

# Seminarprogramm Wintersemester 2015 / 16

## Konstruktive Algebraische Geometrie

**Voraussetzungen:** Dieses Seminar richtet sich insbesondere an **Lehr-  
amtsstudenten**.

**Vorbesprechung:** Am 24. 7. 2015 um 13 Uhr c.t. in Hörsaal 3 im  
Mathematischen Institut INF 288.

### Vorträge

#### 1 Affine Varietäten 13. bzw. 15. 10. 2015

Wir wiederholen ein bisschen Theorie über Polynome und Polynomabbildungen und führen den Begriff des rationalen Funktionenkörpers ein. Schließlich studieren wir gemeinsame Nullstellenmengen von Mengen von Polynomen, so genannte „affine Varietäten“ und bestimmte Parametrisierungen von diesen. Die behandelten Objekte sollen mit vielen Beispielen veranschaulicht werden.

**Literatur:** [Vog], **Abschnitte 1 und 2**

#### 2 Ideale im Polynomring 20. bzw. 22. 10. 2015

In diesem Vortrag werden zunächst Ideale in Polynomringen studiert. Natürlich behalten wir dabei die Geometrie im Blickfeld und werfen die Frage nach dem Zusammenhang zwischen Idealen und Varietäten auf. Da wir nun wissen, dass wir Polynome verstehen müssen, um Varietäten zu begreifen, studieren wir nun erst einmal Polynome in einer Variablen. Wir erinnern an die aus der Linearen Algebra bekannte Division mit Rest im Polynomring  $K[X]$  über einem Körper (4.4 - 4.7 werden zu diesem Zweck erwähnt aber nicht ausgeführt) und folgern, dass alle Ideale im Polynomring  $K[X]$  bereits von einem einzigen Polynom erzeugt werden. Dieses kann, wie wir zeigen werden, auch tatsächlich berechnet werden, und zwar mit dem euklidischen Algorithmus. **Literatur:** [Vog], **Abschnitte 3 und 4**

#### 3 Der Divisionsalgorithmus in $K[X_1, \dots, X_n]$ 27. bzw. 29. 10. 2015

Es liegt nun nahe zu versuchen, den euklidischen Algorithmus auf Polynome in mehreren Variablen anzupassen. Nun beruhte dieser aber wesentlich darauf, dass man den „Leitterm“ eines Polynoms in  $K[X]$  kennt, das heißt man weiß,

welches im Polynom vorkommende Monom bezüglich der kanonischen über den Grad gegebenen Ordnung „am größten“ ist. Wir wollen daher zunächst Ordnungen auf der Menge der Monome in  $K[X_1, \dots, X_n]$  untersuchen, um diesen Sachverhalt imitieren zu können (*hierbei dürfen 5.10 - 5.12 ausgelassen werden*), und beweisen dann eine „Division mit Rest“ in  $K[X_1, \dots, X_n]$ . Letztere führen wir schließlich noch anhand einiger Beispiele vor. **Literatur:** [Vog], **Abschnitte 5 und 6**

#### 4 Monomideale

3. bzw. 5. 11. 2015

Nachdem wir die Schwierigkeit des uneindeutigen Leitkoeffizienten umschifft haben, wenden wir uns nun einem weiteren Problem beim Rechnen in  $K[X_1, \dots, X_n]$  zu; wir wollen nämlich zeigen, dass alle Ideale darin endlich erzeugt sind. In diesem Vortrag führen wir dazu die Monomideale ein, für die wir diese Behauptung zeigen können; das ist das Lemma von Dickson. **Literatur:** [Vog], **Abschnitt 7**

#### 5 Hilberts Basissatz

10. bzw. 12. 11. 2015

Durch einen Trick können wir dieselbe Aussage für beliebige Ideale auf diejenige für Monomideale aus dem letzten Vortrag zurückführen und somit den Hilbert'schen Basissatz zeigen. Abschließend benutzen wir diesen, um zu zeigen, dass sich die endliche Erzeugtheit von Idealen äquivalent auch als eine Kettenbedingung formulieren lässt. **Literatur:** [Vog], **Abschnitt 8**

#### 6 Gröbnerbasen

17. bzw. 19. 11. 2015

Wir untersuchen zunächst die im bereits im letzten Vortrag eingeführten Gröbnerbasen im Zusammenhang zur Division mit Rest. Den Rest des Vortrags befassen wir uns mit dem Problem, dass Gröbnerbasen zu einem gegebenen Ideal nicht eindeutig sind. Wenn man sich es aussuchen könnte, würde man selbstverständlich stets eine möglichst „einfache“ Gröbnerbasis erhalten, das heißt zum Beispiel, dass letztere eine minimale Elementanzahl haben soll. Wir führen in diesem Vortrag den Begriff der reduzierten Gröbnerbasis ein und zeigen, dass diese immer eindeutig sind. **Literatur:** [Vog], **9.1, 9.2, 10.3 - 10.13**

**7 Eliminations- und Fortsetzungssatz** **24. bzw. 26. 11. 2015**

Um ein Gleichungssystem zu lösen kann man unter günstigen Umständen einen Trick anwenden. Die Idee hierbei ist, ein schweres Problem durch zwei (hoffentlich) leichtere zu ersetzen. Kann man nämlich aus einem Satz von Polynomgleichungen mehrere Variablen eliminieren, so erhält man ein kleineres und daher einfacher zu lösendes Gleichungssystem. Die Lösungen dieses kleinen Systems setzt man in das ursprüngliche System ein und hat dieses damit verkleinert. Für die systematische Anwendung dieses Tricks gibt es zwei wesentliche Hindernisse: Zum einen muss man abklären, wann eine solche Elimination möglich ist, zum anderen, wie genau man die Lösungen des kleinen Systems zu Lösungen des ursprünglichen Systems fortsetzt. In diesem Vortrag werden wir die grundsätzliche Problematik beschreiben und das erste dieser zwei Hindernisse mit dem Eliminationssatz aus dem Weg räumen. Die Lösung des zweiten Problems, den Fortsetzungssatz, werden wir in diesem Seminar nicht herleiten. **Literatur:** [Vog], **Abschnitt 11**

**8 Die Geometrie der Elimination** **1. bzw. 3. 12. 2015**

In diesem Vortrag interpretieren wir die Elimination geometrisch und Reformulieren den Fortsetzungssatz entsprechend. Das große Resultat ist aber der daraus folgende Satz vom Abschluss, der grob besagt, dass die Projektion einer Varietät  $V(I) \subseteq \mathbb{C}^n$  auf den Untervektorraum  $\mathbb{C}^{n-m}$  im Wesentlichen ganz  $V(I \cap \mathbb{C}[X_{m+1}, \dots, X_n])$  ist. Diesen beweisen wir aber nur teilweise und verweisen auf Vortrag 12 für den Rest. **Literatur:** [Vog], **Abschnitt 12**

**9 Implizitisierung** **8. bzw. 10. 12. 2015**

Eine interessante Frage ist auch die nach der kleinsten Varietät, die das Bild einer gegebenen Abbildung  $K^n \rightarrow K^m$  enthält, deren Koordinatenabbildungen jeweils rationale Funktionen sind. Die Antwort gibt der Satz von der Implizitisierung, den wir in diesem Vortrag zunächst im Spezialfall für Polynome und dann allgemein beweisen. **Literatur:** [Vog], **Abschnitt 13**

**10 Der Schwache Hilbert'sche Nullstellensatz** **15. bzw. 17. 12. 2015**

Dieser Vortrag bietet noch einmal ein besonders schönes Resultat. Mit dem Schwachen Hilbert'schen Nullstellensatz können wir das Konsistenzproblem lösen, also (zumindest über algebraisch abgeschlossenen Körpern) zeigen, dass

eine affine Varietät genau dann keine Punkte hat, wenn die zugehörige reduzierte Gröbnerbasis trivial ist. **Literatur:** [Vog], **Abschnitt 16 bis inklusive 16.6**

## **11 Radikalideale und der Starke Nullstellensatz 12. bzw. 14. 1. 2016**

Wir zeigen eine Umformulierung des Schwachen Hilbert'schen Nullstellensatzes, den Nullstellensatz. Dieser motiviert, eine weitere Sorte Ideale einzuführen, die Radikalideale. Diese sind dadurch gegeben, dass mit einer beliebigen Potenz  $f^m$  immer auch schon das ursprüngliche Element  $f$  im Ideal liegt. Wir studieren Eigenschaften von Radikalidealen und beweisen unser Hauptergebnis, den Starken Nullstellensatz, der uns (für algebraisch abgeschlossene Körper) genau sagt, wie Ideale und Varietäten auseinander hervorgehen. **Literatur:** [Vog], **16.7 und 17.1 - 17.9**

## **12 Zariski-Abschluss 19. bzw. 21. 1. 2016**

Wir führen den Zariski-Abschluss als die kleinste affine Varietät ein, die eine gegebene Teilmenge des  $K^n$  enthält. Mit diesem Konzept lässt sich nun auch der Satz vom Abschluss aus Vortrag 8 beweisen. Abschließend untersuchen wir den Zusammenhang zwischen Zariski-Abschluss und Idealquotienten. **Literatur:** [Vog], **Abschnitt 19**

## **Literatur**

[CLO] D. Cox, J. Little, D. O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Springer, 1992.

[Vog] D. Vogel. *Algorithmische Geometrie*. Vorlesungsskript, 2008.

**Bemerkung:** [Vog] stellt eine Ausarbeitung von [CLO] dar.