AOR Dr. Hendrik Kasten
Mathematisches Institut

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Seminarprogramm Sommersemester 2022

Siegel'sche Modulformen

Voraussetzungen: Funktionentheorie 1, *empfohlen:* Modulformen 1.
Vorbesprechung: am 17. 2. 2022 um 13:00-14:00 Uhr in Seminarraum 3.
Termin: DO 14-16 Uhr in Wo?.

Vorträge

Vortrag 1: Die symplektische Gruppe (21. 4. 2022)

Quelle: Abschnitt 1.1 aus [Kas].

Die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}_2(R)$ für einen euklidischen Ring R lässt sich als der Spezialfall $n = 1$ der symplektischen Gruppen $\mathrm{Sp}_n(R)$ auffassen. In diesem Vortrag führen wir die symplektischen Gruppen ein und geben in Verallgemeinerung des aus Modulformen 1 bekannten Resultats

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T \rangle \quad \text{mit } S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ein übersichtliches System von Erzeugern für diese an.

Vortrag 2: Der Siegel'sche Halbraum (28. 4. 2022)

Quelle: Abschnitt 1.2 in [Kas].

In Verallgemeinerung der oberen Halbebene $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{C}$ führen wir den Siegel'schen Halbraum $\mathbb{H}_n \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$ ein und zeigen, dass die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ genau wie im aus Funktionentheorie 1 bekannten Fall für $n = 1$ via Möbiustransformationen transitiv auf $\mathbb{H}_n$ operiert. Genau wie im aus Modulformen 1 bekannten Fall für $n = 1$ gibt es zudem eine Bijektion

$$\mathbb{H}_n \cong \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})/(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R})).$$

Abschließend betrachten wir diskrete Untergruppen von $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ und führen als besonders wichtigen Spezialfall die Siegel'sche Modulgruppe $\Gamma_n := \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ ein.

Vortrag 3: Der Siegel'sche Fundamentalbereich (5. 5. 2022)

Quelle: Abschnitt 1.3 in [Kas] bis inklusive Unterabschnitt 1.3.1; *kurz kann noch* *über Unterabschnitt* 1.3.2 *berichtet werden.*

Ziel dieses und der folgenden drei Vorträge ist es, einen Fundamentalbereich für die Operation von $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}_n$ zu konstruieren. Das geht grundsätzlich sehr ähnlich wie im bereits in Modulformen 1 studierten Fall für $n = 1$, man muss jedoch noch etwas genauer hinschauen. Dafür betrachten wir in diesem Vortrag zunächst den offenen Kegel $\mathbb{P}_n$ der Imaginärteile von Punkten aus $\mathbb{H}_n$ und zeigen die Ungleichung von Hermite, die sich mit Hilfe des Minkowski'schen Gitterpunktsatzes verbessern lässt.

Vorträge 4 + 5: Minkowski'sche Reduktionstheorie (12. 5. + 19. 5. 2022)

Quelle: Unterabschnitt 1.3.3 in [Kas]; *ergänzend Abschnitt* 2 *in [Kli].*

Mithilfe der Minkowski'schen Reduktionstheorie erhalten wir auf $\mathbb{P}_n$ einen Fundamentalbereich für die Aktion der unimodularen Matrizen.

Vortrag 6: Siegel'sche Reduktionstheorie (2. 6. 2022)

Quelle: Unterabschnitt 1.3.4 in [Kas].

In diesem Vortrag nutzen wir die Ergebnisse der vorigen drei Vorträge, um einen Fundamentalbereich für die Aktion von $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}_n$ zu bestimmen.

Vortrag 7: Siegel'sche Modulformen (9. 6. 2022)

Quelle: Abschnitte 2.1 und 2.2 in [Kas].

Wir erweitern zunächst den gewohnten Holomorphiebegriff von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}^r$ und betrachten die wichtigsten Eigenschaften holomorpher Funktionen mehrer Veränderlicher (Identitätssatz, Maximum- und Minimumprinzip). Siegelsche Modulformen werden nun definiert als holomorphe, auf ganz $\mathbb{H}_n$ beschränkte Funktionen, die durch ihr Transformationsverhalten unter der Operation von Γ_n charakterisiert sind. Wir ziehen erste Folgerungen aus diesem Transformationsverhalten, und zeigen dann, dass Modulformen über eine Fourierreihenentwicklung verfügen. Wir untersuchen das Tranformationsverhalten der Fourierkoeffizienten und beweisen zum Abschluss das Koecherprinzip.

Vortrag 8: Thetareihen (23. 6. 2022)

Quelle: Abschnitt 2.3 in [Kas].

Gewissermaßen als kanonisches Beispiel für Siegelsche Modulformen begegnen uns in diesem Vortrag die Thetareihen

$$\vartheta_a^{(n)}(z) := \sum_{g \in \mathbb{Z}^{m \times n}} \exp(\pi i \operatorname{tr}({}^t gag)) \quad \text{für } a \in \mathbb{P}_n.$$

Ihre Fourierkoeffizenten sind die Darstellungsanzahlen ganzzahliger Matrizen durch quadratische Formen. Wir beschreiben ihr Transformationsverhalten und untersuchen, unter welchen Bedingungen an a die Thetareihe $\vartheta_a^{(n)}$ eine Modulformen vom Grad n ist. Schließlich sehen wir am Beispiel des E_8-Gitters, dass diese Bedingungen auch realisierbar sind.

Vortrag 9: Der Siegel-Operator und Spitzenformen (30. 6. 2022)

Quelle: Abschnitt 2.4 in [Kas].

Wir führen den Siegel'schen Φ-Operator $\Phi : M_k^n \to M_k^{n-1}$ ein und definieren Spitzenformen als diejenigen Modulformen, die im Kern $S_k^n \subseteq M_k^n$ von Φ liegen. Es zeigt sich, dass sich Spitzenformen auch durch Ihre Fourierentwicklung charakterisieren lassen. Weiter lassen sich einige Rückschlüsse über die Dimensionen der Räume von Spitzenformen und Modulformen ziehen. Den Abschluss dieses Abschnitts bildet der Endlichkeitssatz, welcher für fixiertes n das Verhalten von $\dim M_k^n$ und $\dim S_k^n$ für $k \to \infty$ beschreibt. *Über den Endlichkeitssatz können wir hier aus Zeitgründen nur kurz berichten.*

Vortrag 10: Klingen'sche Eisenstein-Reihen (7. 7. 2022)

Quelle: Abschnitt 2.5 in [Kas] bis inklusive Lemma 2.37. *Vgl. auch Abschnitt* 5 *in [Fre].*

In diesem und den folgenden zwei Vorträgen zeigen wir, dass der Siegel-Operator $\Phi : M_k^n \to M_k^{n-1}$ für gerades $k > 2n$ surjektiv ist. Als Urbilder in M_k^n unter Φ^{n-j} von Spitzenformen aus S_k^j definieren wir die Klingen'schen Eisensteinreihen. Ein Spezialfall davon, für die konstante Spitzenform 1, sind die Siegelschen Eisensteinreihen, welche die unmittelbare Verallgemeinerung der klassischen Eisensteinreihen darstellen. *Dieser Vortrag ist sehr üppig zugeschnitten und muss geeignet gerafft präsentiert werden.*

Vortrag 11: Die Surjektivität des Siegel-Operators 1 (14. 7. 2022)

Quelle: Weiter in Abschnitt 2.5 in [Kas] bis inklusive Lemma 2.40.*Vgl. auch Abschnitt* 5 *in [Fre].*

Siehe Beschreibung von Vortrag 10.

Vortrag 12: Die Surjektivität des Siegel-Operators 2 (21. 7. 2022)

Quelle: Der Rest von Abschnitt 2.5 in [Kas].*Vgl. auch Abschnitt* 5 *in [Fre].*

Siehe Beschreibung von Vortrag 10.

Vortrag 13: Das Petersson-Skalarprodukt (28. 7. 2022)

Quelle: Abschnitt 2.6 in [Kas]

Seien $f, g \in M_k^n$ mit f oder g in S_k^n. Dann definieren wir in Verallgemeinerung der aus Modulformen 1 für den Fall $n = 1$ bekannten Konstruktion das Petersson-

Skalarprodukt von f und g als

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathcal{F}_n} f(z)\overline{g(z)} \det(y)^k d\omega.$$

Das Petersson-Skalarprodukt ist absolut konvergent und sein Wert ist unabhängig von der Wahl des Fundamentalbereichs. Mithilfe des Petersson-Skalarprodukts erhalten wir als abschließendes Resultat des Seminars eine orthogonale Zerlegung des Raums M_k^n der Gestalt

$$M_k^n = M_k^{n,0} \oplus M_k^{n,1} \oplus \cdots \oplus M_k^{n,n},$$

von der wir zeigen, dass sich die einzelnen Komponenten $M_k^{n,j}$ aus den Eisensteinreihen $E_k^{n,j}(f_j)$ zu Spitzenformen $f_j \in S_k^j$ zusammensetzen.

Literatur

[Fre] E. Freitag. *Siegelsche Modulfunktionen*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Nr. **254**. Springer, 1983.

[Kas] H. Kasten. *Siegel'sche Modulformen (*Vorlesungsskript 2017*)*.

[Kli] H. Klingen. *Introductory lectures on Siegel modular forms*. Cambridge studies in advanced mathematics, Nr. **20**. Cambridge University Press, 1990.