Seminarprogramm Wintersemester 2010/11

Rationale quadratische Formen

Wir werden zunächst in den Vorträgen 1-3 die Grundlagen aus der Elementaren Zahlentheorie bereitstellen, die wir zum Einführen der p -adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ und des Hilbert-Symbols benötigen. Letzteres geschieht in den Vorträgen 4-8 und wird ein wichtiges Hilfsmittel zum Studium von rationalen quadratischen Formen bereitstellen. In den Vorträgen 9-13 betrachten wir endlich tatsächlich quadratische Formen, zunächst über recht beliebigen Körpern. Um schließlich quadratische Formen über $\mathbb{Q}$ kennenzulernen, studieren wir solche über allen $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{R}$ gleichzeitig, was uns besser als der direkte Ansatz die gewünschten Informationen liefert.

Voraussetzungen: Nur die Grundvorlesungen in Analysis und Linearer Algebra.

Vorbesprechung: Donnerstag, 14. 10. 2010 um 14 Uhr c. t. in Hörsaal 3, INF 288.

Vorträge

1 Endliche Körper

21. 10. 2010

In diesem Vortrag erinnern wir an grundlegendes Wissen über endliche Körper: Zunächst klassifizieren wir diese, dann zeigen wir, dass die Einheitengruppe eines endlichen Körpers immer zyklisch ist. Wir zeigen den Satz von Chevalley-Waring über gemeinsame Nullstellen von Polynomen über endlichen Körpern und den Satz von Wilson mit einer Verallgemeinerung. **Literatur:** [Ser] §I.1 - §I.2, [Nag] §30

2 Quadratische Reste

28. 10. 2010

Wir stellen uns die Frage nach der Lösbarkeit von quadratischen Gleichungen mit Koeffizienten in endlichen Körpern. Wir führen das Legendre-Symbol ein, zeigen den Satz von Euler, das Lemma von Gauß und studieren den Spezialfall

$$x^2 = \pm 2 \pmod{p}$$

für primes p , was (ganz heimlich) schon die Ergänzungssätze zum Quadratischen Reziprozitätsgesetz im nächsten Vortrag vorwegnimmt. **Literatur:** [Nag] §37 - §40

3 Das Quadratische Reziprozitätsgesetz

4. 11. 2010

Wir verallgemeinern das Konzept des quadratischen Restsymbols zum Jacobi-Symbol und beweisen das Quadratische Reziprozitätsgesetz, einen sehr wichtigen Satz aus der Elementaren Zahlentheorie, der die effiziente Berechnung von Jacobi-Symbolen möglich macht. Wenn die Zeit noch reicht, zeigen wir abschließend einen Spezialfall des Dirichlet'schen Primzahlsatzes. Letzterer besagt, dass es in jeder arithmetischen Progression $a + k\mathbb{Z}$ mit teilerfremden ganzen Zahlen a, k unendlich viele Primzahlen gibt. **Literatur:** [Nag] §41-§44

4 Die p -adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$

11. 11. 2010

Auf den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ lassen sich in Analogie zum Absolutbetrag für jede Primzahl p so genannte p -adische Bewertungen einführen. Genau wie in der Analysis kann man nun für jedes p Cauchy-Folgen betrachten und erhält durch Hinzunahme ihrer Limes einen vollständigen Körper $\mathbb{Q}_p$. **Literatur:** [Cas] §3.1 (ohne Seite 41)

5 Der Ring $\mathbb{Z}_p$ als projektiver Limes

18. 11. 2010

Dieser Vortrag ergänzt den vorhergehenden, indem er eine andere und oftmals nützlichere Sichtweise der p -adischen Zahlen angibt: Man studiert die so genannten ganzen p -adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ als projektiver Limes der Ringe $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ mit natürlichem r und gewinnt $\mathbb{Q}_p$ als den Quotientenkörper. *Doppelungen mit dem vorherigen Vortrag sollten vermieden werden.* **Literatur:** [Ser] §II.1. Für die Definition des projektiven Limes und den Zusammenhang zwischen den beiden möglichen Definitionen von $\mathbb{Q}_p$ (das soll gezeigt werden!) betrachte man [Neu] §II.1 - §II.2.

6 Das Hensellemma und $\mathbb{Q}_p^\times$

25. 11. 2010

In diesem Vortrag studieren wir zunächst Polynomgleichungen über $\mathbb{Z}_p$ und zeigen insbesondere das Lemma von Hensel. Im Anschluss untersuchen wir die Einheitengruppe von $\mathbb{Q}_p$ genauer, wo wir die Ergebnisse von Vortrag 4 aufgreifen. *Doppelungen sollen hier natürlich genauso vermieden werden.* **Literatur:** [Ser] §II.2 - §II.3, [Cas] §3.4

7 Das lokale Hilbertsymbol

2. 12. 2010

Sei k einer der Körper $\mathbb{R}, \mathbb{Q}_2, \mathbb{Q}_3, \dots$. Ganz ähnlich wie für die Konstruktion des quadratischen Restsymbols kann man sich dann überlegen, wann eine Gleichung vom Typ

$$Z^2 = aX^2 + bY^2 \quad \text{mit } a, b \in k$$

eine nichttriviale Lösung $(X, Y, Z) \in k^3$ hat, und führt analog das lokale Hilbertsymbol ein. Dies zu studieren ist Inhalt dieses Vortrags. **Literatur:** [Ser] §III.1, zum Vergleich auch [Cas] §3.2

8 Das globale Hilbertsymbol

9. 12. 2010

Man kann sich nun entschließen, das im letzten Vortrag eingeführte lokale Hilbertsymbol in allen erlaubten Körpern gleichzeitig zu betrachten. Wir zeigen Approximationsresultate, um schließlich zu verstehen, welche Tupel von lokalen Hilbertsymbolen für eine Familie (a_i) von Elementen von $\mathbb{Q}^\times$ infrage kommen. **Literatur:** [Ser] §III.2

9 Grundlegendes über quadratische Formen

16. 12. 2010

In diesem Vortrag werden quadratische Formen und ihre Diskriminante eingeführt, orthogonale Zerlegungen und isotrope Vektoren betrachtet, was uns die Angabe von Orthogonalbasen ermöglicht. *Die manchmal recht knapp gehaltenen Beweise in [Ser] sollen ausgearbeitet werden; lohnend ist hierbei ein Blick in [Lam] §I.1 - §I.3.* **Literatur:** [Ser] §IV.1.1 - §IV.1.4

10 Die Witt'schen Sätze

13. 1. 2011

Es sollen gleich vier Sätze von Witt bewiesen werden: Der Fortsetzungssatz, der Zerlegungssatz, der Kürzungssatz und der Kettenäquivalenzsatz. Der erste ist hierbei Theorem 3 in [Ser] §IV.1.5, die mittleren beiden finden sich sowohl in [Ser] als auch in [Lam], der letzte nur in [Lam]. All dies dient letztlich der Klassifizierung der quadratischen Formen und ist über beliebigen Körpern der Charakteristik $\neq 2$ gültig. Als Beispiel betrachten wir abschließend den Fall von endlichen Körpern. **Literatur:** [Ser] §IV.1.5 - §IV.1.7, [Lam] §I.4 - §I.5

11 Quadratische Formen über $\mathbb{Q}_p$ **20. 1. 2011**

Wir führen nun das Thema des letzten Vortrags fort, spezialisieren allerdings den Körper auf $k = \mathbb{Q}_p$ oder $k = \mathbb{R}$. Das hat zur Konsequenz, dass man in der Klassifikation erstaunlich präzise Aussagen machen kann, wie etwa, dass alle quadratischen Formen über $\mathbb{Q}_p$ mit mindestens 5 Variablen die Null darstellen.

Literatur: [Ser] §IV.2, es lohnt ein Blick in [Cas] §4.1 - §4.2

12 Das starke Hasse-Prinzip**27. 1. 2011**

In diesem Vortrag studieren wir quadratische Formen über $\mathbb{Q}$; genauer zeigen wir, dass eine quadratische Form global (also über $\mathbb{Q}$) genau dann Null darstellt, wenn sie das auch an allen lokalen Stellen $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{R}$ tut. Das ist das Hasse-Prinzip, bzw. der Satz von Hasse-Minkowski. **Literatur:** [Cas] §6.1 - §6.6

13 Quadratische Formen über $\mathbb{Q}$ **3. 2. 2011**

Wir untersuchen zunächst, unter welchen Voraussetzungen es für einen gegebenen Satz von quadratischen Formen f_p für alle p eine rationale quadratische Form f gibt, so dass f in jedem $\mathbb{Q}_p$ zum jeweiligen f_p äquivalent ist. Dann zeigen wir, dass quadratische Formen, die die Null darstellen, dies immer bereits an recht „kleinen“ Stellen tun, und dass man für einen gegebenen Satz von p -adischen Nullstellen einer quadratischen Form immer eine „nahe gelegene“ rationale Nullstelle gibt. Den Abschluss macht eine Anwendung der bisherigen Theorie auf die Geometrie. **Literatur:** [Cas] §6.7 - §6.10

Literatur

- [Cas] J. W. S. Cassels. *Rational Quadratic Forms*. Academic Press, 1978.
- [Lam] T. Y. Lam. *The Algebraic Theory of Quadratic Forms*. W. A. Benjamin, 1973.
- [Nag] Trygve Nagell. *Number Theory (second edition)*. Chelsea Publishing Company, 1964.
- [Neu] Jürgen Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie*. Springer, 1992.
- [Ser] Jean-Pierre Serre. *A Course in Arithmetic*. GTM, Nr. 7. Springer, 1973.