Seminarprogramm Wintersemester 2015/16
Werteverteilungen

Voraussetzungen

Funktionentheorie 1

Vorbesprechung

Die Vorbesprechung findet am 20. 7. 2015 um 13 Uhr c.t. in Hörsaal 3 im Mathematischen Institut INF 288 statt.

Vorträge

Vortrag 1: Der Satz von Bloch **(13. 10. 2015)**

Quelle: Abschnitt 9.1 in [Kas]

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, das den Abschluss der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ enthält, und sei

$$\mathscr{F}_{\mathbb{E}} := \{f : D \to \mathbb{C} \text{ holomorph} \mid f(0) = 0 \text{ und } f'(0) = 1\}.$$

Wegen $f'(0) = 1 \neq 0$ ist für jedes $f \in \mathscr{F}_{\mathbb{E}}$ das Bild $f(\mathbb{E})$ eine offene Menge und enthält so eine offene Kreisscheibe von positivem Radius r. Der Satz von Bloch besagt unter anderem, dass $r = \frac{1}{72}$ eine Unterschranke für den größtmöglichen Radius einer solchen Kreisscheibe ist.

Vorträge 2 + 3: Die Sätze von Picard und Schottky **(20. 10. + 27. 10. 2015)**

Quelle: Abschnitte 9.2, 9.3 und 9.4 in [Kas]

Der kleine Satz von Picard ist eine Verschärfung des Satzes von Liouville und besagt, dass jede ganze Funktion, deren Bild zwei komplexe Zahlen nicht enthält, bereits konstant ist. Mit ganz ähnlichen Methoden lässt sich auch der Satz von Schottky beweisen, der eine Beschränktheitsaussage für bestimmte holomorphe Funktionen liefert. Diese und den Satz von Montel nutzen wir, um den Satz von Montel-Carathéodory zu zeigen, der wiederum die wichtigste Zutat für den Beweis des großen Satzes von

Picard darstellt. Dieser ist eine Verschärfung des Satzes von Casorati-Weierstraß und besagt, dass eine holomorphe Funktion in jeder noch so kleinen punktierten Umgebung einer wesentlichen Singularität mit einer möglichen Ausnahme jede komplexe Zahl als Wert annimmt.

Vortrag 4: Schlichte Funktionen **(3. 11. 2015)**

Quelle: Abschnitte 15.1.1, 15.1.2 , 15.1.3, Satz 15.9 in Abschnitt 15.1.4 und Abschnitt 15.1.6 in [RS]

Eine schlichte Funktion ist eine injektive holomorphe Funktion. Ein zentrales Beispiel einer schlichten Funktion auf der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ ist die Koebe-Funktion

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n,$$

die offenbar $k(0) = 0$ und $k'(0) = 1$ erfüllt. Die Menge der schlichten Funktionen auf $\mathbb{E}$, die diese Eigenschaft erfüllen, nennen wir S. Wir studieren nun Quadratwurzeltransformierte und zeigen den Flächensatz von Gronwall über schlichte Funktionen auf $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{E}}$. Daraus leiten wir den Satz von Bieberbach über schlichte Funktionen auf der Einheitskreisscheibe her, um mit diesem das $\frac{1}{4}$-Theorem zu zeigen, das in Analogie zum Satz von Bloch aus Vortrag 1 besagt, dass im Bild jeder schlichten Funktion $f \in S$ die offene Kreisscheibe $U_{1/4}(0)$ enthalten ist. Den Abschluss dieses Vortrags bildet der Koebe'sche Verzerrungssatz, der Abschätzungen für die Beträge bestimmter schlichter Funktionen und ihrer Ableitungen liefert. *Bei Zeitknappheit kann Satz 15.16 weggelassen werden.*

Vortrag 5: Die Bieberbach-Vermutung **(10. 11. 2015)**

Quelle: Abschnitt 15.1.4 ohne Satz 15.9, Abschnitt 15.1.5 und Abschnitt 15.4 in [RS]

Der Satz von Bieberbach aus Vortrag 4 gab Bieberbach 1916 Anlass zur Bieberbach-Vermutung, die besagt, dass für

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad \in S$$

und alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $|a_n| \leq n$ gilt (der Satz von Bieberbach ist hier der Spezialfall $n = 2$). Diese Vermutung wurde zunächst 1936 von Robertson und dann 1971 von Milin verallgemeinert. Da der Beweis der Milin-Vermutung recht lang und technisch ist, zeigen wir hier nur, dass aus der Milin-Vermutung die Robertson-Vermutung und aus dieser die Bieberbach-Vermutung folgt, und sprechen noch ein wenig über die Historie des Problems.

Vortrag 6: Harmonische Funktionen **(17. 11. 2015)**

Quelle: Abschnitte 7.1 und 7.2 in [GK], zzgl. Aufgaben 1 und 16

Wir führen harmonische Funktionen ein, untersuchen den Zusammenhang zwischen diesen und holomorphen Funktionen und beweisen mit dem Maximumprinzip und dem Satz von Liouville zwei für holomorphe Funktionen bekannte Sätze auch für harmonische Funktionen. In Entsprechung zur Cauchy'schen Integralformel für holomorphe Funktionen beweisen wir schließlich die Mittelwertseigenschaft für harmonische Funktionen.

Vortrag 7: Die Poisson'sche Integralformel **(24. 11. 2015)**

Quelle: Abschnitt 7.3 in [GK]

Die Poisson'sche Integralformel beschreibt die Funktionswerte einer harmonischen Funktion im Inneren einer Kreisscheibe durch ihre Werte auf dem Rand. Auf diese Weise ist die Poisson'sche Integralformel eine Entsprechung für die Cauchy'sche Integralformel für holomorphe Funktionen. Es ist nun zu bemerken, dass es im Fall einer beliebigen auf dem Rand der Einheitskreisscheibe stetigen Funktion f keinen engen Zusammenhang zwischen f selbst und

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(w)}{w-z}\, \mathrm{d}w \quad \text{für } z \in U_1(0)$$

gibt. Im Fall der durch die Poisson'sche Integralformel erzeugten harmonischen Funktion

$$u(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2}\, \mathrm{d}t \quad \text{für } z \in U_1(0)$$

ist dies anders; sie lässt sich durch f selbst stetig auf den Rand $\partial U_1(0)$ fortsetzen. Der zugehörige Satz heißt auch die Lösung des Dirichletproblems für die Einheitskreisscheibe.

Vortrag 8: Das Schwarz'sche Spiegelungsprinzip **(1. 12. 2015)**

Quelle: Abschnitte 7.4 und 7.5 in [GK]

In Umkehrung des Satzes aus Vortrag 6 zeigen wir, dass eine stetige Funktion, die die Mittelwertseigenschaft erfüllt, stets harmonisch ist. Dies benutzen wir, um mit dem Schwarz'schen Spiegelungsprinzip eine verblüffende

Anwendung der Theorie der harmonischen Funktionen auf holomorphe Funktionen herzuleiten: Für eine beliebige holomorphe Funktion

$$f : U \to \mathbb{C} \quad \text{mit } U := D \cap \mathbb{H} \text{ für ein Gebiet } D \subseteq \mathbb{C} \text{ mit } D \cap \mathbb{R} = (a,b) \\ \text{und } \lim_{U \ni z \to x} \operatorname{Im}(f(z)) = 0 \text{ für alle } x \in (a,b)$$

gibt es stets eine holomorphe Fortsetzung auf $U \cup (a,b) \cup \overline{U}$.

Vortrag 9: Das Harnack'sche Prinzip **(8. 12. 2015)**

Quelle: Abschnitte 7.6 und 7.7 (bis Seite 228 Mitte) in [GK]

Das Harnack'sche Prinzip besagt, dass eine Folge $u_1 \le u_2 \le \dots$ harmonischer Funktionen auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ schon dann gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion $u : D \to \mathbb{R}$ konvergiert, wenn es ein $z \in D$ gibt, für das die Menge $\{u_n(z) \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist. Wir liefern zwei sehr verschiedene Beweise für diese Tatsache und beschließen den Vortrag, indem wir in Verallgemeinerung von Vortrag 7 das allgemeine Dirichletproblem vorstellen, das wir in den Vorträgen 10 und 11 studieren werden.

Vortrag 10: Subharmonische Funktionen **(15. 12. 2015)**

Quelle: Der Rest von Abschnitt 7.7 in [GK]

Analog zu den harmonischen Funktionen studieren wir nun auch so genannte subharmonische Funktionen, deren Eigenschaften uns in Vortrag 11 dabei helfen werden, in einer großen Klasse von Gebieten Lösungen des Dirichletproblems zu finden.

Vortrag 11: Die Perrònmethode **(22. 12. 2015)**

Quelle: Abschnitte 7.8 und 7.9 in [GK]

Wir lösen das Dirichletproblem für Gebiete, die eine Barriere besitzen und benutzen dabei die Methoden aus Vortrag 10. Wenn noch Zeit ist, können wir daraus noch die konformäquivalente Klassifizierung der Ringgebiete in $\mathbb{C}$ folgern.

Vortrag 12: Die Poisson-Jensen-Formel **(12. 1. 2016)**

Quelle: Abschnitt X.5 bis inklusive Theorem 5.2 in [Con] und Abschnitt VI.1 in [Nev]

Wir führen den Begriff der Green'schen Funktion eines Gebietes $D \subseteq \mathbb{C}$

in einer Singularität $z_0 \in D$ ein und zeigen deren Eindeutigkeit. Anhand des Beispiels $D = \mathbb{C}$ sehen wir ein, dass andererseits die Existenz einer Green'schen Funktion nicht allgemein gegeben ist. In beschränkten Gebieten, in denen das Dirichletproblem eine Lösung hat (vgl. Vortrag 11), gibt es jedoch stets eine Green'sche Funktion. Diese verwenden wir nun, um im Spezialfall $D = U_r(0)$ mit der Poisson-Jensen-Formel ein Korollar aus der Poisson'schen Integralformel aus Vortrag 7 zu ziehen. *Der Alternativbeweis für Formel (2‴) in [Nev] kann entfallen.*

Vortrag 13: Die Nevanlinna-Charakeristik (19. 1. 2016)

Quelle: Abschnitt VI.2 in [Nev]

Sei $a \in \overline{\mathbb{C}}$ und f eine meromorphe Funktion auf der Kreisscheibe $U_r(0)$. Die Nevanlinna-Charakteristik beschreibt in Summe, wie oft mit Vielfachheiten f in $U_r(0)$ den Wert a annimmt und wie „nahe“ f auf dem Rand von $U_r(0)$ dem Wert a kommt. Letzteres messen wir mit einer eigens eingeführten Schmiegungsfunktion. Der erste Hauptsatz der Nevanlinna-Theorie besagt, dass sich die die Nevanlinna-Charakteristika für verschiedene Werte von a nur um für $r \leq R$ beschränkte Summanden unterscheiden. Wir zeigen den Hauptsatz und betrachten Beispiele dazu. *Der Beweis des Hauptsatzes in [Nev] weist einige Lücken auf, die für den Vortrag geschlossen werden sollen. Ich bitte um frühzeitige Absprache dazu.*

Vortrag 14: Die geometrische Interpretation der Nevanlinna-Charakteristik (26. 1. 2016)

Quelle: Abschnitt VI.3 in [Nev]

Die in Vortrag 13 eingeführte Nevanlinna-Charakteristik lässt sich vermöge spärischer Geometrie auf der Riemann'schen Zahlenkugel auch geometrisch deuten, wie 1929 unabhängig voneinander Shimizu und Ahlfors zeigten. Wir leisten diese Übersetzungsarbeit und formulieren den ersten Hauptsatz neu. Direkt daraus können wir ablesen, dass die Nevanlinna-Charakteristik eine wachsende Funktion in r und eine konvexe Funktion in $\log r$ ist.

Literatur

[Con] J. Conway. *Functions of One Complex Variable*. GTM, Nr. **11**. Springer, 1973.

[GK] R. Greene, S. Krantz. *Function Theory of One Complex Variable (3rd Edition)*. Graduate Studies in Mathematics, Nr. **40**. AMS, 2006.

[Kas] H. Kasten. *Funktionentheorie 1 (Vorlesungsskriptum 2014)*.

[Nev] R. Nevanlinna. *Eindeutige analytische Funktionen (2. Auflage)*. Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Nr. **46**. Springer, 1953.

[RS] R. Remmert, G. Schumacher. *Funktionentheorie 2 (3. Auflage)*. Springer, 2007.