Proseminarprogramm Wintersemester 2013/14
Das BUCH der Beweise

Der ungarische Mathematiker Paul Erdős erzählte gerne von dem BUCH, in dem Gott die perfekten Beweise für mathematische Sätze aufbewahrt, und dass man an als Mathematiker nicht an Gott zu glauben braucht, sehr wohl aber an das BUCH glauben sollte. Wir werden im Proseminar einige Beweise studieren, die Kandidaten für einen Platz im BUCH sind. Die bewiesenen Sätze entstammen den Gebieten Zahlentheorie, Geometrie, Analysis, Kombinatorik und Graphentheorie.

Voraussetzungen: Analysis 1 und LA 1

Vorbesprechung: am 25. 7. 2013 um 13 Uhr ct in Hörsaal 1 in INF 288

Vorträge

1 Unendlichkeit und Verteilung der Primzahlen 15. + 17. 10. 2013

Es werden verschiedene Beweise dafür gegeben, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Anschließend wird ein auf Paul Erdős zurückgehender Beweis für das Bertrand'sche Postulat vorgestellt. Dieses besagt, dass es für jede natürlichen Zahl $n \geq 1$ stets eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$ gibt. **Literatur: [BUCH], §1, §2**

2 Binomialkoeffizienten und der Satz von Wilson 22. + 24. 10. 2013

Zunächst soll der folgende Satz von Erdős gezeigt werden: Die Gleichung

$$\binom{n}{k} = m^l$$

besitzt keine ganzzahligen Lösungen für $l \geq 2$ und $4 \leq k \leq n-4$. Im Anschluß daran wird ein Beweis des Satzes von Wilson vorgestellt, der auf einer Identität von Binomialkoeffizienten beruht. **Literatur: [BUCH], §3, [Ruiz]**

3 Der Zwei-Quadrate-Satz von Fermat 29. + 31. 10. 2013

Es soll der folgende, auf Fermat zurückgehende Satz gezeigt werden: Eine ungerade Primzahl p ist genau dann Summe von zwei Quadraten, wenn $p \equiv 1 \mod 4$ ist. Es sollen zwei Beweise dafür vorgestellt werden, die auf Thue bzw. Heath-Brown zurückgehen. **Literatur: [BUCH], §4**

4 Einige irrationale Zahlen 5. + 7. 11. 2013

In diesem Vortrag soll gezeigt werden, dass π^2 sowie die Zahlen e^r für $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ irrational sind. **Literatur: [BUCH], §6**

5 Jeder endliche Schiefkörper ist ein Körper 12. + 14. 11. 2013

Ein Satz von Wedderburn besagt, dass jeder endliche Schiefkörper kommutativ ist. Es soll der Beweis dieses Resultats nach Ernst Witt erläutert werden. **Literatur: [BUCH], §5**

6 Hilberts 3. Problem 19. + 21. 11. 2013

In einem legendären Vortrag von dem Internationalen Mathematikerkongress 1900 forderte David Hilbert die Fachwelt zur Lösung von 23 Jahrhundertproblemen auf. Das dritte hiervon ist die Frage nach zwei Tetraedern gleicher Grundfläche und gleicher Höhe, die sich auf keine Weise in kongruente Tetraeder zerlegen lassen, und die sich auch durch Hinzufügen kongruenter Tetraeder nicht zu Polyedern ergänzen lassen, für die ihrerseits eine Zerlegung in kongruente Tetraeder möglich ist. **Literatur: [BUCH], §8**

7 Die Euler'sche Polyederformel 26. + 28. 11. 2013

Eulers Polyederformel besagt, dass für jeden zusammenhängenden ebenen Graphen mit n Ecken, e Kanten und f Flächen die Gleichung

$$n - e + f = 2$$

gilt. Wir werden diese Formel beweisen und drei Anwendungen derselben herleiten. **Literatur: [BUCH], §11**

8 Die Kontinuumshypothese 3. + 5. 12. 2013

In diesem Vortrag geht es um den Begriff der Unendlichkeit. Bekanntermaßen ist die Menge der reellen Zahlen überabzählbar, also im mengentheoretischen Sinne „größer“ als die der natürlichen Zahlen. Die Frage ist nun, ob es zwischen der Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ und der von $\mathbb{R}$ noch eine weitere Mächtigkeit geben kann. **Literatur: [BUCH], §16** *Die Vorlage für diesen Vortrag ist recht umfangreich, enthält andererseits aber auch einiges an bereits bekanntem. Bitte sprechen Sie sich für den Zuschnitt des Vortrags rechtzeitig mit dem Betreuer ab!*

9 Partitionen natürlicher Zahlen 10. + 12. 12. 2013

Die Partitionsfunktion $p(n)$ einer natürlichen Zahl n ist als die Anzahl an Möglichkeiten, diese als Summe von natürlichen Zahlen zu schreiben, gegeben. Wir zeigen, zunächst rein formal, also ohne Konvergenzbetrachtungen,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$$

und ähnliche Aussagen für formale Reihen über gerade und ungerade Partionen und Pentagonalzahlen. Abschließend betreiben wir noch ein bisschen Analysis, um zu zeigen, dass die erwähnten Gleichheiten auch für Funktionen auf dem Intervall $[0, 1)$ gelten. **Literatur: [BUCH], §29, und [Apo], Theorem 14.2 und Theorem 14.3**

10 Museumswächter heiraten Politiker 17. + 19. 12. 2013

In diesem Vortrag sollen drei Probleme erörtert werden.

- Gegeben ist ein Museum, dessen Wände wir uns als Polygon mit n Seiten vorstellen. Es sollen Wächter an festen Stellen postiert werden. Diese dürfen sich aber nicht drehen. Wie viele Wächter braucht man, wenn man sichergehen will, dass jeder Punkt des Museums im Blickfeld eines Wächters ist?
- Der Heiratssatz: Gegeben eine Menge F von Frauen und eine Menge M von Männern. Unter welchen Umständen lässt sich ohne Polygamie eine Massenhochzeit veranstalten, auf der jede Frau einen Mann heiratet, den sie mag?[1]
- Der Freundschaftssatz: Wir nehmen an, dass in einer Gruppe von Menschen je zwei Personen genau einen gemeinsamen Freund haben. Dann gibt es einen „Politiker“, den alle zum Freund haben.

Literatur: [BUCH], §23, §31, §34

11 Cayleys Formel für die Anzahl der Bäume 7. + 9. 1. 2014

Cayleys Formel besagt, dass es n^{n-2} verschiedene bezeichnete Bäume auf n Ecken gibt. Für diesen Sachverhalt sollen vier verschiedene Beweise gegeben werden. **Literatur: [BUCH], §26**

[1] In diesem Modell scheint auf das Gefühlsleben der beteiligten Männer keine Rücksicht genommen zu werden.

12 Ein Satz von Pólya über Polynome 14. + 16. 1. 2014

Für ein normiertes komplexes Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ betrachten wir die Menge

$$\mathcal{C} := \{z \in \mathbb{C} \mid |f(z)| \leq 2\}.$$

Pólyas Satz besagt, dass für eine beliebige Gerade $L \subseteq \mathbb{C}$ die totale Länge der Orthogonalprojektion von $\mathcal{C}$ auf L höchstens 4 ist. **Literatur: [BUCH], §18**

13 Ein Lemma von Littlewood und Offord 21. + 23. 1. 2014

Der Satz von Littlewood und Offord besagt: Seien $a_1, \dots, a_n$ komplexe Zahlen vom Betrag mindestens 1. Aus diesen kann man 2^n Linearkombinationen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu a_\nu \quad \text{mit } \varepsilon_\nu \in \{\pm 1\} \text{ für alle } \nu$$

bilden. Die Anzahl derjenigen Linearkombinationen, die innerhalb eines festen Kreises von Radius 1 liegen, ist dann nicht größer als

$$c \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot \log n \quad \text{für eine von } n \text{ unabhängige Konstante } c > 0.$$

Der Beweis des Satzes von Littlewood und Offord verwendet einen Satz von Sperner über endliche Mengen. Dieser soll ebenfalls beweisen werden. **Literatur: [BUCH], §19, §23**

Literatur

[Apo] T. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer, 1976.

[BUCH] M. Aigner, G. Ziegler. *Das Buch der Beweise, 2. Auflage*. Springer, 2003.

[Ruiz] S. Ruiz. *An algebraic identity leading to Wilson's Theorem*. Mathematical Gazette **80, No. 489** (1996), Seiten 579-582.