AOR Dr. Hendrik Kasten
Mathematisches Institut

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Seminarprogramm Wintersemester 2022/23

Modulformen

Voraussetzungen: Funktionentheorie 1.
Vorbesprechung: am 28. 7. 2022 um 13:00-14:00 Uhr in Seminarraum 3 im Mathematikon INF 205.

Vorträge

Vortrag 1: Möbius-Transformationen (20. 10. 2022)

Quelle: [Kas], Abschnitte 1.1-1.3

Die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ operiert via sogenannter Möbius-Transformationen auf der Riemann'schen Zahlenkugel. Durch Einschränken erhält man eine Aktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$, die wir in diesem Vortrag genauer untersuchen wollen. *Der Vortrag ist sehr großzügig zugeschnitten; auf einige Inhalte kann aber auch verzichtet werden. Bitte sprechen Sie sich für den genauen Zuschnitt mit mir ab.*

Vortrag 2: Die volle Modulgruppe (27. 10. 2022)

Quelle: [Kas], Abschnitt 1.4

In diesem Vortrag betrachten wir die Einschränkung der im ersten Vortrag eingeführten Aktion auf die volle Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und untersuchen Fixpunkte sowie einen Fundamentalbereich für diese Aktion.

Vortrag 3: Fourier-Entwicklungen (3. 11. 2022)

Quelle: [Kas], Abschnitt 2.1

Holomorphe Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene mit einer reellen Periode lassen eine Fourier-Entwicklung zu. Letztere lässt sich erreichen, indem man den Horizontalstreifen via $z \mapsto e^{2\pi i z}$ auf die in Null punktierte offene Einheitskreisscheibe abbildet. Ist die so erhaltene Singularität in Null hebbar, nennt man die Funktion holomorph in unendlich.

Vortrag 4: Der Begriff der Modulform (10. 11. 2022)

Quelle: [Kas], Abschnitt 2.2

Holomorphe Modulformen bzgl. der vollen Modulgruppe sind holomorphe Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene, die sich bezüglich der in den ersten beiden Vorträgen untersuchten Aktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf besondere Weise verhalten und holomorph in unendlich sind. Dieser Begriff lässt sich mit etwas Sorgfalt verallgemeinern und wir erhalten meromorphe Modulformen bezüglich beliebiger Kongruenzuntergruppen der vollen Modulgruppe.

Vortrag 5: Eisenstein-Reihen (17. 11. 2022)

Quelle: [Kas], Abschnitt 3.1

Mit den Eisenstein-Reihen führen wir eine erste Klasse von Beispielen für Modulformen ein.

Vortrag 6: Valenz- und Dimensionsformel (24. 11. 2022)

Quelle: [Kas], Abschnitt 2.3 und 3.2

Als eine Anwendung des Argumentprinzips auf eine meromorphe Modulform bezüglich der vollen Modulgruppe und den Standardfundamentalbereich derselben erhalten wir die Valenzformel. Mithilfe der im letzten Vortrag eingeführten Eisenstein-Reihen lässt sich aus dieser die Dimensionsformel bestimmen, die für ein einheitliches Verhalten unter der vollen Modulgruppe die (endliche) Dimension des Vektorraums der zugehörigen Modulformen angibt. *Die Valenzformel soll hierbei nur für die volle Modulgruppe gezeigt werden und der Struktursatz in Abschnitt 3.2 nur als Endergebnis berichtet.*

Vortrag 7: Dirichlet-Reihen und Mellin-Transformation (1. 12. 2022)

Quelle: [Zag], Abschnitt 1 und [Lan], Abschnitte I.4-I.5

Eine (gewöhnliche) Dirichlet-Reihe ist eine Reihe der Form

$$\sum_n a_n n^{-s},$$

wobei s eine komplexe Variable ist. Wir untersuchen kurz ganz allgemein das Konvergenzverhalten von Dirichlet-Reihen, um dann speziell zu einer Modulform f von Gewicht k eine solche einzuführen. Diese konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1$ und lässt sich bis auf gut zu kontrollierende Faktoren durch die sogenannte Mellin-Transformation aus f gewinnen.

Vortrag 8: Hecke-Operatoren (8. 12. 2022)

Quelle: [Lan], Abschnitt II.1, und [Spe], Abschnitt 4.2. Es lohnt auch ein Blick in [KK], Abschnitt IV.1

Zu jeder ganzen Zahl n definieren wir auf der freien abelschen Gruppe $\mathscr{L}$ der Gitter in $\mathbb{C}$ den n-ten Hecke-Operator $T(n)$ durch die Zuordnung

$$T(n)(L) := \sum_{[L:L']=n} L' \quad \text{für alle } L \in \mathscr{L}.$$

Wir studieren diese und ähnliche Operatoren und übersetzen sie in Operatoren auf dem Raum der Modulformen festen Gewichts.

Vortrag 9: Euler-Produkte und L-Reihen **(15. 12. 2022)**

Quelle: [Lan], Abschnitt II.2

Wir untersuchen bestimmte Rechenregeln, was uns darauf führt, dass die Fourier-Koeffizienten einer Modulform, die simultane Eigenform zu allen Hecke-Operatoren ist, nach geeigneter Normierung gerade die Hecke-Eigenwerte sind. Wir schließen daraus, dass die Dirichlet-Reihe der Modulform eine Euler-Produktdarstellung besitzt.

Vortrag 10: Das Petersson'sche Skalarprodukt **(12. 1. 2023)**

Quelle: [KK], Abschnitte IV.3.1-IV.3.6

Als ein Integral über einen Fundamentalbereich mit dem dort definierten invarianten Volumenelement führen wir das Petersson-Skalarprodukt auf dem Raum der Spitzenformen festen Gewichts ein. Wir zeigen, dass der Wert des Skalarprodukts nicht von der Wahl des Fundamentalbereichs abhängt und sich wohlverhält, wenn man zu Untergruppen übergeht. Außerdem sind die Hecke-Operatoren selbstadjungiert unter dem Petersson-Skalarprodukt, was uns abschließend ermöglicht, eine besondere Basis für den Raum der Spitzenformen festen Gewichts anzugeben.

Vortrag 11: Modulformen höherer Stufe I **(19. 1. 2023)**

Quelle: [Lan], Abschnitte VII.1-VII.2

Modulformen und Hecke-Operatoren können nicht nur bezüglich der vollen Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eingeführt werden, sondern auch zu beliebigen Kongruenzuntergruppen. Um dies für die Gruppe $\Gamma_1(N)$ mit einem $N \in \mathbb{N}$ zu tun, müssen wir anstelle von Gittern Paare (t, L) betrachten, wobei L wie gewohnt ein Gitter und t einen Punkt auf dem Quotienten $\mathbb{C}/L$ von genauer Ordnung N bezeichne.

Vortrag 12: Modulformen höherer Stufe II **(26. 1. 2023)**

Quelle: [Lan], Abschnitte VII.3-VII.5

In diesem Vortrag studieren wir zunächst die Wirkung von Hecke-Operatoren auf der q-Entwicklung von Modulformen. Hierfür führen wir für alle $d \in \mathbb{N}_{>0}$ die nützlichen Hilfsoperatoren U_d und V_d ein. Das führt dazu, dass wir auch die Aktion von Hecke-Operatoren auf Modulformen höherer Stufe in Form einer Spur ausdrücken können, wobei wir über ein geeignetes Vertretersystem von Matrizen aufsummieren. Wir schließen damit, dass wir das Petersson-Skalarprodukt auch in dieser Situation untersuchen.

Vortrag 13: Stufenwechsel (2. 2. 2023)

Quelle: [Lan], Abschnitte VII.6 und VIII.1, eine Ausarbeitung hierzu findet sich in [Schm]

In diesem und den folgenden beiden Vorträgen wollen wir nun die Theorie von Atkin und Lehner studieren, die uns eine Zerlegung des Raums der Spitzenformen $S_k(N, \chi)$ in so genannte Alt- bzw. Neuformen liefert. Altformen sind hierbei Spitzenformen, die sich aus Formen einer Stufe $d \mid N$ gewinnen lassen, die Neuformen sind solche, die im Petersson-Orthokomplement dazu liegen. Wir führen nun zunächst in dieser Theorie ein und studieren die dafür benötigte Fricke-Involution

Vorträge 14 + 15: Der Struktursatz (9. 2. + 16. 2. 2023)

Quelle: [Lan], Abschnitte VIII.2-VIII.4, eine Ausarbeitung hierzu findet sich in [Schm]

Den ersten großen Höhepunkt unseres Seminars bildet schließlich der Struktursatz, auch Multiplizität-1-Satz genannt, der eine orthogonale Zerlegung des Raums der Spitzenformen in Hecke-Eigenräume liefert. Die Eigenräume, die zu den Neuformen gehören, kommen dabei mit Multiplizität 1 vor, was den Namen des Satzes erklärt. *Den größten Teil dieses Themas nimmt der recht lange Beweis eines technischen Hilfssatzes ein (vgl. Abschnitt VIII.4), so dass mir eine befriedigende Aufteilung dieses Themas in zwei Vorträge schwer erschien. Ich schlage daher vor, dass sich zwei Vortragende die Aufgabe teilen.*

Literatur

[Kas] H. Kasten. *Modulformen 1 (Vorlesungsskriptum 2021).*

[KK] M. Koecher, A. Krieg. *Elliptische Funktionen und Modulformen*. Springer, 1998.

[Lan] S. Lang. *Introduction to Modular Forms*. Springer, 1976.

[Schm] C.-G. Schmidt. *Modulfunktionen (Vorlesungsskriptum 2000).*

[Spe] J. Speller. *Vorzeichenwechsel der Fourier-Koeffizienten von Hecke-Eigenformen (Bachelorarbeit 2016).*

[Zag] D. Zagier. *Zetafunktionen und quadratische Körper*. Springer, 1981.