AOR Dr. Hendrik Kasten
Mathematisches Institut

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Seminarprogramm Wintersemester 2021/22

Riemann'sche Flächen

Voraussetzungen: Funktionentheorie 1. Die benötigten Begriffe aus Topologie und Algebra werden, soweit nicht aus den Grundvorlesungen bekannt, im Laufe des Seminars eingeführt.

Vorbesprechung: am 22. 7. 2021 um 14:15-15:00 Uhr im Innenhof des Mathematikon.

Vorträge

Vortrag 1: Grundbegriffe (21. 10. 2021)

Quelle: Abschnitt 1 in [For], für Vergleiche auch [Kas]

Wie der Name schon sagt, sollen in diesem Vortrag die grundlegenden Definitionen für dieses Seminar gegeben werden: komplexe Mannigfaltigkeiten, Riemann'sche Flächen und holomorphe Abbildungen darauf. Wir führen überdies die Standardbeispiele Riemann'scher Flächen ein und verallgemeinern mit dem Hebbarkeitssatz und dem Identitätssatz zwei Resultate der klassischen Funktionentheorie auf Riemann'sche Flächen. Im Anschluss an die holomorphen Funktionen führen wir nun auch noch den Begriff der meromorphen Funktionen ein und identifizieren letztere mit holomorphen Abbildungen mit Werten in der Riemann'schen Zahlenkugel – hier weicht die Nomenklatur in [For] von der in meinem Skript ab! *In diesem Vortrag soll auch kurz die vermutlich aus der Analysis bekannte Definition der Mannigfaltigkeit wiederholt werden.*

Vortrag 2: Topologie holomorpher Abbildungen (28. 10. 2021)

Quelle: Abschnitt 2 in [For] und Abschnitt V.1 [FB], für Vergleiche auch [Kas]

Schließlich studieren wir noch die topologischen Eigenschaften holomorpher Abbildungen zwischen Riemann'schen Flächen genauer und leiten daraus Verallgemeinerungen bekannter Sätze wie des Satzes von Liouville oder des Fundamentalsatzes der Algebra her. Den Abschluss des Vortrags bildet eine Anwendung des Satzes von Liouville auf doppeltperiodische Funktionen, dem ersten Liouville'schen Satz. Wenn noch Zeit ist, kann dieses Thema wie in [FB] noch weiter vorangetrieben werden.

Vortrag 3: Homotopie von Kurven (4. 11. 2021)

Quelle: Abschnitt 3 in [For]

Wir führen in Verallgemeinerung der Funktionentheorie Kurven als stetige Abbildungen von einem reellen Intervall in einen topologischen Raum ein. Grundlegend ist hier der Begriff der Homotopie, also der stetigen Verformung von Kurven, welcher eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kurven in einem gegebenen topologischen Raum X darstellt. Dies führt für geschlossene Kurven zur Definition der Homotopiegruppe $\pi_1(X, a)$, einer Gruppenstruktur auf der Menge der Homotopieklassen geschlossener Kurven mit Anfangspunkt $a \in X$. Es stellt sich heraus, dass diese Gruppen für alle Basispunkte $a \in X$ isomorph sind, so dass wir schlicht $\pi_1(X)$ schreiben und sie als topologische Invariante des Raums X auffassen können. $\pi_1(X)$ heißt auch die Fundamentalgruppe von X. *Dieser Vortrag profitiert besonders von ein paar erläuternden Zeichnungen.*

Vortrag 4: Überlagerungen (11. 11. 2021)

Quelle: Abschnitt 4 in [For]

In der Funktionentheorie begegnet einem das Problem, dass man für manche Funktionen wie etwa die Exponentialfunktion $\exp(z)$ oder die Potenzfunktionen z^n mit $n > 1$ keine eindeutige Umkehrfunktion angeben kann. Stattdessen sind der Logarithmus und die Wurzelfunktionen mehrdeutig; sie besitzen mehrere Zweige. Dieses Verhalten lässt sich im Kontext Riemann'scher Flächen durch verzweigte Überlagerungen beschreiben. Hierfür führen wir zunächst Überlagerungsabbildungen ein und zeigen, dass nichtkonstante holomorphe Abbildungen solche sind. Wir definieren den Begriff des Verzweigungspunkts und nennen in Abhängigkeit von der Existenz eines solchen eine Überlagerung verzweigt oder unverzweigt. Diese Fälle werden dann einzeln studiert. Wichtig sind hierbei insbesondere die Beispiele 4.5 und 4.12, die an das bereits aus der Funktionentheorie bekannte anknüpfen. *Dieser Vortrag ist recht großzügig zugeschnitten, so dass sicherlich nicht der gesamte Inhalt vorgeführt werden kann. Andererseits sind einige der vorkommenden Beweise untereinander sehr ähnlich (wie etwa die von 4.6 bis 4.9 und die von 4.14, 4.15, 4.17 und 4.19), so dass man sich an diesen Stellen auf jeweils einen Beweis beschränken kann.*

Vortrag 5: Universelle Überlagerungen (18. 11. 2021)

Quelle: Abschnitt 5 in [For]

In diesem Vortrag werden die topologischen Betrachtungen der letzten beiden Vorträge zusammengeführt. Es stellt sich nämlich heraus, dass es unter allen unverzweigten unbegrenzten Überlagerungen einer Mannigfaltigkeit X eine „größte“ solche gibt, die so genannte universelle Überlagerung. Deren Struktur hängt über die Gruppe der so genannten Decktransformationen eng mit der Fundamentalgruppe von X zusammen. *Dieser Vortrag enthält mit 5.3 und 5.6 zwei Sätze mit großen Beweisen, die sehr sorgfältig präsentiert werden müssen. Das bedingt allerdings, dass an anderer Stelle gespart werden muss. Ich bitte den Vortragenden, sich diesbezüglich mit mir in Verbindung zu setzen.*

Vortrag 6: Garben **(25. 11. 2021)**

Quelle: Abschnitte 6 und 7 in [For]

In der Funktionentheorie hat man es häufig mit Funktionen in wechselnden Definitionsbereichen zu tun. Der Begriff der Garbe gibt einen geeigneten formalen Rahmen zur Behandlung dieser Situation. Zunächst werden Prägarben definiert, indem dem System der offenen Mengen eines topologischen Raums eine Familie abelscher Gruppen zugeordnet wird, wobei wir fordern, dass es zwischen Gruppen, die zu ineinander enthaltenen Umgebungen gehören, Gruppenhomomorphismen mit bestimmten Kompatibilitätsforderungen bestehen. Erfüllt eine Prägarbe noch zwei zusätzliche Axiome, so nennt man sie eine Garbe. Das landwirtschaftliche Vokabular wird abgerundet durch die Konzepte des Schnitts, des Halms und des Keims. Als eine erste wichtige Anwendung der neuen Begriffe studieren wir analytische Fortsetzungen von Funktionskeimen. *In diesem Vortrag ist vor allem der Inhalt von Abschnitt 6 von Bedeutung für spätere Vorträge. Wenn also Inhalte gekürzt werden sollen, so muss dies (in Absprache mit mir!) in Abschnitt 7 geschehen. Dieser Vortrag ist eine technische Voraussetzung für alle folgenden Vorträge.*

Vortrag 7: Algebraische Funktionen **(2. 12. 2021)**

Quelle: Abschnitt 8 in [For]

Algebraische Funktionen sind Funktionen $w = w(z)$, die einer algebraischen Gleichung $w^n + a_1(z)w^{n-1} + \ldots + a_0(z) = 0$ mit meromorphen Funktionen $a_\nu(z)$ genügen. Ein einfaches Beispiel hierfür sind die Wurzelfunktionen. Ziel dieses Vortrags ist es, die zu den algebraischen Funktionen gehörigen Riemann'schen Flächen als eigentliche Überlagerungen zu konstruieren, deren Blätterzahl gerade gleich dem Grad n der zugehörigen algebraischen Gleichung ist.

Vortrag 8: Differentialformen **(9. 12. 2021)**

Quelle: Abschnitt 9 in [For]

In diesem Vortrag führen wir den sehr wichtigen Begriff der Differentialform auf einer Riemann'schen Fläche ein. Dabei betrachten wir nicht nur holomorphe und meromorphe Differentialformen sondern auch solche, die nur reell differenzierbar sind. Stichwörter hierbei sind das Wirtinger-Kalkül, das Differential einer Funktion, Differentialformen 1. Ordnung, das Residuum einer solchen, das äußere Produkt und schließlich Differentialformen höherer Ordnung. *Die in diesem Vortrag eingeführten Begriffe und Notationen sind wesentlich für alle folgenden Vorträge.*

Vortrag 9: Integration von Differentialformen 1 **(16. 12. 2021)**

Quelle: Abschnitt 10.A in [For]

Differentialformen 1. Ordnung kann man über Kurven integrieren. Ist die Differentialform geschlossen, so hängt das Integral nur von der Homotopieklasse der

Kurve ab; das ist eine Verallgemeinerung des Cauchy'schen Integralsatzes. Wir treiben dieses Spiel weiter und untersuchen die Existenz von Stammfunktionen auf Riemann'schen Flächen. Der Vortrag endet mit der Untersuchung von so genannten Perioden von Differentialformen.

Vortrag 10: Integration von Differentialformen 2 (13. 1. 2022)

Quelle: Abschnitt 10.B und Anhang A in [For]

In Fortsetzung des letzten Vortrags interessieren wir uns nun für die Integration von Differentialformen 2. Ordnung. Der Höhepunkt des Vortrags ist der Residuensatz für Riemann'sche Flächen. Wichtige Hilfsmittel hierbei sind der Satz von Stokes und Partitionen der Eins. Ersterer ist natürlich schon bekannt, letztere werden wir zu diesem Zweck einführen. *Es kann nicht schaden, den Vortrag mit einem kleinen Erinnerungsteil an den Stoff von vor Weihnachten zu beginnen.*

Vortrag 11: Garbenkohomologie (20. 1. 2022)

Quelle: Abschnitt 12 in [For] und Abschnitt IV.2 in [Neu]

Unter den Riemann'schen Flächen bilden die kompakten eine besonders wichtige Unterklasse, die wir beginnend mit diesem Vortrag näher untersuchen wollen. Ein wichtiges Hilfsmittel zum Beweis der meisten großen Sätze in der zugehörigen Theorie ist die Kohomologietheorie von Garben, die wir nun einführen wollen: Die erste Kohomologiegruppe einer Garbe $\mathscr{F}$ wird zunächst in Abhängigkeit einer Überdeckung der Riemann'schen Fläche X eingeführt; durch die Betrachtung von Verfeinerungen und induktive Grenzwertbildung (*um dieses Konzept ordentlich einzuführen, lohnt ein Blick in [Neu]*) gelangen wir zu einer Definition von $H^1(X, \mathscr{F})$. Als nächstes zeigen wir für einige Beispiele von Garben, dass die erste Homologiegruppe verschwindet, wie etwa für die Garbe der differenzierbaren Funktionen auf X. Mit dem Satz von Leray beweisen wir schließlich ein Hilfsmittel, das sich in vielen Fällen bei der Berechnung von Kohomologiegruppen als nützlich erweisen wird.

Vortrag 12: Das Geschlecht (27. 1. 2022)

Quelle: 13.1 bis einschließlich 14.13 in [For]

In diesem Vortrag zeigen wir, dass für eine kompakte Riemann'sche Fläche X die Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{O})$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. Die Dimension dieses Vektorraums heißt das Geschlecht von X. Eine Folgerung des Endlichkeitssatzes ist außerdem, dass es auf einer kompakten Riemann'schen Fläche stets nicht-konstante meromorphe Funktionen gibt. *Der Vortrag beginnt mit zwei vorgelagerten Themenkomplexen, die jeweils nur skizzenhaft präsentiert werden sollen, nämlich dem Lemma von Dolbeault mit seinen Folgerungen (13.1 bis 13.5) und etwas Funktionalanalysis (14.1 bis 14.7). Das Hauptthema ist dann der Endlichkeitssatz 14.10 mit seinen Korollaren.*

Vortrag 13: Die exakte Kohomologiesequenz **(3. 2. 2022)**

Quelle: Abschnitt 15 in [For]

In diesem Vortrag erklären wir den Begriff des Garbenhomomorphismus', exakte Garbensequenzen und die aus einer kurzen exakten Garbensequenz hervorgehende exakte Kohomologiesequenz, die uns ein Hilfsmittel an die Hand gibt, Kohomologiegruppen zu berechnen oder auf andere Gruppen zurückzuführen.

Vortrag 14: Der Satz von Riemann-Roch **(10. 2. 2022)**

Quelle: Abschnitt 16 in [For]

Der Satz von Riemann-Roch ist der zentrale Satz in der Theorie der kompakten Riemann'schen Flächen. Grob gesprochen macht er eine Aussage über die Anzahl linear unabhängiger meromorpher Funktionen, deren Polstellenverhalten gewissen Einschränkungen unterworfen ist.

Literatur

[FB] E. Freitag, R. Busam. *Funktionentheorie*. Springer, 1993.

[For] O. Forster. *Riemannsche Flächen*. Springer, 1977.

[Kas] H. Kasten. *Funktionentheorie 2 (Vorlesungsskriptum 2016)*.

[Neu] J. Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie*. Springer, 1992.