Seminarprogramm Wintersemester 2014/15
Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher

Vorträge

Vortrag 1: Analytische Funktionen (16. 10. 2014)

[Fre] Kapitel 1 bis 1.10: Es wird der Begriff der analytischen Funktion $f : U \to V$ mit jeweils offenen $U \subseteq \mathbb{C}^n$ und $V \subseteq \mathbb{C}^m$ eingeführt. Komplex totale Differenzierbarkeit und glatte Mengen werden besprochen.

Vortrag 2: Der Divisionssatz im Ring der konvergenten Potenzreihen (23. 10. 2014)

[Fre] 1.11 bis 2.3: Der Ring $\mathcal{O}_n := \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ der konvergenten Potenzreihen in n Variablen wird eingeführt. Dieser ist ein Integritätsring, so dass der Euklid'sche Algorithmus auf Polynome in $\mathcal{O}_{n-1}[X]$ angewendet werden kann. Zusammen mit dem Begriff des Weierstraßpolynoms ermöglicht dies den Divisionssatz in $\mathcal{O}_n$ (Satz 2.3).

Vortrag 3: Der Weierstraß'sche Vorbereitungssatz (30.10. 2014)

[Fre] 2.4 bis Anhang: Es werden z_n-allgemeine Potenzreihen in $\mathcal{O}_n$ eingeführt und gezeigt (!), dass diese insofern häufig sind, als für ein beliebiges $P \in \mathcal{O}_n$ die Menge der $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, für die $P(Az)$ schon z_n-allgemein ist, offen und dicht in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist. Der Weierstraß'sche Vorbereitungssatz (Satz 2.7) besagt nun, dass sich z_n-allgemeine Potenzreihen unter harmlosen Voraussetzungen als Produkt einer Einheit in $\mathcal{O}_n$ und eines Weierstraßpolynoms schreiben lassen.

Vortrag 4: Anwendungen des Divisions- und des Vorbereitungssatzes (6. 11. 2014)

[Fre] Kapitel 3: Vermöge eines Isomorphismus zwischen geeigneten Quotienten von $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ und von $\mathcal{O}_n$ lässt sich zeigen, dass $\mathcal{O}_n$ ein ZPE-Ring ist, dessen Ideale allesamt endlich erzeugt sind. Abschließend werden noch einige Teilbarkeitseigenschaften untersucht.

Vortrag 5: Hyperflächen (13. 11. 2014)

[Fre] Kapitel 4: Es werden affine Mengen und als Spezialfall von diesen

Hyperflächen eingeführt. Ein wichtiges Resultat ist eine Verallgemeinerung des Riemann'schen Hebbarkeitssatzes in diese Situation (Satz 4.4). Danach wird der singuläre Ort einer affinen Menge eingeführt und im Falle von Hyperflächen studiert.

Vortrag 6: Noether-Normalisierung (20. 11. 2014)

[Fre] Kapitel 5: Ein Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathcal{O}_n$ heißt z_n-allgemein, wenn es ein z_n-allgemeines Element enthält. Da jedes nichttriviale Ideal nach einer geeigneten Koordinatentransformation z_n-allgemein wird, genügt es zumeist, sich mit z_n-allgemeinen Idealen zu beschäftigen. So zeigt man beispielsweise, dass der Quotientenkörper $\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$ eines beliebigen Primideals $\mathfrak{p}$ von $\mathcal{O}_n$ isomorph zum Quotientenkörper eines primen Hauptideals ist. Als Hauptergebnis dieses Vortrags besagt der Noether'sche Normalisierungssatz (Satz 5.5), dass jede analytische Algebra ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_n$-Modul ist. Dabei ist die Dimension n eindeutig bestimmt nach dem Satz von Cohen-Seidenberg (siehe etwa [Eis] Prop. 9.2).

Vortrag 7: Der Hilbert'sche Nullstellensatz (27. 11. 2014)

[Fre] Kapitel 6: Das Verschwindungsideal einer analytischen Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}^n$ und dessen Saturierung wird eingeführt. Weiter werden kurz das Radikal eines Ideals sowie Radikalideale von Noetherschen Ringen besprochen (für letzteres siehe etwa [Eis] 2.3 zusammen mit 1.11, Ex. 1.2). Schließlich wird im Hilbert'schen Nullstellensatz (der in diesem Fall nach Rückert benannt ist) das Radikal eines Verschwindungsideals mit dessen Saturierung identifiziert.

Vortrag 8: Kohärente Systeme I: Der Oka'sche Kohärenzsatz (4. 12. 2014)

[Fre] Kapitel 7 bis 7.5: Kohärente Systeme werden eingeführt und erste einfache Eigenschaften besprochen (7.4 - 7.5). Weiter wird der Oka'sche Kohärenzsatz gezeigt: Für eine $\mathcal{O}(U)$-lineare Abbildung $\mathcal{O}(U)^p \to \mathcal{O}(U)^q$ ist das Kernsystem kohärent (d.h. Strukturgarben von holomorphen Funktionen sind kohärent).

Vortrag 9: Kohärente Systeme II: weitere Permanenzeigenschaften (11. 12. 2014)

[Fre] 7.6 bis 8.5: Einige Folgerungen aus dem Oka'schen Kohärenzsatz werden gezeigt (7.6 - 7.7). Danach wird mittels einer Vorstufe des Satzes von Cohen-Seidenberg (siehe etwa [Eis] Prop. 4.15) für $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ das Hensel'sche Lemma (8.1 - 8.4) und mit diesem ein Spezialfall des Grauert'schen Projektionssatzes gezeigt (direkte Bilder von kohärenten Idealgarben unter Projektionen $D \times \mathbb{C} \to D$ sind wieder kohärent).

Vortrag 10: Kohärente Systeme III: Kohärenz von Verschwindungsidealen (18. 12. 2014)

[Fre] 8.6 bis 8.8: Der reduzierte Ort eines kohärenten Systems wird eingeführt und dessen Offenheit gezeigt (Satz 8.7). Zusammen mit dem Hilbert'schen Nullstellensatz wird auf die Kohärenz von Verschwindungsidealen geschlossen (Satz 8.8).

Vortrag 11: Dimension und lokal irreduzible Zerlegung analytischer Mengen $1,5$ *Sitzungen?* (8. 1. 2014)

[Fre] Kapitel 9: Lokale Ringe analytischer Mengen werden eingeführt und über diese die lokale Dimension sowie der Begriff eines integren Punktes einer analytischen Menge erklärt. Schließlich wird die Zerlegung analytischer Teilmengen in lokal irreduzible Komponenten besprochen.

Vortrag 12: Glattheit analytischer Mengen und deren singulärer Ort (15. 1. 2014)

[Fre] Kapitel 10: Der Begriff des glatten Punktes einer analytischen Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}^n$ wird eingeführt. Weiter wird gezeigt, dass der glatte Ort $X_{\text{reg}} \subseteq X$ offen und dicht ist sowie, dass der singuläre Ort wieder eine analytische Teilmenge ist.

Literatur

[Eis] D. Eisenbud. *Commutative Algebra (with a View Toward Algebraic Geometry)*. Springer, 2004.

[Fre] E. Freitag. *Lokale Funktionentheorie (Vorlesungsskript)*.
`http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~t91/skripten/fmv.ps`