{M} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & {}^t v^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uav & * \\ * & * \end{pmatrix} \quad \text{mit geeigneten } u, v \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$$

ersetzen, erreichen wir sogar

$$\mu(\tilde{M}) = (a_{\tilde{M}})_{11} \quad \text{und} \quad (a_{\tilde{M}})_{1j} = (a_{\tilde{M}})_{i1} = 0 \text{ für alle } i, j \in \{2, \ldots, n\}. \tag{3.3}$$

(iii) Indem wir $\tilde{M}$ gegebenenfalls durch

$$\tilde{M} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\tilde{M}} & a_{\tilde{M}} s + b_{\tilde{M}} \\ * & * \end{pmatrix} \quad \text{mit geeignetem } s \in \mathbb{Z}^{n \times n}$$

ersetzen, erreichen wir

$$|(b_{\tilde{M}})_{1j}| < |(a_{\tilde{M}})_{11}| \text{ und somit } (b_{\tilde{M}})_{1j} = 0 \quad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, n\} \text{ nach (3.3).}$$

Vermöge $a_{\tilde{M}}{}^t b_{\tilde{M}} = b_{\tilde{M}}{}^t a_{\tilde{M}}$ folgt daraus

$$(b_{\tilde{M}})_{i1} = 0 \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

(iv) Analog zu (iii) erhalten wir durch Linksmultiplikation mit einer geeigneten Matrix

$$(c_{\tilde{M}})_{1j} = 0 \quad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{und} \quad (c_{\tilde{M}})_{i1} = 0 \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

(v) Vermöge $a_{\tilde{M}}{}^t d_{\tilde{M}} - b_{\tilde{M}}{}^t c_{\tilde{M}} = r1_n$ und ${}^t a_{\tilde{M}} d_{\tilde{M}} - {}^t c_{\tilde{M}} b_{\tilde{M}} = r1_n$ erhalten wir schließlich

$$(d_{\tilde{M}})_{1j} = (d_{\tilde{M}})_{i1} = 0 \quad \text{für alle } i, j \in \{2, \ldots, n\}$$

und

$$\tilde{M}_4 := \begin{pmatrix} (a_{\tilde{M}})_4^{(1)} & (b_{\tilde{M}})_4^{(1)} \\ (c_{\tilde{M}})_4^{(1)} & (d_{\tilde{M}})_4^{(1)} \end{pmatrix} \in \Gamma_{n-1}(r).$$

Diese Form der Matrix $\tilde{M}$ wird nicht geändert, wenn wir $\tilde{M}$ von links oder von rechts mit Matrizen der Form

$$1_{2\,1} \times_{n-1} A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

multiplizieren.

Wir wollen durch Induktion nach n schließen. Der Induktionsanfang für $n = 1$ ist durch den klassischen Elementarteilersatz abgedeckt. Per Induktionsvoraussetzung nehmen wir im allgemeinen Fall nun an, $\tilde{M}_4$ sei bereits eine Diagonalmatrix vom verlangten Typ. Dann gelten insbesondere $b_{\tilde{M}} = c_{\tilde{M}} = 0$ und $a_{\tilde{M}}{}^t d_{\tilde{M}} = r1_n$, so dass insgesamt $\tilde{M}$ eine Diagonalmatrix ist und folgende Eigenschafen erfüllt.

(i) $(a_{\tilde{M}})_{jj} > 0$ und $(a_{\tilde{M}})_{jj}(d_{\tilde{M}})_{jj} = r$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$,

(ii) $(a_{\tilde{M}})_{nn} \mid (d_{\tilde{M}})_{nn}$ und $(a_{\tilde{M}})_{jj} \mid (a_{\tilde{M}})_{(j+1)(j+1)}$ für alle $j \in \{2, \dots, n-1\}$,

(iii) $(a_{\tilde{M}})_{11} = \min_{A \in \Gamma_n \tilde{M} \Gamma_n} \mu(A)$.

Zum Beweis des Satzes verbleibt $(a_{\tilde{M}})_{11} \mid (a_{\tilde{M}})_{22}$ zu zeigen. Dies stimmt aber,

denn: Nach Eigenschaft (iii) teilt $(a_{\tilde{M}})_{11}$ alle Einträge von $u a_{\tilde{M}} v$ für beliebige $u, v \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Insbesondere teilt $(a_{\tilde{M}})_{11}$ den kleinsten Elementarteiler von $a_{\tilde{M}}$, der als größter gemeinsamer Teiler aller Einträge von $a_{\tilde{M}}$ wiederum $(a_{\tilde{M}})_{22}$ teilt. #

□

Satz 3.14. *Sei Δ_n die Gruppe der rationalen symplektischen Ähnlichkeitsmatrizen vom Grad n. Dann ist (Γ_n, Δ_n) ein Heckepaar, und die zugehörige Heckealgebra $\mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_n)$ ist kommutativ.*

Beweis. (Γ_n, Δ_n) ist ein Heckepaar nach Proposition 3.3. Dass die zugehörige Heckealgebra kommutativ ist, folgt wie im Beweis von Beispiel 3.12, da nach Bemerkung 1.2 das Transponieren auch hier ein Antiautomorphismus ist und

$$\Gamma_n M \Gamma_n = \Gamma_n {}^t M \Gamma_n \quad \text{für alle } M \in \Delta_n$$

gilt. □

Sei nun $\mathrm{End}(M_k^n)$ der Vektorraum aller $\mathbb{C}$-linearen Endomorphismen von M_k^n. Wir haben jeder Doppelnebenklasse $\Gamma_n M \Gamma_n$ mit $M \in \Delta_n$ einen Operator T_M aus $\mathrm{End}(M_k^n)$ zugeordnet und dehnen diese Zuordnung $\mathbb{C}$-linear aus. So erhalten wir einen Ringhomomorphismus von $\mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_n)$ nach $\mathrm{End}(M_k^n)$,

denn: Weil die Zuordnung durch $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung entstanden ist, genügt es zu zeigen, dass für zwei Γ_n-Doppelnebenklassen $\mathfrak{M}, \tilde{\mathfrak{M}}$ von Δ_n

$$T_{\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{M}}} = T_{\mathfrak{M}} T_{\tilde{\mathfrak{M}}}$$

gilt. Schreiben wir $\mathfrak{M} = \bigsqcup_j \Gamma_n M_j$ und $\tilde{\mathfrak{M}} = \bigsqcup_\ell \Gamma_n \tilde{M}_\ell$, so haben wir wie im Beweis von Lemma 3.5

$$\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{M}} = \sum_{j,\ell} \Gamma_n M_j \tilde{M}_\ell.$$

Wenden wir dies auf eine beliebige Modulform $f \in M_k^n$ an, so erhalten wir

$$f|_k T_{\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{M}}} = \sum_{j,\ell} f|_k (M_j \tilde{M}_\ell) = \sum_\ell (\sum_j f|_k M_j)|_k \tilde{M}_\ell = (f|_k T_{\mathfrak{M}})|_k T_{\tilde{\mathfrak{M}}} = f|_k (T_{\mathfrak{M}} T_{\tilde{\mathfrak{M}}})$$

und damit die Behauptung. #

Hieraus folgt nun unmittelbar ein Korollar zu Satz 3.14.

Korollar 3.15. *Die Heckeoperatoren T_M und $T_{\tilde{M}}$ für beliebige $M, \tilde{M}$ aus Δ_n kommutieren.*

3.2 Die Struktur der Heckealgebra der symplektischen Gruppe

Lemma 3.16. *Gilt für $M, N \in \Delta_n$ eine der Bedingungen*

(a) $N = a\,1_{2n}$ *mit* $a \in \mathbb{R}$,

(b) $M, N \in \mathbb{Z}^{2n\times 2n}$ *mit* $\mathrm{ggT}(\det(M), \det(N)) = 1$,

so gilt

$$(\Gamma_n M \Gamma_n)\cdot(\Gamma_n N \Gamma_n) = \Gamma_n MN\Gamma_n \quad \textit{in } \mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_n).$$

Beweis. In Fall (a) ist die Behauptung klar, da N dann mit beliebigen Matrizen in Δ_n kommutiert.

In Fall (b) seien für $X \in \{M, N, MAN\}$ mit einem beliebigen $A \in \Gamma_n$ die Elementarteiler mit

$$a_{11}^{(X)}, \dots, a_{nn}^{(X)}, d_{11}^{(X)}, \dots, d_{nn}^{(X)}$$

bezeichnet. Nach Übungsaufgabe 3.2 gilt dann

$$a_{jj}^{(M)} \cdot a_{jj}^{(N)} = a_{jj}^{(MAN)} \quad \text{für alle } 1 \le j \le n,$$

so dass MN und MAN in der selben Γ_n-Doppelnebenklasse liegen. Da $A \in \Gamma_n$ beliebig war, folgt daraus die Behauptung. □

Bemerkung 3.17. *Schreiben wir in der Situation von Teil (b) von Lemma 3.16*

$$\Gamma_n M \Gamma_n = \bigsqcup_j \Gamma_n M_j \quad \textit{und} \quad \Gamma_n N \Gamma_n = \bigsqcup_k \Gamma_n N_k,$$

so gilt

$$\Gamma_n MN \Gamma_n = \bigsqcup_{j,k} \Gamma_n M_j N_k,$$

denn: Nach Lemma 3.16 (b) gilt

$$\Gamma_n MN\Gamma_n = (\Gamma_n M\Gamma_n)\cdot(\Gamma_n N\Gamma_n) = (\bigsqcup_j \Gamma_n M_j)\cdot(\bigsqcup_k \Gamma_n N_k).$$

Für ein beliebiges aber festes k ist nun

$$(\bigsqcup_j \Gamma_n M_j)\cdot \Gamma_n N_k = \bigcup_j (\Gamma_n M_j \Gamma_n)\cdot N_k = \bigcup_j (\Gamma_n M \Gamma_n)\cdot N_k = (\Gamma_n M_j \Gamma_n)\cdot N_k = \bigsqcup_j \Gamma_n M_j N_k.$$

Die Behauptung folgt also, wenn wir zeigen können, dass die jeweiligen Mengen auf der rechten Seite für verschiedene Werte von k disjunkt sind. Nehmen wir dafür an, es gebe ein $A \in \Gamma_n$ mit

$$M_j N_k = A M_{\tilde{j}} N_{\tilde{k}} \quad \textit{für geeignete } j, \tilde{j}, k, \tilde{k}.$$

Das ist gleichbedeutend zu

$$N_k(N_{\tilde{k}})^{-1} = (M_j)^{-1} A M_{\tilde{j}}.$$

Die Nenner der Einträge auf der linken Seite sind Teiler von $|\det(N_{\tilde{k}})| = |\det(N)|$, *die auf der rechten Seite Teiler von* $|\det(M_{\tilde{j}})| = |\det(M)|$. *Wegen der Teilerfremdheit von* $\det(M)$ *und* $\det(N)$ *sind also alle Einträge ganze Zahlen und somit* $j = \tilde{j}$ *und* $k = \tilde{k}$. #

Satz 3.18. *Die Heckealgebra des Paares* (Γ_n, Δ_n) *ist das Tensorprodukt*[46]

$$\mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_n) = \bigotimes_{p \text{ prim}} \mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_{n,p})$$

ihrer p***-Komponenten***. *Hierbei ist die Gruppe* $\Delta_{n,p}$ *definiert als der Durchschnitt*

$$\Delta_{n,p} = \Delta_n \cap \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Z}[p^{-1}]).$$

Beweis. Wir können für $\mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_n)$ und für jede seiner p-Komponenten $\mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_{n,p})$ die jeweilig passenden Doppelnebenklassen als Basis wählen. Jede Doppelnebenklasse $\Gamma_n M \Gamma_n$ mit $M \in \Gamma_n(r)$ für ein $r \in \mathbb{N}$ besitzt nach dem Elementarteilersatz 3.13 einen eindeutig bestimmten Vertreter der Form

$$n(M) := \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ 0 & & a_{nn} & & & \\ & & & d_{11} & & 0 \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & 0 & & d_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} a_{jj} > 0,\ a_{jj}d_{jj} = r & \text{für } 1 \leq j \leq n, \\ a_{nn} \mid d_{nn},\ a_{jj} \mid a_{j+1,j+1} & \text{für } 1 \leq j < n. \end{cases}$$

Jede solche Matrix lässt sich eindeutig als Produkt von ebensolchen Matrizen schreiben, deren Einträge jeweils nur Potenzen einer festen Primzahl sind. Der Satz folgt daher mit Teil (b) von Lemma 3.16. □

Offenbar genügt es also zum Studium der Heckealgebra die einzelnen p-Komponenten zu betrachten. Dazu führen wir die Teilmengen

$$\check{\mathscr{L}}(\Gamma_n, \Delta_n) \subseteq \mathscr{L}(\Gamma_n, \Delta_n),$$
$$\check{\mathscr{H}}(\Gamma_n, \Delta_n) \subseteq \mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_n)$$

[46] Das Tensorprodukt einer gegebenen Menge von $\mathbb{C}$-Vektorräumen $\{V_p \mid p \text{ prim}\}$ mit jeweils zugehörigen Basen B_p kann als der $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis

$$\bigoplus_{p \text{ prim}} B_p = \bigcup_{\substack{I \text{ endliche Menge} \\ \text{von Primzahlen}}} \left(\prod_{p \in I} B_p \right)$$

interpretiert werden.

der $\mathbb{C}$-Linearkombinationen von Linksnebenklassen $\Gamma_n M$ beziehungsweise Doppelnebenklassen $\Gamma_n M \Gamma_n$ mit *ganzen* symplektischen Ähnlichkeitsmatrizen M ein. Man überprüft leicht, dass $\check{\mathscr{H}}(\Gamma_n, \Delta_n)$ ein Unterring der Heckealgebra ist (Übung!). Weiter setzen wir

$$\begin{aligned}\check{\mathscr{L}}(\Gamma_n, \Delta_{n,p}) &:= \mathscr{L}(\Gamma_n, \Delta_{n,p}) \cap \check{\mathscr{L}}(\Gamma_n, \Delta_n),\\ \check{\mathscr{H}}(\Gamma_n, \Delta_{n,p}) &:= \mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_{n,p}) \cap \check{\mathscr{H}}(\Gamma_n, \Delta_n).\end{aligned}$$

Nach Teil (a) von Lemma 3.16 gilt dann

$$\mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_{n,p}) = \check{\mathscr{H}}(\Gamma_n, \Delta_{n,p})[X^{-1}] \quad \text{mit } X = \Gamma_n(p1_{2n})\Gamma_n,$$

so dass es offensichtlich genügt $\check{\mathscr{H}}(\Gamma_n, \Delta_{n,p})$ zu studieren, um $\mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_{n,p})$ kennenzulernen. Im Rest dieses Abschnitts wollen wir daher den folgenden Satz beweisen.

Satz 3.19. *Die $\mathbb{C}$-Algebra $\check{\mathscr{H}}(\Gamma_n, \Delta_{n,p})$ wird von den $n+1$ Elementen*

$$T^{(n)}(p) := \Gamma_n \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & p1_n \end{pmatrix} \Gamma_n \quad \textit{und} \quad T_j^{(n)}(p^2) := \Gamma_n \begin{pmatrix} 1_j & 0 & & \\ 0 & p1_{n-j} & & 0 \\ & 0 & p^2 1_j & 0 \\ & & 0 & p1_{n-j} \end{pmatrix} \Gamma_n$$

mit $0 \le j < n$ erzeugt. Diese Erzeuger sind algebraisch unabhängig.

Für den Beweis benötigen wir einen geeigneten Homomorphimus

$$\varphi : \check{\mathscr{H}}(\Gamma_n, \Delta_{n,p}) \to \check{\mathscr{H}}(\Gamma_{n-1}, \Delta_{n-1,p})$$

von Heckealgebren, den wir nun konstruieren wollen. Für $r \in \mathbb{N}$ und $M \in \Gamma_n(r)$ betrachten wir die Linksnebenklasse $\Gamma_n M$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass M die Bedingungen

- $a_3^{(n-1)} = 0$,
- a_{in} reduziert modulo a_{nn} für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ und insbesondere $a_{in} = 0$ im Fall $|a_{nn}| = 1$,
- $c = 0$,
- $d_2^{(n-1)} = 0$.

erfüllt. Im Fall $|a_{nn}| = 1$ folgt dann

$$M_1 := \begin{pmatrix} a_1^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} \\ 0 & d_1^{(n-1)} \end{pmatrix} \in \Delta_{n-1},$$

und wir können

$$\varphi(\Gamma_n M) := \begin{cases} |\det(d)|^{-1}\Gamma_{n-1}M_1 & \text{für } |a_{nn}| = 1, \\ 0 & \text{für } |a_{nn}| \neq 1 \end{cases}$$

definieren. Wir dehnen dies linear zu einer Abbildung

$$\varphi : \check{\mathscr{L}}(\Gamma_n, \Delta_n) \to \check{\mathscr{L}}(\Gamma_{n-1}, \Delta_{n-1})$$

aus. Unmittelbar aus der Definition der Multiplikation von Doppel- und Linksnebenklassen in (3.2) ergibt sich

$$\varphi(T \cdot L) = \varphi(T) \cdot \varphi(L) \quad \text{für alle } T \in \check{\mathscr{H}}(\Gamma_n, \Delta_n), L \in \check{\mathscr{L}}(\Gamma_n, \Delta_n). \tag{3.4}$$

Hieraus und mit Übungsaufgabe 3.3 folgt

Proposition 3.20. *Die Abbildung φ definiert einen Homomorphismus der Heckealgebren*

$$\varphi : \check{\mathscr{H}}(\Gamma_n, \Delta_n) \to \check{\mathscr{H}}(\Gamma_{n-1}, \Delta_{n-1}).$$

Es gilt

(a) $M \equiv 0 \bmod (a)$ *für ein* $a \in \mathbb{N}_{>1} \Longrightarrow \varphi(\Gamma_n M \Gamma_n) = 0$,

(b) ${}^t a d = r\, 1_{n-1} \Longrightarrow \varphi\left(\Gamma_n \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} {}_1\!\times_{n-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) \Gamma_n\right) = \Gamma_{n-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \Gamma_{n-1}.$

Bemerkung 3.21. *Aussage (a) impliziert natürlich, dass alle Doppelnebenklassen $\Gamma_n M \Gamma_n$, für die der kleinste Elementarteiler von M von 1 verschieden ist, auf Null abgebildet werden. Aus dem symplektischen Elementarteilersatz 3.13 folgt, dass der Homomorphismus φ durch (a) und (b) vollständig beschrieben ist.*

Proposition 3.22. *Die Abbildung φ definiert einen Homomorphismus*

$$\varphi : \check{\mathscr{H}}(\Gamma_n, \Delta_{n,p}) \to \check{\mathscr{H}}(\Gamma_{n-1}, \Delta_{n-1,p})$$

mit den Eigenschaften

(a) $\ker(\varphi) = (\Gamma_n p 1_{2n} \Gamma_n) \trianglelefteq \check{\mathscr{H}}(\Gamma_n, \Delta_{n,p})$.

(b) *Für beliebige* $k \in \mathbb{N}$ *und* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Delta_{n-1,p}$ *gilt*

$$\varphi\left(\Gamma_n \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^k \end{pmatrix} {}_1\!\times_{n-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \Gamma_n\right) = \Gamma_{n-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Gamma_{n-1}.$$

Beweis. Das ergibt sich sofort aus dem symplektischen Elementarteilersatz 3.13 und Proposition 3.20. □

Beweis von Satz 3.19. Dass die aufgezählten Elemente der Heckealgebra diese erzeugen, zeigen wir per Induktion nach n. Der Induktionsanfang $n = 1$ folgt (mit der offensichtlichen Notation) aus

$$\check{\mathscr{H}}(\Gamma_1, \Delta_{1,p}) = \check{\mathscr{H}}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[p^{-1}]))$$

und Übungsaufgabe 3.4. Sei nun also $n > 1$, und sei für ein gegebenes $\ell \in \mathbb{N}$

$$T := \Gamma_n \operatorname{diag}(p^{k_1}, \dots, p^{k_n}, p^{\ell-k_1}, \dots, p^{\ell-k_n})\Gamma_n \quad \text{mit } \begin{cases} 0 \le k_1 \le \dots \le k_n \le \frac{\ell}{2}, \\ k_1 + \dots + k_n \text{ minimal} \end{cases}$$

eine Γ_n-Doppelnebenklasse in $\Gamma_n(p^\ell)$, die nicht im Erzeugnis

$$\langle T^{(n)}(p), T_j^{(n)}(p^2) \mid j \in \{0, \dots, n-1\}\rangle_{\mathbb{C}}$$

enthalten ist. Sei ℓ unter diesen Voraussetzungen minimal. Es ist dann notwendigerweise $k_1 = 0$, da wir sonst durch p teilen könnten. Nach Teil (b) von Proposition 3.22 gilt dann

$$\varphi(T) = \Gamma_{n-1} \operatorname{diag}(p^{k_2}, \dots, p^{k_n}, p^{\ell-k_2}, \dots, p^{\ell-k_n})\Gamma_{n-1}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ mit

$$\varphi(T) = P\big(T^{(n-1)}(p), T_0^{(n-1)}(p^2), \dots, T_{n-2}^{(n-1)}(p^2)\big).$$

Wir setzen nun

$$\tilde{T} := P\big(T^{(n)}(p), T_1^{(n)}(p^2), \dots, T_{n-1}^{(n)}(p^2)\big).$$

Hierfür gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} \varphi(T - \tilde{T}) &= \varphi(T) - \varphi(\tilde{T}) \\ &= P\big(T^{(n-1)}(p), T_0^{(n-1)}(p^2), \dots, T_{n-2}^{(n-1)}(p^2)\big) \\ &\quad - P\big(\varphi(T^{(n)}(p)), \varphi(T_1^{(n)}(p^2)), \dots, \varphi(T_{n-1}^{(n)}(p^2))\big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und also $T - \tilde{T} \in \ker(\varphi)$. Nach Teil (a) von Proposition 3.22 ist $T - \tilde{T}$ somit eine $\mathbb{C}$-Linearkombination von Γ_n-Doppelnebenklassen $\Gamma_n A \Gamma_n$ mit $A \equiv 0 \bmod (p)$. Für jede dieser Doppelnebenklassen hat die Matrix $p^{-1}A$ ganze Einträge. Wegen der Minimalität von ℓ ist die durch $p^{-1}A$ gegebene Doppelnebenklasse im Erzeugnis

$$\langle T^{(n)}(p), T_j^{(n)}(p^2) \mid j \in \{0, \dots, n-1\}\rangle_{\mathbb{C}}$$

enthalten. Nach Teil (a) von Lemma 3.16 trifft dies dann auch auf $\Gamma_n A \Gamma_n$ und insgesamt auch auf T zu, womit der erste Teil der Proposition gezeigt ist.

Schwieriger ist der Beweis der algebraischen Unabhängigkeit, für den man einen injektiven Homomorphismus

$$\mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_{n,p}) \to \mathbb{C}[X_0^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}] \tag{3.5}$$

in den Polynomring in $n+1$ Variablen und ihren Inversen findet und dessen Bild als eine geeignete Invariantenalgebra erkennt. Dies führen wir hier nicht durch. $\square$

3.3 Vertauschbarkeit von Heckeoperatoren und dem Siegeloperator

Der Siegel'sche Φ-Operator war durch die Formel

$$(f|\Phi)(z) = \lim_{r\to\infty} f\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & ir \end{pmatrix}$$

definiert worden. Hierbei war $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ irgendeine Funktion, für die dieser Grenzwert existiert, etwa eine Siegel'sche Modulform $f \in M_k^n$ oder allgemeiner eine Siegel'sche Modulform zu einer Hauptkongruenzuntergruppe.[47] Es ist für unsere Zwecke vorteilhaft, den modifizierten Siegeloperator

$$(f|\Phi_0)(z) := \lim_{r\to\infty} f\begin{pmatrix} ir & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

zu verwenden. Auch dieser Operator ist auf Modulformen zu beliebigen Hauptkongruenzuntergruppen von Γ_n anwendbar. Im Spezialfall einer Siegel'schen Modulform $f \in M_k^n$ gilt sogar $f|\Phi = f|\Phi_0$,

denn: Offensichtlich ist für ein beliebiges $j \in \{1, \dots, n\}$ die Matrix

$$u := \begin{pmatrix} 0 & 1_{n-j} \\ 1_j & 0 \end{pmatrix}$$

unimodular und somit

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & {}^t u^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma_n.$$

Unmittelbar aus der Definition der Modularität folgt dann für ein beliebiges $f \in M_k^n$ und ein beliebiges $j \in \{1, \dots, n\}$

$$f\begin{pmatrix} z_1^{(j)} & 0 \\ 0 & z_4^{(j)} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} z_4^{(j)} & 0 \\ 0 & z_1^{(j)} \end{pmatrix}$$

und somit im Spezialfall $j = 1$ die Behauptung. #

Jeder Linksnebenklasse $L := \Gamma_n M$ mit $M \in \Delta_n$ können wir einen Operator

$$\begin{array}{lcl} M_k^n & \to & \{f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}\} \\ f & \mapsto & f|L := f|_k M \end{array}$$

zuordnen. Im Allgemeinen ist dabei $f|L$ keine Modulform zur vollen Modulgruppe Γ_n, wohl aber zu einer geeigneten Kongruenzuntergruppe. Der Operator Φ_0 ist also auf $f|L$ anwendbar, und es stellt sich die Frage nach einem Vertauschungsgesetz der Art

$$(f|L)|\Phi_0 = (f|\Phi_0)|\tilde{L} \quad \text{mit einem geeigneten } \tilde{L}.$$

Wir wählen den Vertreter M mit $(a_M)_3^{(1)} = 0$, $c_M = 0$ und $(d_M)_2^{(1)} = 0$, so dass insbesondere

$$M_4 := \begin{pmatrix} (a_M)_4^{(1)} & (b_M)_4^{(1)} \\ 0 & (d_M)_4^{(1)} \end{pmatrix} \in \Delta_{n-1}$$

[47] Vgl. Übungsaufgabe 1.2. Den Begriff der Siegel'schen Modulform bezüglich einer solchen Hauptkongruenzuntergruppe führt man komplett analog zu Definition 2.6 ein.

gilt. Die Linksnebenklasse $L_4 := \Gamma_{n-1}M_4$ ist durch L eindeutig festgelegt. Für $M \in \Gamma_n(p^\ell)$ gilt

$$(f|L)(z) = (\det(d_M))^{-k} f\big(p^{-\ell}(z[{}^t a_M] + b_M {}^t a_M)\big)$$

und

$$\begin{pmatrix} ir & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} [{}^t a_M] = \begin{pmatrix} i((a_M)_1)^2 r + z[{}^t(a_M)_2] & (a_M)_2 z^t (a_M)_4 \\ (a_M)_4 z^t (a_M)_2 & z[{}^t(a_M)_4] \end{pmatrix}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}(f|L|\Phi_0)(z) &= (\det(d_M))^{-k} (f|\Phi_0)\big(p^{-\ell}(z[{}^t(a_M)_4] + (b_M)_4 {}^t(a_M)_4)\big) \\ &= (\det(d_M))^{-k} \det((d_M)_4)^k (f|\Phi_0|L_4)(z).\end{aligned}$$

Wie gewünscht gilt also

$$f|L|\Phi_0 = f|\Phi_0|\tilde{L} \quad \text{mit } \tilde{L} := \left(\frac{(a_M)_{11}}{p^\ell}\right)^k L_4.$$

Wir dehnen die Zuordnung $L \mapsto \tilde{L}$ zu einer (von k abhängigen) linearen Abbildung

$$\mathscr{L}(\Gamma_n, \Delta_{n,p}) \to \mathscr{L}(\Gamma_{n-1}, \Delta_{n-1,p})$$

aus. Das Bild von $\mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_{n,p})$ unter dieser Abbildung ist in $\mathscr{H}(\Gamma_{n-1}, \Delta_{n-1,p})$ enthalten,

denn: Sei

$$T = \sum_\nu c_\nu L^{(\nu)}$$

eine in $\mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_{n,p})$ enthaltene Linearkombination von Linksnebenklassen. Das bedeutet, dass T unter Rechtsmultiplikation mit Matrizen $N \in \Gamma_n$ invariant bleibt. Wenden wir dies speziell auf Matrizen der Form $N = 1_{2\,1} \times_{n-1} N_4$ an, so erhalten wir

$$T_4 = (TN)_4 = T_4 N_4$$

und somit

$$T_4 \in \mathscr{H}(\Gamma_{n-1}, \Delta_{n-1,p}).$$

Daraus folgt sofort die Behauptung. #

Proposition 3.23. *Für eine beliebige Modulform $f \in M_k^n$ gilt*

$$f|T^{(n)}(p)|\Phi = (1 + p^{n-k}) f|\Phi|T^{(n-1)}(p).$$

Beweis. Nach dem soeben Gezeigten und mit $f|T^{(n)}(p) \in M_k^n$ gilt

$$f|T^{(n)}(p)|\Phi = f|\Phi|\tilde{T}.$$

Hierbei ist $\tilde{T}$ eine Linearkombination von Doppelnebenklassen in $\Gamma_{n-1}(p)$. Andererseits ist $\Gamma_{n-1}(p)$ gerade mit der Doppelnebenklasse $T^{(n-1)}(p)$ identisch; wir erhalten also

$$f|T^{(n)}(p)|\Phi = c \cdot f|\Phi|T^{(n-1)}(p) \quad \text{mit einer Konstanten } c \in \mathbb{C}.$$

Diese Konstante kann man durch Abzählen der in $\Gamma_n(p)$ und $\Gamma_{n-1}(p)$ enthaltenen Linksnebenklassen ermitteln. □

Bemerkung 3.24. *Sei $\mathfrak{M} \subseteq \Gamma_n(r)$ mit $r \in \mathbb{N}$ eine endliche Vereinigung von Doppelnebenklassen, und sei $f \in M_k^n$ eine Eigenform des entsprechenden Heckeoperators, erfülle also*

$$f|T_{\mathfrak{M}} = \lambda f \quad \text{mit einem } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Wenn der 0-te Fourierkoeffizient a_0 von f nicht Null ist, so gilt

$$\lambda = \sum_{M \in \Gamma_n \backslash \mathfrak{M}} \det(d_M)^{-k},$$

im Spezialfall $\mathfrak{M} = \Gamma_n(p)$

$$\lambda = \prod_{\nu=1}^{n} (1 + p^{\nu-k}),$$

denn: Wir schreiben

$$\mathfrak{M} = \bigsqcup_{\nu} \Gamma_n M^{(\nu)} \quad \text{mit } c_{M^{(\nu)}} = 0 \text{ für alle } \nu.$$

Der 0-te Fourierkoeffizient von λf ist $\lambda \cdot a_0$, der von $f|T_{\mathfrak{M}}$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} (f|T_{\mathfrak{M}})(it1_n) &= \lim_{t\to\infty} \Big(\sum_{\nu} (f|_k M^{(\nu)})(it1_n)\Big) \\
&= \sum_{\nu} \det(d_{M^{(\nu)}})^{-k} \lim_{t\to\infty} f(M^{(\nu)}\langle it1_n\rangle) \\
&= \Big(\sum_{\nu} \det(d_{M^{(\nu)}})^{-k}\Big) \cdot a_0.
\end{aligned}$$

Für $a_0 \neq 0$ folgt offenbar die erste Behauptung.

Für den Beweis der zweiten Behauptung schließen wir induktiv mit Proposition 3.23 und erhalten

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} (f|T_{\mathfrak{M}})(it1_n) &= \lim_{t\to\infty} (f|T^{(n)}(p))(it1_n) \\
&= f|T^{(n)}(p)|\Phi^n \\
&= \prod_{\nu=1}^{n} (1 + p^{\nu-k}) f|\Phi^n \\
&= \prod_{\nu=1}^{n} (1 + p^{\nu-k}) \cdot a_0
\end{aligned}$$

wie verlangt. #

Proposition 3.25. *Die Siegel'sche Eisensteinreihe aus Bemerkung 2.34*

$$E_k^n(z) = \sum_{M \in \Gamma_{n,0} \backslash \Gamma_n} \det(c_M z + d_M)^{-k} \quad \text{mit } k > n+1$$

ist eine simultane Eigenform aller Heckeoperatoren $T \in \mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_n)$. Wegen

$$\lim_{t\to\infty} E_k^n(it1_n) = 1$$

sind die jeweiligen Heckeeigenwerte durch die Formeln aus Bemerkung 3.24 gegeben.

Beweis. Sei $\mathfrak{M}$ eine endliche Vereinigung von Doppelnebenklassen rationaler symplektischer Ähnlichkeitsmatrizen. Schreiben wir

$$E_k^n = \sum_{M \in \Gamma_{n,0} \backslash \Gamma_n} 1|_k M \quad \text{mit } k > n+1,$$

so folgt

$$E_k^n | T_{\mathfrak{M}} = \sum_{N \in \Gamma_n \backslash \mathfrak{M}} \sum_{M \in \Gamma_{n,0} \backslash \Gamma_n} 1|_k MN = \sum_{M \in \Gamma_{n,0} \backslash \mathfrak{M}} 1|_k M.$$

Wir zerlegen nun $\mathfrak{M}$ in Γ_n-Rechtsnebenklassen

$$\mathfrak{M} = \bigsqcup_{\nu} M^{(\nu)} \Gamma_n \quad \text{mit } c_{M^{(\nu)}} = 0 \text{ für alle } \nu.$$

Es gibt eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \Gamma_{n,0}$ von endlichem Index mit

$$(M^{(\nu)})^{-1} \Gamma M^{(\nu)} \subseteq \Gamma_{n,0} \quad \text{für alle } \nu.$$

Diese Gruppe operiert auf den einzelnen Rechtsnebenklassen

$$\Gamma M^{(\nu)} \Gamma_n \subseteq M^{(\nu)} \Gamma_n.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
E_k^n | T_{\mathfrak{M}} &= \left[\Gamma_{n,0} : \Gamma\right]^{-1} \cdot \sum_{M \in \Gamma \backslash \mathfrak{M}} 1|_k M \\
&= \left[\Gamma_{n,0} : \Gamma\right]^{-1} \cdot \sum_{\nu} \sum_{M \in \Gamma \backslash M^{(\nu)} \Gamma_n} 1|_k M \\
&= \left[\Gamma_{n,0} : \Gamma\right]^{-1} \cdot \sum_{\nu} \sum_{M \in (M^{(\nu)})^{-1} \Gamma M^{(\nu)} \backslash \Gamma_n} 1|_k M^{(\nu)} M \\
&= \left[\Gamma_{n,0} : \Gamma\right]^{-1} \cdot \sum_{\nu} \det(d_{M^{(\nu)}})^{-k} \sum_{M \in (M^{(\nu)})^{-1} \Gamma M^{(\nu)} \backslash \Gamma_n} 1|_k M
\end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Lemma 3.26. *Sei $\mathfrak{M} \subseteq \Gamma_n(r)$ eine endliche Vereinigung von Γ_n-Doppelnebenklassen und $d(\mathfrak{M})$ die Anzahl der in $\mathfrak{M}$ enthaltenen Γ_n-Linksnebenklassen. Sei weiter $f \in S_k^n \setminus \{0\}$ eine Eigenform des Operators $T_{\mathfrak{M}}$ mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$|\lambda| \leq r^{-\frac{nk}{2}} \cdot d(\mathfrak{M}),$$

im Spezialfall $\mathfrak{M} = \Gamma_n(p)$ also

$$|\lambda| \leq p^{-\frac{nk}{2}} \cdot \prod_{\nu=1}^{n} (1 + p^{\nu}).$$

Beweis. Da f eine Spitzenform ist, besitzt die Funktion

$$|f(z)|\det(\mathrm{Im}(z))^{\frac{k}{2}}$$

nach Lemma 2.26 ein Maximum in $\mathbb{H}_n$. Es gibt also ein $z_0 \in \mathbb{H}_n$ mit

$$|f(z)| \leq \left(\frac{\det(\mathrm{Im}(z_0))}{\det(\mathrm{Im}(z))}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot |f(z_0)|.$$

Für ein beliebiges $M \in \mathfrak{M}$ mit $c_M = 0$ gilt dann analog zu (1.11) insbesondere

$$|f(M\langle z_0\rangle)| \leq \left(r^{-n}\det(d_M)^2\right)^{\frac{k}{2}} \cdot |f(z_0)|.$$

Es folgt

$$|\lambda f(z_0)| = |(f|T_{\mathfrak{M}})(z_0)| \leq \sum_{\substack{M\in\Gamma_n\backslash\mathfrak{M} \\ \text{mit } c_M=0}} |\det(d_M)^{-k} f(M\langle z_0\rangle)| \leq r^{-\frac{nk}{2}} \cdot d(\mathfrak{M}) \cdot |f(z_0)|.$$

Das Lemma folgt, da nach Voraussetzung f nicht verschwindet, so dass $|f(z_0)|$ nach Wahl von z_0 größer als Null sein muss und wir also die obige Ungleichung durch $|f(z_0)|$ dividieren dürfen. □

Proposition 3.27. *Für gerades $k > n+1$ ist die Eisensteinreihe E_k^n die einzige Modulform $f \in M_k^n$ mit*

(i) $\lim_{t\to\infty} f(it1_n) = 1$,

(ii) $f|T^{(n)}(p) = \lambda(p)f$ *mit* $\lambda(p) \in \mathbb{C}$ *für unendlich viele Primzahlen* p.

Insbesondere ist nach Proposition 3.25 jede Modulform mit diesen Eigenschaften simultane Eigenform aller Heckeoperatoren $T \in \mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_n)$.

Beweis. Wir wollen die Proposition per Induktion nach n beweisen. Für $n = 0$ ist die Aussage trivial. Wir nehmen nun an, die Aussage sei für $n-1$ gezeigt, und leiten daraus die Aussage für n her. Seien dafür $f, g \in M_k^n$ mit den Eigenschaften (i) und (ii) gegeben. Nach den Rechenregeln des Siegeloperators erfüllen $f|\Phi$ und $g|\Phi$ dann ebenfalls Eigenschaft (i), und wegen Proposition 3.23 auch Eigenschaft (ii). Nach Induktionsvoraussetzung gilt somit

$$f|\Phi = E_k^{n-1} = g|\Phi$$

und also $f - g \in S_k^n$. Nach Bemerkung 3.24 sind die Eigenwerte von f, g und somit auch $f - g$ von der Form

$$\lambda(p) = \prod_{\nu=1}^{n}(1 + p^{\nu-k}).$$

Andererseits haben die Eigenwerte einer nicht verschwindenden Eigenform nach Lemma 3.26 eine echt kleinere Größenordnung. Es folgt $f = g$ und somit die Behauptung. □

Eine Vertauschbarkeit von Heckeoperator und Siegeloperator wie in Proposition 3.23 lässt sich auch allgemeiner zeigen. Genauer gilt

Proposition 3.28. *Es gibt einen surjektiven Ringhomomorphismus*

$$\begin{array}{lcl} \mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_{n,p}) & \to & \mathscr{H}(\Gamma_{n-1}, \Delta_{n-1,p}), \\ T & \mapsto & \tilde{T} \end{array}$$

mit der Eigenschaft

$$f|T|\Phi = f|\Phi|\tilde{T} \quad \text{für alle } f \in M_k^n.$$

Hieraus folgt dann unmittelbar

Satz 3.29. *Sei $f \in M_k^n$ eine simultane Eigenform aller Heckeoperatoren $T \in \mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_n)$, gelte also*

$$f|T = \lambda_T f \quad \text{mit einem geeigneten } \lambda_T \in \mathbb{C}$$

für alle solchen Operatoren T. Dann ist auch $f|\Phi$ eine simultane Eigenform aller Heckeoperatoren.

Proposition 3.28 hat aber noch eine andere bedeutende Folgerung. Denn wegen

$$f|T|\Phi = f|\Phi|\tilde{T} = 0|\tilde{T} = 0 \quad \text{für alle } f \in S_k^n, T \in \mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_{n,p})$$

lassen Heckeoperatoren offenbar den Raum der Spitzenformen S_k^n fest. Da man zeigen kann, dass Heckeoperatoren zu Doppelnebenklassen symplektischer Ähnlichkeitsmatrizen bezüglich des Petersson-Skalarprodukts selbstadjungiert sind, folgt daraus einerseits, dass S_k^n eine Basis aus simultanen Heckeeigenformen hat, und andererseits die Heckeinvarianz des Komplementraums $(S_k^n)^\perp$. Nun kann man den Φ-Operator anwenden und erhält wegen der Vertauschungsregel und der Injektivität von Φ einen invarianten Raum $\Phi((S_k^n)^\perp)$. Dies reduziert den Grad und ermöglicht uns einen induktiven Beweis für die Existenz einer Basis aus simultanen Heckeeigenformen von ganz M_k^n.

3.4 Die Wirkung von Heckeoperatoren auf Thetareihen

Die Wirkung von Heckeoperatoren auf Thetareihen kann explizit angegeben werden. Der Beweis hierfür beruht auf dem Darstellungssatz 3.32 für singuläre Modulformen. Letztere führen wir im Folgenden ein und leiten den genannten Darstellungssatz her.

Definition 3.30. *Eine Siegel'sche Modulform*

$$f(z) = \sum_{t \in \Lambda_n} a_t e_n(tz) \quad \in M_k^n$$

*heißt **singulär**, falls ihre Fourierkoeffizienten für alle $t \in \Lambda_n^+$ verschwinden.*

Bemerkung 3.31. (a) *Die singulären Modulformen bilden das Gegenstück zu den Spitzenformen, die ja darüber charakterisiert sind, dass ihre Fourierkoeffizienten für alle $t \in \Lambda_n \setminus \Lambda_n^+$ verschwinden.*

(b) *Im Fall $n = 1$ ist eine singuläre Modulform wegen $\Lambda_1 \setminus \Lambda_1^+ = \{0\}$ stets konstant. Für $n \geq 2$ gibt es jedoch nichttriviale singuläre Modulformen. Um ein solches Beispiel zu finden betrachten wir ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$, für das ein $a \in 2\Lambda_m^+$ mit $\det(a) = 1$ existiert. Nach Satz 2.19 ist dann m durch 8 teilbar, und die Thetareihe*

$$\vartheta_a^{(n)}(z) = \sum_{t \in \Lambda_n} \nu_a(t) e_n(tz) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}_n$$

ist eine Modulform in $M^n_{\frac{m}{2}}$. Der Fourierkoeffizient

$$\nu_a(t) = \left| \{g \in \mathbb{Z}^{m \times n} \mid \frac{1}{2} a[g] = t\} \right|$$

zu einem $t \in \Lambda_n$ kann nur dann von Null verschieden sein, wenn der Rang von t nicht größer als m ist. Für $m < n$ ist $\vartheta_a^{(n)}$ daher eine singuläre Modulform.

Satz 3.32. *Für eine von Null verschiedene singuläre Modulform $f \in M_k^n$ gelten die folgenden Aussagen.*

(a) *Es gelten $4 \mid k$ und $k < \frac{n}{2}$.*

(b) *f ist eine Linearkombination von Thetareihen $\vartheta_a^{(n)}$ zu Matrizen $a \in 2\Lambda_{2k}^+$ mit $\det(a) = 1$.*

Beweis. Sei

$$0 \neq f(z) = \sum_{t \in \Lambda_n \setminus \Lambda_n^+} a_t e_n(tz) \quad \in M_k^n$$

eine singuläre Modulform. Wir wählen unter den von Null verschiedenen Fourierkoeffizienten a_t einen aus, für den $r := \mathrm{rk}(t)$ maximal ist. Dann gibt es eine unimodulare Matrix $u \in U_n$ und ein $a \in 2\Lambda_r^+$ mit

$$2t[u] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Wir wählen jetzt t und u so, dass die Determinante $\det(a)$ minimal ist. Dann gilt

$$r = 2k \quad \text{und} \quad \det(a) = 1, \tag{3.6}$$

denn: Wir betrachten die in Übungsaufgabe 2.2 eingeführte Fourier-Jacobi-Entwicklung von f

$$f(z) = \sum_{t_4 \in \Lambda_r} \phi_{n,n-r}(z_1^{(n-r)}, z_2^{(n-r)}; t_4) e_r(t_4 z_4^{(n-r)}) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}_n$$

mit

$$\phi_{n,n-r}(z_1^{(n-r)}, z_2^{(n-r)}; t_4) := \sum_{\substack{t_1,\, t_2 \\ t \in \Lambda_n}} a_t e_{n-r}(t_1 z_1^{(n-r)} + 2t_2 {}^t z_2^{(n-r)}).$$

Schränken wir diese auf den Teilraum

$$\{z \in \mathbb{H}_n \mid z_2^{(n-r)} = 0\}.$$

ein, so sind nach Teil (b) von Übungsaufgabe 2.2 die Koeffizientenfunktionen

$$\phi_{n,n-r}(z_1, 0; t_4) := \sum_{\substack{t_1,\, t_2 \\ t \in \Lambda_n}} a_t e_{n-r}(t_1 z_1).$$

Modulformen von Gewicht k bezüglich Γ_{n-r}. Im Spezialfall $t_4 = \frac{a}{2}$ gilt

$$\frac{\phi_{n,n-r}(z_1, 0; \frac{a}{2})}{a_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} \end{smallmatrix}\right)}} = \vartheta_a^{(n-r)}(z_1),$$

denn: Wenn der Koeffizient a_t von Null verschieden ist, so gilt nach Wahl von r

$$2t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a^* \end{pmatrix} [u] \quad \text{für geeignete } a^* \in 2\Lambda_r, u \in U_n.$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$a = a^*[u_4^{(n-r)}]$$

und insbesondere $\det a^* \neq 0$. Nach Wahl von a erhalten wir $\det a^* \geq \det a$. Die Matrizen a und a^* sind also unimodular äquivalent, und wir erhalten

$$\phi_{n,n-r}(z_1, 0; \frac{a}{2}) = a_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} \end{smallmatrix}\right)} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} t_1 & t_2 \\ t_2 & \frac{a}{2} \end{smallmatrix}\right) \simeq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} \end{smallmatrix}\right)} e_{n-r}(t_1 z_1^{(n-r)}).$$

Die in der Summation auftretenden Matrizen sind von der Form

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} {}^t gag & {}^t ga \\ ag & a \end{pmatrix} \quad \text{mit } g \in \mathbb{Z}^{r \times (n-r)},$$

so dass die Behauptung folgt. #

Nach Teil (b) von Übungsaufgabe 2.2 gilt insbesondere $\vartheta_a^{(n-r)}(z_1) \in M_k^{n-r}$. Die Behauptung folgt nun mit Lemma 2.17 und Satz 2.19. #

Behauptung (a) folgt direkt aus (3.6),

denn: Zum Einen folgt aus $r = 2k$ und $r < n$ sofort $k < \frac{n}{2}$. Zum Anderen erhalten wir $4 \mid k$ aus $\det(a) = 1$ und Lemma 2.18. #

Sei nun $t_1, \ldots, t_h$ ein Vertretersystem der unimodularen Äquivalenzklassen in

$$\{a \in 2\Lambda_{2k}^+ \mid \det(a) = 1\}.$$

Wir betrachten dann die Funktion

$$\tilde{f}(z) := f(z) - \sum_{\ell=1}^{h} c_\ell \vartheta_{t_\ell}^{(n)}(z) \quad \text{mit } c_\ell = \frac{a_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t_\ell \end{smallmatrix}\right)}}{\nu_{t_\ell}(t_\ell)}.$$

Diese ist wieder singulär und hat daher eine Fourierentwicklung der Form

$$\tilde{f}(z) = \sum_{t \in \Lambda_n \setminus \Lambda_n^+} \tilde{a}_t e_n(tz).$$

Nach Konstruktion und Lemma 2.12 gilt

$$\tilde{a}_{\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & a\end{smallmatrix}\right)} = 0 \quad \text{für alle } a \in 2\Lambda_{2k}^{+} \text{ mit } \det(a) = 1.$$

Andererseits gibt es nach (3.6) für jede von Null verschiedene singuläre Modulform einen von Null verschiedenen Fourierkoeffizienten dieser Art. Es folgt daher $\tilde{f} = 0$ und somit Behauptung (b). □

Bemerkung 3.33. *Man kann zeigen, dass eine Modulform aus M_k^n genau dann singulär ist, wenn $k < \frac{n}{2}$ gilt. Wir führen dies nicht durch, ein Beweis findet sich etwa in Anhang A.IV in [Fre2].*

Bemerkung 3.34. *Sei*

$$f(z) = \sum_{t \in \Lambda_n} a_t e_n(tz) \quad \in M_k^n$$

eine Siegel'sche Modulform vom Gewicht $k \equiv 0 \bmod (4)$, die sich als Linearkombination

$$f(z) = \sum_{\ell=1}^{h} c_\ell \vartheta_{t_\ell}^{(n)}(z) \quad \text{mit } t_\ell \in 2\Lambda_{2k}^{+} \text{ mit } \det(t_\ell) = 1 \tag{3.7}$$

von Thetareihen wie in Abschnitt 2.3 schreiben lässt. Gilt dann $k \leq \frac{n}{2}$, und sind $t_1, \dots, t_h$ paarweise unimodular inäquivalent, so sind die Koeffizienten dieser Linearkombination eindeutig durch

$$c_\ell = \frac{a_{\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & t_\ell\end{smallmatrix}\right)}}{\nu_{t_\ell}(t_\ell)} \quad \text{für alle } \ell \in \{1, \dots, h\}$$

bestimmt,

denn: Durch Koeffizientenvergleich der Fourierentwicklungen beider Seiten von (3.7) erhalten wir

$$a_t = \sum_{\ell=1}^{h} c_\ell \nu_{t_\ell}(t) \quad \text{für alle } t \in \Lambda_n.$$

Im Spezialfall $t = \left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & t_\ell\end{smallmatrix}\right)$ bedeutet dies wegen der vorausgesetzten Inäquivalenz von $t_1, \dots, t_h$

$$a_{\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & t_\ell\end{smallmatrix}\right)} = \sum_{\mu=1}^{h} c_\mu \nu_{t_\mu} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t_\ell \end{pmatrix} = \sum_{\mu=1}^{h} c_\mu \nu_{t_\mu}(t_\ell) = c_\ell \nu_{t_\ell}(t_\ell) \quad \text{für alle } t \in \Lambda_n$$

und somit die Behauptung. #

Definition 3.35. *Eine Modulform $f \in M_k^n$ heißt **stabil**, wenn es eine singuläre Modulform $\tilde{f} \in M_k^{\tilde{n}}$ gibt mit*

(i) $\tilde{n} > n$,

(ii) $f = \tilde{f}|\Phi^{\tilde{n}-n}$.

Satz 3.36. *Durch*

$$M_k^{n,\vartheta} := \{f \in M_k^n \mid f \text{ ist Linearkombination von Thetareihen } \vartheta_a^{(n)} \in M_k^n \text{ zu Matrizen } a \in 2\Lambda_{2k}^{+}\}$$

ist offensichtlich ein Untervektorraum von M_k^n definiert. Für diesen gelten die folgenden Aussagen.

(a) $M_k^{n,\vartheta}$ *besteht genau aus den stabilen Modulformen in* M_k^n.

(b) $M_k^{n,\vartheta}$ *wird durch Heckeoperatoren* $T \in \mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_n)$ *in sich überführt.*

Beweis. Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Nach Teil (b) von Bemerkung 3.31 und Beispiel 2.23 sind beliebige Thetareihen $\vartheta_a^{(n)} \in M_k^n$ mit $a \in 2\Lambda_{2k}^+$ singulär und erfüllen die Beziehung

$$\vartheta_a^{(n)}|\Phi = \vartheta_a^{(n-1)}.$$

Hieraus folgt, dass solche Thetareihen, und somit auch alle Elemente von $M_k^{n,\vartheta}$, stabil sind.

Umgekehrt gibt es zu jeder stabilen Modulform $f \in M_k^n$ nach Definition 3.35 eine singuläre Modulform $\tilde{f} \in M_k^{\tilde{n}}$ mit $\tilde{n} > n$ und $f = \tilde{f}|\Phi^{\tilde{n}-n}$. Nach Satz 3.32 lässt sich $\tilde{f}$ als Linearkombination geeigneter Thetareihen darstellen, so dass nach Beispiel 2.23 die stabile Modulform f in $M_k^{n,\vartheta}$ liegt. Insgesamt haben wir so Behauptung (a) gezeigt.

Wir zeigen nun Behauptung (b). Seien dafür $f \in M_k^{n,\vartheta}$ und $T \in \mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_n)$. Nach Teil (a) ist dann f stabil, so dass es ein $\tilde{n} > n$ und eine singuläre Modulform $\tilde{f} \in M_k^{\tilde{n}}$ gibt mit

$$f|T = (\tilde{f}|\Phi^{\tilde{n}-n})|T.$$

Nach Proposition 3.28 gibt es dann ein $\tilde{T} \in \mathscr{H}(\Gamma_{\tilde{n}}, \Delta_{\tilde{n}})$ mit

$$f|T = (\tilde{f}|\tilde{T})|\Phi^{\tilde{n}-n}.$$

Nach Bemerkung 3.33 ist $\tilde{f}|\tilde{T}$ mit $\tilde{f}$ wieder singulär und somit $f|T$ nach Teil (a) stabil. Das zeigt den Satz. □

Wir wollen nun konkrete Formeln für die Wirkung von Hecke-Operatoren auf Thetareihen herleiten. Allgemein gilt zunächst der folgende Satz.

Proposition 3.37. *Sei* $k \leq \frac{n}{2}$, *und sei* $t_1, \ldots, t_h \in 2\Lambda_{2k}^+$ *ein Vertretersystem unter unimodularer Äquivalenz mit* $\det(t_\ell) = 1$ *für alle* $\ell \in \{1, \ldots, h\}$. *Sei weiter*

$$T = \sum_j c_j \Gamma_n M_j \quad \text{mit } c_j \in \mathbb{C} \text{ und } M_j = \begin{pmatrix} a_{M_j} & b_{M_j} \\ 0 & d_{M_j} \end{pmatrix} \in \Delta_n$$

ein Element der Heckealgebra $\mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_n) \subseteq \mathscr{L}(\Gamma_n, \Delta_n)$. *Dann gilt*

$$\vartheta_{t_\ell}|T = \sum_{\mu=1}^{h} c_{\ell\mu}(T)\vartheta_{t_\mu} \quad \text{für alle } 1 \leq \ell \leq h$$

mit

$$c_{\ell\mu}(T) = \sum_j c_j (\det d_{M_j})^{-k} \frac{\nu_{t_\ell}(d_{M_j}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t_\mu \end{smallmatrix}\right)a_{M_j}^{-1})}{\nu_{t_\mu}(t_\mu)} e_n\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t_\mu \end{pmatrix} a_{M_j}^{-1} b_{M_j}\right).$$

Beweis. Nach Teil (b) von Satz 3.36 liegt $\vartheta_{t_\ell}|T$ in $M_k^{n,\vartheta}$, lässt sich also als Linearkombination der Thetareihen $\vartheta_{t_1}, \ldots, \vartheta_{t_h}$ schreiben. Ist die Fourierentwicklung von $\vartheta_{t_\ell}|T$ durch

$$\vartheta_{t_\ell}|T = \sum_{t \in \Lambda_n} a_t^{(\ell)} e_n(tz)$$

gegeben, so gilt nach Bemerkung 3.34 genauer

$$\vartheta_{t_\ell}|T = \sum_{\mu=1}^{h} c_{\ell\mu}(T)\vartheta_{t_\mu} \quad \text{mit } c_{\ell\mu}(T) = \frac{a^{(\ell)}_{\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & t_\mu\end{smallmatrix}\right)}}{\nu_{t_\mu}(t_\mu)}.$$

Den hier vorkommenden Fourierkoeffizienten von $\vartheta_{t_\ell}|T$ können wir in Termen der Fourierkoeffizienten von ϑ_{t_ℓ} ausdrücken. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{t \in \Lambda_n} a_t^{(\ell)} e_n(tz) = (\vartheta_{t_\ell}|T)(z) &= \sum_j c_j (\det d_{M_j})^{-k} \vartheta_{t_\ell}\big((a_{M_j} z + b_{M_j}) d_{M_j}^{-1}\big) \\
&= \sum_j c_j (\det d_{M_j})^{-k} \sum_{t \in \Lambda_n} \nu_{t_\ell}(t) e_n(t(a_{M_j} z + b_{M_j}) d_{M_j}^{-1}) \\
&= \sum_j c_j (\det d_{M_j})^{-k} \sum_{t \in \Lambda_n} \nu_{t_\ell}(t) e_n(d_{M_j}^{-1} t(a_{M_j} z + b_{M_j})),
\end{aligned}$$

wobei wir für das letzte Gleichheitszeichen die Konjugationsinvarianz der Spur ausgenutzt haben. Durch die Substitution $t \mapsto d_{M_j} t a_{M_j}^{-1}$ erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
\sum_{t \in \Lambda_n} a_t^{(\ell)} e_n(tz) &= \sum_j c_j (\det d_{M_j})^{-k} \sum_{\substack{t \text{ mit} \\ d_{M_j} t a_{M_j}^{-1} \in \Lambda_n}} \nu_{t_\ell}(d_{M_j} t a_{M_j}^{-1}) e_n(tz + t a_{M_j}^{-1} b_{M_j}) \\
&= \sum_j c_j (\det d_{M_j})^{-k} \sum_{\substack{t \in \mathrm{Symm}_n(\mathbb{Q}) \text{ pos. semidef.} \\ d_{M_j} t a_{M_j}^{-1} \text{ halbganz}}} \nu_{t_\ell}(d_{M_j} t a_{M_j}^{-1}) e_n(t a_{M_j}^{-1} b_{M_j}) e_n(tz).
\end{aligned}$$

Die Proposition folgt nun durch Koeffizientenvergleich. □

Im Spezialfall $k = \frac{n}{2}$ und $T = T^{(n)}(p)$ mit p prim lässt sich die Formel aus Proposition 3.37 stark vereinfachen. Hierzu bezeichnen wir für jedes $j \in \{0, \ldots, n\}$ mit $\mathscr{D}_j$ ein Vertretersystem der in der Doppelnebenklasse

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} 1_{n-j} & 0 \\ 0 & p1_j \end{pmatrix} \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$$

enthaltenen Linksnebenklassen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})d$ und schreiben

$$\mathscr{D} := \bigcup_{j=0}^{n} \mathscr{D}_j.$$

In dieser Notation gilt

Korollar 3.38. *Sei p eine Primzahl, und sei $t_1, \dots, t_h \in 2\Lambda_n^+$ ein Vertretersystem unter unimodularer Äquivalenz mit* $\det(t_\ell) = 1$ *für alle $\ell \in \{1, \dots, h\}$. Dann gilt*

$$\vartheta_{t_\ell} | T^{(n)}(p) = \sum_{\mu=1}^{h} c_{\ell\mu}(T^{(n)}(p)) \vartheta_{t_\mu} \quad \textit{für alle } 1 \le \ell \le h$$

mit

$$c_{\ell\mu}(T^{(n)}(p)) = \sum_{j=\frac{n}{2}}^{n} p^{\frac{j(j+1-n)}{2}} \sum_{d \in \mathscr{D}_j} \frac{\nu_{t_\ell}(\frac{1}{p} t_\mu[{}^t d])}{\nu_{t_\mu}(t_\mu)}.$$

Beweis. Nach Übungsaufgabe 3.5 gilt

$$\Gamma_n \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & p1_n \end{pmatrix} \Gamma_n = \sum_{d \in \mathscr{D}} \sum_{b} \Gamma_n \begin{pmatrix} p\,{}^t d^{-1} & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

wobei b für jedes feste $d \in \mathscr{D}$ ein Vertretersystem in der Menge

$$\{b \in \mathbb{Z}^{n \times n} \mid bd^{-1} \text{ symmetrisch}\}$$

bezüglich der Äquivalenzrelation

$$b_1 \cong b_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad (b_1 - b_2)d^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$$

durchläuft. Für beliebige $d \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ und $t \in 2\Lambda_n$ setzen wir nun

$$\sigma(d, t) := \sum_{b} e_n(tbd^{-1}),$$

wobei b das gleiche Vertretersystem durchlaufe wie gerade eben. Dann gilt nach Proposition 3.37

$$c_{\ell\mu}(T^{(n)}(p)) = \sum_{d \in \mathscr{D}} (\det d)^{-\frac{n}{2}} \frac{\nu_{t_\ell}(\frac{1}{p} t_\mu[{}^t d])}{\nu_{t_\mu}(t_\mu)} \sigma(d, \frac{1}{p} t_\mu[{}^t d]). \tag{3.8}$$

Es gilt nun die Summe $\sigma(d, \frac{1}{p} t_\mu[{}^t d])$ zu berechnen. Dafür betrachten wir zunächst allgemein Summen der Form $\sigma(d, t)$ mit $d \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ und $t \in 2\Lambda_n$. Nach dem Elementarteilersatz gibt es Matrizen $u, \tilde{u} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ und ganze Zahlen $d_1, \dots, d_n$ mit

$$ud\tilde{u} = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n) =: n(d) \quad \text{und} \quad d_j \mid d_{j+1} \text{ für alle } 1 \le j < n$$

und also mit

$$\sigma(d, t) = \sum_{b} e_n(tbd^{-1}) = \sum_{b} e_n(tb\tilde{u}n(d)^{-1}u) = \sum_{b} e_n(t[{}^t u]({}^t u^{-1} b\tilde{u})n(d)^{-1}) = \sigma(n(d), t[{}^t u]).$$

Wir können daher bei der Berechnung von $\sigma(d, t)$ ohne Einschränkung annehmen, dass d in Elementarteilernormalform vorliegt. Für eine Elementarteilermatrix $d = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ und ein beliebiges $t \in 2\Lambda_n$ gilt

$$\begin{aligned} 2d_j \mid t_{jj} \text{ und } d_j \mid t_{ij} \text{ für alle } 1 \le i \le j \le n \quad &\Longrightarrow \sigma(d, t) \ne 0 \\ &\Longrightarrow \sigma(d, t) = d_n d_{n-1}^2 \dots d_1^n, \end{aligned} \tag{3.9}$$

denn: Die Voraussetzungen bedingen

$$e_n(tbd^{-1}) = e_n(d^{-1}tb) = e^{2\pi i \operatorname{tr}(d^{-1}tb)} = 1$$

für eine beliebige Wahl einer ganzen Matrix b. Insbesondere folgt die erste Teilbehauptung.

Die Matrix bd^{-1} ist offenbar genau dann symmetrisch, wenn

$$b_{ij} = \frac{d_j}{d_i} b_{ji} \quad \text{für alle } 1 \le i, j \le n$$

gilt. Ein beliebiges System $\{b_{ij} \mid 1 \le i \le j \le n\}$ ganzer Zahlen lässt sich daher eindeutig zu einer Matrix b mit $bd^{-1} \in \operatorname{Symm}_n(\mathbb{Z})$ ergänzen. Ein Vertretersystem modulo d erhält man durch die Forderung

$$0 \le b_{ij} < d_i \quad \text{für alle } i \le j.$$

Dieses Vertretersystem enthält genau $d_n d_{n-1}^2 \ldots d_1^n$ Elemente, so dass die zweite Teilbehauptung folgt. #

Hieraus können wir nun

$$j \ge \frac{n}{2} \quad \text{und} \quad (\det d)^{-\frac{n}{2}} \sigma(d, \frac{1}{p} t_\mu[{}^t d]) = p^{\frac{j(j+1-n)}{2}}$$

schließen, sobald die in (3.8) auftretende Zahl $\nu_{t_\ell}(\frac{1}{p} t_\mu[{}^t d])$ für ein $d \in \mathscr{D}_j$ von Null verschieden ist,

denn: Wie oben schon angemerkt können wir ohne Einschränkung annehmen, dass d in Elementarteilernormalform vorliegt. Hat die Matrix

$$t := \frac{1}{p} t_\mu[{}^t d]$$

ganzzahlige Einträge, so gilt wegen $\det(t_\mu) = 1$ bzw. $d \in \mathscr{D}_j$

$$p^n \mid (\det d)^2 = p^{2j} \quad \text{und} \quad t_4^{(j)} \equiv 0 \bmod (p).$$

Nun ist zum Einen die erste Teilbehauptung klar; zum Anderen sind die Voraussetzungen für (3.9) erfüllt. Daraus folgt

$$(\det d)^{-\frac{n}{2}} \sigma(d, \frac{1}{p} t_\mu[{}^t d]) = (p^j)^{-\frac{n}{2}} \cdot \left(p \cdot p^2 \cdot \ldots \cdot p^j \cdot 1^{j+1} \cdot \ldots \cdot 1^n\right) = p^{-\frac{jn}{2}} \cdot p^{\frac{j(j+1)}{2}} = p^{\frac{j(j+1-n)}{2}}$$

und somit die zweite Teilbehauptung. #

Offensichtlich folgt nun das Korollar. □

Die Koeffizientenformel aus Korollar 3.38 lässt sich noch vereinfachen. Dazu zeigen wir den folgenden Zusammenhang zwischen den Fourierkoeffizienten der Thetareihe ϑ_{t_ℓ}.

Proposition 3.39. *Sei p eine Primzahl, und sei $t_1, \ldots, t_h \in 2\Lambda_n^+$ ein Vertretersystem unter unimodularer Äquivalenz mit* $\det(t_\ell) = 1$ *für alle $\ell \in \{1, \ldots, h\}$. Für beliebige $\ell, \mu \in \{1, \ldots, n\}$ und $\frac{n}{2} \leq j \leq n$ gilt dann*

$$\sum_{d \in \mathscr{D}_j} \nu_{t_\ell}(\frac{1}{p} t_\mu[{}^t d]) = \alpha(p, j, n) \cdot \nu_{t_\ell}(p t_\mu)$$

mit

$$\alpha(p, j, n) := \frac{(p^{n-j+1} - 1)(p^{n-j+2} - 1) \ldots (p^{\frac{n}{2}} - 1)}{(p-1)(p^2 - 1) \ldots (p^{j - \frac{n}{2}} - 1)}.$$

Beweis. Für ein beliebiges $j \in \{1, \ldots, n\}$ setzen wir

$$d_j := \begin{pmatrix} 1_{n-j} & 0 \\ 0 & p 1_j \end{pmatrix}.$$

Ist eine Darstellung

$$t_\ell[g] = p t_\mu \quad \text{mit einem } g \in \mathbb{Z}^{n \times n}$$

gegeben, so gilt für die Elementarteilernormalform $n(g)$ von g notwendigerweise

$$n(g) = d_{\frac{n}{2}}.$$

Da $d_{\frac{n}{2}}$ und $p d_{\frac{n}{2}}^{-1}$ unimodular äquivalent sind, gibt es unimodulare Matrizen $u, v \in U_n$ mit

$$ugv = p d_{\frac{n}{2}}^{-1}.$$

Nach Voraussetzung gilt $\frac{n}{2} \leq j$; es gibt also ein $\tilde{d}_j \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ mit

$$ugv = p d_{\frac{n}{2}}^{-1} = \tilde{d}_j p d_j^{-1}$$

und somit

$$g = u^{-1} \tilde{d}_j p d_j^{-1} v^{-1}.$$

Setzen wir nun $\tilde{g} := u^{-1} \tilde{d}_j$ und $d := {}^t v d_j$, so gilt

$$t_\ell[\tilde{g}] = \frac{1}{p} t_\mu[{}^t d] \quad \text{mit } \tilde{g} \in \mathbb{Z}^{n \times n} \text{ und } d \in \mathscr{D}_j.$$

Die Proposition folgt nun offenbar, wenn wir zeigen können, dass die Anzahl der Matrizen $d \in \mathscr{D}_j$, für die $\tilde{g} = \frac{1}{p} g^t d$ ganzzahlige Einträge hat, genau $\alpha(p, j, n)$ ist. Dies prüft man nach, indem man ausnutzt, dass in die Berechnung dieser Anzahl die genaue Gestalt des Vertretersystems $\mathscr{D}_j$ nicht eingeht und die Behauptung für ein geschickt gewähltes Vertretersystem nachrechnet. Wir führen dies an dieser Stelle nicht durch; ein Beweis findet sich beispielsweise in Abschnitt IV.6 von [Fre2]. □

Durch Einsetzen in Korollar 3.38 folgt sofort

Korollar 3.40. *Sei p eine Primzahl, und sei $t_1, \dots, t_h \in 2\Lambda_n^+$ ein Vertretersystem unter unimodularer Äquivalenz mit* $\det(t_\ell) = 1$ *für alle $\ell \in \{1, \dots, h\}$. Dann gilt*

$$\vartheta_{t_\ell} | T^{(n)}(p) = \sum_{\mu=1}^{h} c_{\ell\mu}(T^{(n)}(p)) \vartheta_{t_\mu} \quad \text{für alle } 1 \le \ell \le h$$

mit

$$c_{\ell\mu}(T^{(n)}(p)) = \sum_{j=\frac{n}{2}}^{n} p^{\frac{j(j+1-n)}{2}} \alpha(p,j,n) \, \frac{\nu_{t_\ell}(pt_\mu)}{\nu_{t_\mu}(t_\mu)}.$$

Wir können Korollar 3.40 anwenden, um auch allgemeiner eine Beschreibung des Bilds einer Thetareihe unter $T(p)$ zu bekommen.

Satz 3.41. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $8 \mid m$, und sei p eine Primzahl. Sei weiter $t_1, \dots, t_h \in 2\Lambda_m^+$ ein Vertretersystem unter unimodularer Äquivalenz mit* $\det(t_\ell) = 1$ *für alle $\ell \in \{1, \dots, h\}$. Dann ist für alle $\ell \in \{1, \dots, h\}$ die Thetareihe ϑ_{t_ℓ} eine Modulform in $M^n_{\frac{m}{2}}$, und es gilt*

$$\vartheta_{t_\ell} | T^{(n)}(p) = \beta(p,m,n) \cdot \sum_{\mu=1}^{h} \frac{\nu_{t_\ell}(pt_\mu)}{\nu_{t_\mu}(t_\mu)} \, \vartheta_{t_\mu}$$

mit

$$\beta(p,m,n) = p^{\frac{n(n+1)}{2} - \frac{mn}{2}} \cdot \begin{cases} \prod_{j=1}^{\frac{m}{2}-n} (1 + p^{j-1})^{-1} & \text{für } n \le \frac{m}{2}, \\ \prod_{j=1}^{n-\frac{m}{2}} (1 + p^{-j}) & \text{für } n \ge \frac{m}{2}. \end{cases}.$$

Beweis. Man kann die Behauptung des Satzes vermöge des in Proposition 3.23 gezeigten Vertauschungsgesetzes

$$\vartheta_{t_\ell}^{(n)} | T^{(n)}(p) | \Phi = (1 + p^{n-k}) \vartheta_{t_\ell}^{(n)} | \Phi | T^{(n-1)}(p)$$

zwischen $T(p)$ und Φ und der in Beispiel 2.23 gezeigten Verträglichkeit

$$\vartheta_{t_\ell}^{(n)} | \Phi = \vartheta_{t_\ell}^{(n-1)}$$

der Thetareihen mit dem Siegel'schen Φ–Operator auf den Spezialfall $n = m$ zurückführen.

In diesem Fall können wir Korollar 3.40 anwenden und erhalten

$$\vartheta_{t_\ell} | T^{(n)}(p) = \sum_{j=\frac{m}{2}}^{m} p^{\frac{j(j+1-m)}{2}} \alpha(p,j,m) \cdot \sum_{\mu=1}^{h} \frac{\nu_{t_\ell}(pt_\mu)}{\nu_{t_\mu}(t_\mu)} \vartheta_{t_\mu}.$$

Die Behauptung in diesem Fall folgt also aus der Gültigkeit der elementaren Identität

$$\sum_{j=\frac{m}{2}}^{m} p^{\frac{j(j+1-m)}{2}} \alpha(p,j,m) = p^{\frac{m}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{m}{2}} (1 + p^{-j}),$$

die wir in Übungsaufgabe 3.6 zeigen. □

3.5 Der Siegel'sche Hauptsatz

Unter Verwendung der arithmetischen Theorie der quadratischen Formen (siehe etwa [MH]) zeigt man

Satz 3.42. *Sei m eine natürliche Zahl, und seien t_1, t_2 zwei symmetrische gerade $(m \times m)$-Matrizen mit $\det(t_1) = \det(t_2) = 1$. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl q eine unimodulare Matrix $u = u(q) \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$ mit*

$$t_1[u] \equiv t_2 \bmod (q).$$

Sei ab sofort stets $m \in \mathbb{N}$ durch 8 teilbar. Sei weiter $t_1, \ldots, t_h \in 2\Lambda_m^+$ ein Vertretersystem unter unimodularer Äquivalenz mit $\det(t_\ell) = 1$ für alle $\ell \in \{1, \ldots, h\}$.

Lemma 3.43. *Für eine beliebige Primzahl p hängt der Ausdruck*

$$\lambda_\ell(p) := \sum_{\mu=1}^{h} \frac{\nu_{t_\ell}(pt_\mu)}{\nu_{t_\mu}(t_\mu)} \quad \textit{für alle } \ell \in \{1, \ldots, h\}$$

nicht von ℓ ab.

Beweis. Zu jedem $g \in \mathbb{Z}^{m \times m}$, für das $pt_\ell[g^{-1}]$ unimodular und gerade ist, gibt es ein $u \in U_m$ und ein $\mu \in \{1, \ldots, h\}$ mit

$$pt_\ell[g^{-1}] = t_\mu[u] \quad \text{bzw.} \quad t_\mu[ug] = pt_\ell.$$

Die Zahl $\lambda_\ell(p)$ stimmt also mit der Anzahl der Linksnebenklassen $U_m g$ überein, für die $pt_\ell[g^{-1}]$ unimodular und gerade ist. Nach Satz 3.42 können wir die Vertreter $t_1, \ldots, t_h$ so wählen, dass

$$t_1 \equiv \ldots \equiv t_h \bmod (2p^m)$$

gilt. So erhalten wir die Unabhängigkeit von ℓ. □

Lemma 3.44. *Für jeden Grad n ist der* ***gewichtete Mittelwert***

$$\sum_{\ell=1}^{h} m_\ell \vartheta_{t_\ell}^{(n)}(z) \quad \textit{mit } m_\ell = \frac{\nu_{t_\ell}(t_\ell)^{-1}}{\nu_{t_1}(t_1)^{-1} + \ldots + \nu_{t_h}(t_h)^{-1}}$$

eine simultane Eigenform aller Heckeoperatoren $T \in \mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_n)$.

Beweis. Aus der expliziten Formel in Satz 3.41 und mit Lemma 3.43 ergibt sich, dass der Mittelwert für alle Primzahlen p eine $T(p)$-Eigenform mit Eigenwert $\lambda_\ell(p)\beta(p, m, n)$ ist. Jede der Thetareihen ϑ_{t_ℓ} und somit auch der gewichtete Mittelwert hat konstanten Fourierkoeffizienten 1. Mit Proposition 3.27 folgt daher das Lemma. □

Die Aussage des Lemmas lässt sich noch verschärfen, da Proposition 3.27 den gewichteten Mittelwert aufgrund seiner Eigenschaften als Eisensteinreihe erkennt. Wir haben somit die folgende Variante des Siegel'schen Hauptsatzes bewiesen.

Satz 3.45 (Analytische Version des Siegel'schen Hauptsatzes)**.** *Für $\frac{m}{2} = k > n + 1$ gilt*

$$E_k^n(z) = \sum_{\ell=1}^{h} m_\ell \vartheta_{t_\ell}(z).$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1. *Zeigen Sie, dass* $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}))$ *ein Heckepaar ist, dass sich also jede* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$*-Doppelnebenklasse in* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ *als disjunkte Vereinigung endlich vieler* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$*-Linksnebenklassen schreiben lässt.*

Aufgabe 3.2. *Seien* $M, N \in \Delta_n$ *zwei Matrizen mit ganzen Einträgen und* $\mathrm{ggT}(\det(M), \det(N)) = 1$, *und sei* $A \in \Gamma_n$ *beliebig. Seien weiter für* $X \in \{M, N, MAN\}$ *die Elementarteiler mit*

$$a_{11}^{(X)}, \ldots, a_{nn}^{(X)}, d_{11}^{(X)}, \ldots, d_{nn}^{(X)}$$

bezeichnet. Zeigen Sie, dass dann

$$a_{jj}^{(M)} \cdot a_{jj}^{(N)} = a_{jj}^{(MAN)} \quad \textit{für alle } 1 \leq j \leq n$$

gilt.

Aufgabe 3.3. *Für* $r \in \mathbb{N}$ *und* $M \in \Gamma_{n-1}(r)$ *ist offensichtlich*

$$M^{\downarrow_r^1} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} {}_1{\times}_{n-1}\, M \right) \in \Gamma_n(r).$$

Zeigen Sie, dass ein Vertretersystem derjenigen Linksnebenklassen in $\Gamma_n M^{\downarrow_r^1} \Gamma_n$, *die ein Element der Form*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \textit{mit } a = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & * & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & a_{n-1,n-1} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \textit{ und } c = 0$$

enthalten, gegeben ist durch

$$\left\{ \left(\tilde{M}\, {}_{n-1}{\times}_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \right) \cdot T_S \mid \tilde{M} \in V_M,\ S = \begin{pmatrix} & & & v_1 \\ & 0 & & \vdots \\ & & & v_{n-1} \\ v_1 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{pmatrix} \textit{ mit } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in V_{a_{\tilde{M}}} \right\},$$

mit

- *einem Vertretersystem* V_M *der in* $\Gamma_{n-1} M \Gamma_{n-1}$ *enthaltenen Linksnebenklassen mit*

$$\det a_{\tilde{M}} > 0 \textit{ und } c_{\tilde{M}} = 0 \quad \textit{für alle } \tilde{M} \in V_M,$$

- *für jedes feste* $a_{\tilde{M}}$ *einem maximalen System von Vektoren* $V_{a_{\tilde{M}}}$, *so dass die Vektoren in der Menge*

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{\tilde{M}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \mid v \in V_{a_{\tilde{M}}} \right\}$$

modulo r paarweise voneinander verschieden sind.

Aufgabe 3.4. *Die Heckealgebra* $\check{\mathscr{H}}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[p^{-1}]))$ *wird erzeugt von den Doppelnebenklassen*

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} 1_{n-j} & 0 \\ 0 & p\,1_j \end{pmatrix} \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \quad \textit{mit } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Aufgabe 3.5. *Zeigen Sie*

$$\Gamma_n \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & p1_n \end{pmatrix} \Gamma_n = \sum_{d \in \mathscr{D}} \sum_{b} \Gamma_n \begin{pmatrix} p^t d^{-1} & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

wobei b für jedes feste $d \in \mathscr{D}$ *ein Vertretersystem in der Menge*

$$\{b \in \mathbb{Z}^{n \times n} \mid bd^{-1} \textit{ symmetrisch}\}$$

bezüglich der Äquivalenzrelation

$$b_1 \cong b_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad (b_1 - b_2)d^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$$

durchläuft.

Aufgabe 3.6. *Für eine beliebige Primzahl p und eine beliebige natürliche Zahl k gilt*

$$\sum_{j=k}^{2k} p^{\frac{j(j+1-2k)}{2}} \alpha(p, j, 2k) = p^k \cdot \prod_{j=1}^{k} (1 + p^{-j}).$$

Literaturverzeichnis

[Fre1] E. Freitag. *Stabile Modulformen*. Math. Ann. **230** (1977), Seiten 197-211.

[Fre2] E. Freitag. *Siegelsche Modulfunktionen*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Nr. **254**. Springer, 1983.

[Fre3] E. Freitag. *Funktionentheorie 2*. Springer, 2010.

[Kli1] H. Klingen. *Zum Darstellungssatz für Siegelsche Modulformen*. Math. Zeitschr. **102** (1967), Seiten 30-43.

[Kli2] H. Klingen. *Berichtigung zu: Zum Darstellungssatz für Siegelsche Modulformen*. Math. Zeitschr. **105** (1968), Seiten 399-400.

[Kli3] H. Klingen. *Introductory lectures on Siegel modular forms*. Cambridge studies in advanced mathematics, Nr. **20**. Cambridge University Press, 1990.

[Maa] H. Maaß. *Über die Darstellung der Modulformen n-ten Grades durch Poincarésche Reihen*. Math. Ann. **123** (1951), Seiten 125-151.

[MH] J. Milnor, D. Husemoller. *Symmetric bilinear forms*. Springer, 1973.

[Shi] G. Shimura. *On modular correspondences for* $\mathrm{Sp}(N, \mathbb{Z})$ *and their congruence relations*. Proc. Nat. Ac. Sci. **49** (1963), Seiten 824-828.

[Wei] R. Weissauer. *Stabile Modulformen und Eisensteinreihen*. LNM, Nr. **1219**. Springer, 1986.