

Seminarprogramm Wintersemester 2012 / 13

Algorithmische Geometrie

Voraussetzungen: Nur die Grundvorlesungen. Dieses Seminar richtet sich insbesondere an **Lehramtsstudenten**.

Vorbesprechung: am Mittwoch, dem 25. 7. 2012, um 13 Uhr c. t. in Hörsaal 3, INF 288.

Vorträge

1 Affine Varietäten 16. 10. 2012

Wir wiederholen ein bisschen Theorie über Polynome und Polynomabbildungen und führen den Begriff des rationalen Funktionenkörpers ein. Schließlich studieren wir gemeinsame Nullstellenmengen von Mengen von Polynomen, so genannte „affine Varietäten“ und bestimmte Parametrisierungen von diesen. Die behandelten Objekte sollen mit vielen Beispielen veranschaulicht werden.
Literatur: [Vog], **Abschnitte 1 und 2**

2 Ideale im Polynomring 23. 10. 2012

In diesem Vortrag werden Ideale in Polynomringen studiert. Natürlich behalten wir dabei die Geometrie im Blickfeld und werfen die Frage nach dem Zusammenhang zwischen Idealen und Varietäten auf. **Literatur:** [Vog], **Abschnitt 3**

3 Der euklidische Algorithmus 30. 10. 2012

Da wir nun wissen, dass wir Polynome verstehen müssen, um Varietäten zu begreifen, studieren wir nun zunächst Polynome in einer Variablen. Wir zeigen, dass die aus den ganzen Zahlen bekannte Division mit Rest auch im Polynomring $K[X]$ über einem Körper funktioniert und folgern, dass alle Ideale im Polynomring $K[X]$ bereits von einem einzigen Polynom erzeugt werden. Dieses kann, wie wir zeigen werden, auch tatsächlich berechnet werden, und zwar mit dem euklidischen Algorithmus. **Literatur:** [Vog], **Abschnitt 4**

4 Der Divisionsalgorithmus in $K[X_1, \dots, X_n]$ **6. 11. 2012**

Es liegt nun nahe zu versuchen, den euklidischen Algorithmus auf Polynome in mehreren Variablen anzupassen. Nun beruhte dieser aber wesentlich darauf, dass man den „Leitterm“ eines Polynoms in $K[X]$ kennt, das heißt man weiß, welches im Polynom vorkommende Monom bezüglich der kanonischen über den Grad gegebenen Ordnung „am größten“ ist. Wir wollen daher zunächst Ordnungen auf der Menge der Monome in $K[X_1, \dots, X_n]$ untersuchen, um diesen Sachverhalt imitieren zu können, und beweisen dann eine „Division mit Rest“ in $K[X_1, \dots, X_n]$. Letztere führen wir schließlich noch anhand einiger Beispiele vor. **Literatur: [Vog], Abschnitte 5 und 6**

5 Monomideale**13. 11. 2012**

Nachdem wir die Schwierigkeit des uneindeutigen Leitkoeffizienten umschiffen haben, wenden wir uns nun einem weiteren Problem beim Rechnen in $K[X_1, \dots, X_n]$ zu; wir wollen nämlich zeigen, dass alle Ideale darin endlich erzeugt sind. In diesem Vortrag führen wir dazu die Monomideale ein, für die wir diese Behauptung zeigen können; das ist das Lemma von Dickson. **Literatur: [Vog], Abschnitt 7**

6 Hilberts Basissatz**20. 11. 2012**

Durch einen Trick können wir dieselbe Aussage für beliebige Ideale auf diejenige für Monomideale aus dem letzten Vortrag zurückführen und somit den Hilbert'schen Basissatz zeigen. Wir führen den Begriff der Gröbnerbasis ein und benutzen ihn, um zu zeigen, dass sich die endliche Erzeugtheit von Idealen äquivalent auch als eine Kettenbedingung formulieren lässt. **Literatur: [Vog], Abschnitt 8**

7 Gröbnerbasen**27. 11. 2012**

Wir untersuchen die im letzten Vortrag eingeführten Gröbnerbasen und zeigen insbesondere Kriterien, anhand derer man feststellen kann, ob eine Menge von Polynomen eine Gröbnerbasis eines gegebenen Ideals ist. **Literatur: [Vog], Abschnitt 9 ohne den Beweis der Behauptung auf den Seiten 43/44**

8 Der Buchbergeralgorithmus

4. 12. 2012

Der Buchbergeralgorithmus liefert zu einem durch seine Erzeuger gegebenen Ideal in $K[X_1, \dots, X_n]$ eine Gröbnerbasis. Wir zeigen dies mit dem Kriterium aus dem letzten Vortrag, das wir zuvor noch zu Ende beweisen. Wenn noch Zeit ist, berichten wir mündlich (kurz) über die in [CLO], Abschnitt 2.9, erwähnten Verbesserungsmöglichkeiten für den Buchbergeralgorithmus. **Literatur:** [Vog], **der im letzten Vortrag ausgelassene Beweis und [Vog], Theorem 10.1 mit Beweis und Beispiel 10.2.**

9 Reduzierte Gröbnerbasen

11. 12. 2012

Natürlich ist es schön, dass uns der Buchbergeralgorithmus zu jedem Ideal von $K[X_1, \dots, X_n]$ eine Gröbnerbasis liefert. Gröbnerbasen sind jedoch nicht eindeutig. Wenn man sich es aussuchen könnte, würde man selbstverständlich stets eine möglichst „einfache“ Gröbnerbasis erhalten, das heißt zum Beispiel, dass letztere eine minimale Elementanzahl haben soll. Wir führen in diesem Vortrag den Begriff der reduzierten Gröbnerbasis ein, zeigen, dass diese immer eindeutig sind und finden einen Algorithmus zu ihrer Bestimmung. **Literatur:** [Vog], **der Rest von Abschnitt 10**

10 Eliminations- und Fortsetzungssatz

18. 12. 2012

Um ein Gleichungssystem zu lösen kann man unter günstigen Umständen einen Trick anwenden. Die Idee hierbei ist, ein schweres Problem durch zwei (hoffentlich) leichtere zu ersetzen. Kann man nämlich aus einem Satz von Polynomgleichungen mehrere Variablen eliminieren, so erhält man ein kleineres und daher einfacher zu lösendes Gleichungssystem. Die Lösungen dieses kleinen Systems setzt man in das ursprüngliche System ein und hat dieses damit verkleinert. Für die systematische Anwendung dieses Tricks gibt es zwei wesentliche Hindernisse: Zum einen muss man abklären, wann eine solche Elimination möglich ist, zum anderen, wie genau man die Lösungen des kleinen Systems zu Lösungen des ursprünglichen Systems fortsetzt. In diesem Vortrag werden wir die grundsätzliche Problematik beschreiben und das erste dieser zwei Hindernisse mit dem Eliminationsatz aus dem Weg räumen. Die Lösung des zweiten Problems, den Fortsetzungssatz, werden wir in diesem Seminar nicht herleiten. **Literatur:** [Vog], **Abschnitt 11**

11 Die Geometrie der Elimination**8. 1. 2013**

In diesem Vortrag interpretieren wir die Elimination geometrisch und Reformulieren den Fortsetzungssatz entsprechend. Das große Resultat ist aber der daraus folgende Satz vom Abschluss, der grob besagt, dass die Projektion einer Varietät $V(I) \subseteq \mathbb{C}^n$ auf den Untervektorraum \mathbb{C}^{n-m} im Wesentlichen ganz $V(I \cap \mathbb{C}[X_{m+1}, \dots, X_n])$ ist. **Literatur:** [Vog], **Abschnitt 12**

12 Implizitisierung**15. 1. 2013**

Eine interessante Frage ist auch die nach der kleinsten Varietät, die das Bild einer gegebenen Abbildung $K^n \rightarrow K^m$ enthält, deren Koordinatenabbildungen jeweils rationale Funktionen sind. Die Antwort gibt der Satz von der Implizitisierung, den wir in diesem Vortrag zunächst im Spezialfall für Polynome und dann allgemein beweisen. **Literatur:** [Vog], **Abschnitt 13**

13 Hilberts Nullstellensatz**22. 1. 2013**

Dieser Vortrag bietet noch einmal ein besonders schönes Resultat. Mit dem (schwachen) Hilbert'schen Nullstellensatz können wir das Konsistenzproblem lösen, also (zumindest über algebraisch abgeschlossenen Körpern) zeigen, dass eine affine Varietät genau dann keine Punkte hat, wenn die zugehörige reduzierte Gröbnerbasis trivial ist. Im Anschluss folgern wir auch eine Umformulierung des Nullstellensatzes, die uns sagt, wann genau ein Polynom an allen Punkten einer affinen Varietät verschwindet. **Literatur:** [Vog], **Abschnitt 16**

14 Radikalideale und der Starke Nullstellensatz**29. 1. 2013**

Wir führen eine weitere Sorte Ideale ein, die Radikalideale. Diese sind dadurch gegeben, dass mit einer beliebigen Potenz f^m immer auch schon das ursprüngliche Element f im Ideal liegt. Wir studieren Eigenschaften von Radikalidealen und beweisen unser Hauptergebnis, den Starken Nullstellensatz, der uns (für algebraisch abgeschlossene Körper) genau sagt, wie Ideale und Varietäten auseinander hervorgehen. **Literatur:** [Vog], **Abschnitt 17**

Literatur

[CLO] D. Cox, J. Little, D. O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Springer, 1992.

[Vog] D. Vogel. *Algorithmische Geometrie*. Vorlesungsskript, 2008.

Bemerkung: [Vog] stellt eine Ausarbeitung von [CLO] dar. Als Literatur verweise ich hier nur auf die meiner Meinung nach konzisere Darstellung von Vogel. Im Buch von Cox, Little und O'Shea sind allerdings noch eine Reihe von graphischen Beispielen, Einordnungen und Anwendungen enthalten, so dass sich ein Blick in den jeweiligen Abschnitt in [CLO] durchaus lohnt.