Seminarprogramm Wintersemester 2013/14

Analytische Zahlentheorie

Voraussetzungen: Funktionentheorie 1.

Vorbesprechung: 23. 7. 2013 um 13 Uhr c.t. in HS3 in INF288

Vorträge

1 Dirichletreihen

15. 10. 2013

Eine Reihe der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ heißt eine Dirichletreihe in der komplexen Variablen s . Der Konvergenzbereich einer Dirichletreihe ist stets durch eine Bedingung der Form $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$ gegeben. Es gelten ein Multiplikationssatz und ein Identitätssatz und der Satz von Landau. **Literatur: Kapitel 1 von [Wol1].**

2 Die Riemann'sche Zetafunktion

22. 10. 2013

Die wohl berühmteste Dirichletreihe ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, durch die auf ihrer Konvergenzhalbebene $\operatorname{Re}(s) > 1$ die Riemann'sche Zetafunktion $\zeta(s)$ definiert wird. Diese hat ein Eulerprodukt und wird somit im Konvergenzbereich nicht Null. Anhand dieser Eulerprodukt Darstellung können wir dann auch die Mangoldt'sche Funktion Λ einführen. Auf verschiedene Weisen lässt sich $\zeta(s)$ meromorph auf einen größeren Zahlbereich fortsetzen: Vermöge Euler'scher Summation (vgl. Satz 2.2 in [Wol1]) erhalten wir eine Fortsetzung auf $\operatorname{Re}(s) > 0$, die Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ (vgl. Lemma 2.4 in [Mül]) erwähnen wir nur; das entsprechende Resultat wird in Vortrag 4 gezeigt. Den Abschluss des Vortrags bildet die Aussage, dass die fortgesetzte Zetafunktion auch auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = 1$ nullstellenfrei ist. **Literatur: Kapitel 2 von [Mül] bis inklusive Theorem 2.2 und Kapitel 2 von [Wol1]. Ergänzend Abschnitt 1.2 von [Koh] und Hilfssatz VII.4.2 in [FB].** textitBei diesem Vortrag bitte genau an die Vorgaben im Seminarprogramm halten!

3 Die Gammafunktion

29. 10. 2013

Wir führen die Gammafunktion als Interpolierende der Fakultätsfunktion ein und leiten über den Satz von Wielandt ihre Integraldarstellung her. Außerdem

zeigen wir die in Vortrag 5 benötigte Identität

$$\Gamma(-z) \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) = - \int_0^\infty t^{-1-z} \sin t \, dt.$$

Literatur: Abschnitt 1.3 in [Koh] und Abschnitt 39 in [Rad]. *Dieser Vortrag ist recht großzügig zugeschnitten. Das letzte Thema sollte eher wie eine Bemerkung behandelt werden.*

4 Die meromorphe Fortsetzung der Zetafunktion

5. 11. 2013

Wir holen die meromorphe Fortsetzung der Zetafunktion aus Vortrag 2 nach, führen die Bernoullizahlen als Koeffizienten der Taylorentwicklung von $\frac{t}{e^t-1}$ um $t = 0$ ein und bestimmen die speziellen Zetawerte an den negativen ganzen Zahlen. **Literatur: Proposition 2.3, Lemma 2.4, Theorem 2.6 und Bemerkung 2.7 in [Mül] und Abschnitt III.2: „Ein Beispiel zu 3. Invertieren von Potenzreihen“ in [FB].**

5 Die Funktionalgleichung der Zetafunktion

12. 11. 2013

Dieser Vortrag doppelt einige Ergebnisse des letzten Vortrags; die Beweise sind aber ganz andere. Zunächst zeigen wir die Funktionalgleichung der Riemann'schen Zetafunktion. Zusammen mit der meromorphen Fortsetzung der Zetafunktion auf $\operatorname{Re}(s) > 0$ liefert auch diese eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$. Wir erhalten aber noch mehr: Über die Nullstellenfreiheit der Zetafunktion in $\operatorname{Re}(s) > 1$ lernen wir alle Nullstellen auf $\operatorname{Re}(s) < 0$ kennen. Nun kann auch die Riemann'sche Vermutung formuliert werden. Außerdem können wir wieder spezielle Zetawerte berechnen. Das geht zum einen, indem wir die Werte vom letzten Vortrag in die Funktionalgleichung einsetzen und zum anderen über die Partialbruchzerlegung des Kotangens. In beiden Fällen erhalten wir, dass sich die Werte der Riemann'schen Zetafunktion an den geraden positiven ganzen Zahlen durch die Bernoullizahlen ausdrücken lassen. **Literatur: Kapitel 4 ab 4.4 in [Wol1] und Abschnitt III.7: „Die Partialbruchzerlegung des Kotangens“ in [FB].**

6 + 7 Irrationalität von $\zeta(3)$

19. + 26. 11. 2013

Über die Werte der Riemann'schen Zetafunktion an den ungeraden natürlichen Zahlen war lange Zeit nur sehr wenig bekannt. Erst 1978 zeigte Apéry die Irrationalität von $\zeta(3)$. Ziel dieser Vorträge ist die Präsentation des nur wenig jüngeren kürzeren Beweises von Beukers für diesen Sachverhalt. Wenn noch

etwas Zeit bleibt, kann am Ende noch kurz über die mittlerweile bekannten Resultate über die Zetawerte $\zeta(k)$ für ungerades $k \geq 3$ berichtet werden. **Literatur: Kapitel 3 in [Mül]; für den Ausblick am Ende auch Kapitel 4 in loc. cit.**

8 Ein Taubersatz von Newman

3. 12. 2013

Der Abel'sche Grenzwertsatz folgert aus der Konvergenz einer Reihe die stetige Fortsetzbarkeit einer durch die Reihe gegebenen Potenzreihe in einen Randpunkt ihres Konvergenzbereichs. Ein umgekehrter Schluss sind nur unter einschränkenden Voraussetzungen möglich; die entsprechenden Resultate nennt man nach Alfred Tauber (1866-1942) auch Taubersätze. Wir zeigen einen Taubersatz von Newman aus dem Jahr 1980. **Literatur: Kapitel 7 in [Wol2], Abschnitte 8.8.J und 8.8.L in [Wal]**

9 Der Gauß'sche Primzahlsatz

10. 12. 2013

Wir führen die Primzahlzählfunktion $\pi(x)$ und die erste und zweite Tschebyschefffunktion $\psi(x)$ und $\vartheta(x)$ ein und untersuchen mit dem Satz von Tschebyscheff ihr asymptotisches Verhalten für x gegen unendlich. Hiermit und mit dem Taubersatz aus dem letzten Vortrag folgt schließlich der Primzahlsatz, der eine Präzisierung des Satzes von Tschebyscheff darstellt. **Literatur: Kapitel 6 in [Hal], Kapitel 7 in [Wol2].**

10 + 11 Fehlerabschätzung beim PZS

17. 12. 2013 + 7. 1. 2014

Die Perron'sche Formel lässt uns Teilsummen einer Reihe durch ein Integral berechnen. Wir benutzen sie, um eine Version des Primzahlsatzes mit Restglied zu zeigen. Zuletzt besprechen wir den Zusammenhang zwischen der Qualität dieses Restglieds und den nichttrivialen Nullstellen der Zetafunktion. **Literatur: Kapitel 4 bis inklusive 4.2 und Kapitel 5 in [Wol1].**

12 Dirichletcharaktere und L -Reihen

14. 1. 2014

Charaktere sind Homomorphismen von einer Gruppe G in die Einheitsgruppe $\mathbb{C}^\times$ der komplexen Zahlen. Wählt man speziell $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ für eine ganze Zahl $n \geq 1$, so nennt man die zugehörigen Charaktere Dirichletcharaktere. Sie lassen sich zu multiplikativen Funktionen auf den ganzen Zahlen fortsetzen und können so als Koeffizienten von Dirichletreihen eingesetzt werden. Diese

Dirichlet'schen L -Reihen konvergieren kompakt für $\operatorname{Re}(s) > 0$ und absolut für $\operatorname{Re}(s) > 1$. **Literatur: Kapitel 6 in [Wol1].**

13 Der Dirichlet'sche Primzahlsatz

21. 1. 2014

Seien $a, m \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(a, m) = 1$. Dann besagt der Dirichlet'sche Primzahlsatz, dass die Menge der Zahlen $a + \mathbb{Z}m$ unendlich viele Primzahlen enthält. Mit ähnlichen Methoden wie beim Gauß'schen Primzahlsatz zeigen wir hier sogar mehr: Die Primzahlen verteilen sich nämlich asymptotisch gleichmäßig auf die Restklassen $a + \mathbb{Z}m$ modulo m mit $\operatorname{ggT}(a, m) = 1$. **Literatur: Kapitel 7 in [Wol1].**

Literatur

- [FB] E. Freitag, R. Busam. *Funktionentheorie*. Springer, 1993.
- [Hal] K. Halupczok. *Elementare Zahlentheorie*. Vorlesungsskript, 2009.
- [Koh] W. Kohlen. *Funktionentheorie 2*. Vorlesungsskript, 2006.
- [Mül] L. F. Müller. *Die Riemann'sche Zetafunktion ausgewertet in den ganzen Zahlen*. Bachelorarbeit, 2012.
- [Rad] H. Rademacher. *Topics in Analytic Number Theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Nr. **169**. Springer, 1973.
- [Wal] R. Walter. *Einführung in die Analysis I*. Walter de Gruyter, 2007.
- [Wol1] D. Wolke. *Analytische Zahlentheorie*. Vorlesungsskript, 2001/02.
- [Wol2] D. Wolke. *Ergänzung zur Elementaren Zahlentheorie*. Vorlesungsskript, 2009/10.